ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-131-141

О связи между второй разделенной разностью и второй производной в задаче экстремальной интерполяции в среднем[1]

В. Т. Шевалдин

Шевалдин Валерий Трифонович — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН (г. Екатеринбург).
e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Аннотация

В работе на произвольной сетке $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ числовой оси сформулирована общая задача экстремальной функциональной интерполяции в среднем действительных функций, имеющих на оси почти всюду производную n-го порядка. Требуется найти наименьшее значение нормы этой производной в пространстве L_∞ для функций f, интерполирующих в среднем (с интервалами усреднения длины $2h$) любую заданную последовательность $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ действительных чисел, для класса последовательностей Y, у которых все разделенные разности n-го порядка на такой сетке узлов ограничены сверху. В данной работе задача решается в случае $n = 2$. Для величины второй производной в терминах шагов $h_k = x_{k+1} - x_k$ сетки Δ получены оценки сверху и снизу, если выполнено неравенство $2h \leqslant \underline{h} = \inf_k h_k$. Работа является продолжением исследований Ю. Н. Субботина, автора и С. И. Новикова в известной задаче Яненко — Стечкина экстремальной функциональной интерполяции, поставленной в начале 60-х годов прошлого века для равномерной сетки узлов.

Ключевые слова: интерполяция в среднем, производная, разделенная разность, ось, произвольная сетка узлов, сплайн.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Шевалдин, В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной в задаче экстремальной интерполяции в среднем // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 131–141.

[1]Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2023-913).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-131-141

On the relationship between the second divided difference and the second derivative in the problem of extremal interpolation in the mean

V. T. Shevaldin

Shevaldin Valerii Trifonovich — doctor of physical and mathematical sciences, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg).
e-mail: valerii.shevaldin@imm.uran.ru

Abstract

In the paper, the general problem of extremal functional interpolation in the mean for real functions that have derivative of order n almost everywhere is formulated on an arbitrary partition $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ of the real axis. It is required to find the smallest value of the L_∞-norm of the n-derivative among functions that interpolate in the mean (with averaging intervals of length $2h$) any sequence of real numbers $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ from a class Y of sequences whose divided differences of order n are bounded from above on such a grid. In this paper, the problem is considered in the case of $n = 2$. We give the above and below estimates for the L_∞-norm of the second derivative in terms of grid steps $h_k = x_{k+1} - x_k$ provided that $2h \leqslant \underline{h} = \inf_k h_k$. The obtained results are developments is research of Yu. N. Subbotin, the author and S. I. Novikov in the well-known Yanenko — Stechkin problem of extremal functional interpolation. This problem was put in the early 60-s years of the last century for the case of the uniform grid.

Keywords: interpolation in the mean, derivative, divided difference, axis, grid of nodes, spline.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
Shevaldin, V. T. 2025, "On the relationship between the second divided difference and the second derivative in the problem of extremal interpolation in the mean", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 131–141.

1. Введение

Пусть n — произвольное натуральное число, и на оси $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$ задана бесконечная в обе стороны сетка узлов $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ вида

$$-\infty < \dots < x_k < x_{k+1} < x_{k+2} < \dots < +\infty.$$

На эту сетку наложим следующее ограничение: $\underline{h} = \inf_k h_k > 0$, где $h_k = x_{k+1} - x_k$. Пусть $y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Разделенная разность порядка n на сетке Δ определяется рекуррентно как обычно с помощью равенств

$$[y_k] = y_k, \quad [y_{k+1}, y_k] = \frac{[y_{k+1}] - [y_k]}{x_{k+1} - x_k}, \dots,$$

$$[y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k] = \frac{[y_{k+n}, \dots, y_{k+1}] - [y_{k+n-1}, \dots, y_k]}{x_{k+n} - x_k} \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

Определим класс последовательностей

$$Y = \Big\{ y = \{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty} : \ \sup_k \big| [y_{k+n}, y_{k+n-1}, \dots, y_k] \big| \leqslant 1 \Big\}.$$

Пусть $h:\ 0 < h < \underline{h}/2$. Для любой последовательности $y \in Y$ рассмотрим класс функций

$$F(y) = \left\{ f:\ f^{(n-1)} \in AC,\ f^{(n)} \in L_\infty(\mathbb{R}),\ \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x_k+t)\,dt = y_k \quad (k \in \mathbb{Z}) \right\}.$$

Здесь, как обычно, AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Задача экстремальной интерполяции в среднем заключается в точном нахождении величины

$$A_n = A_n(\Delta, h) = \sup_{y\in Y} \inf_{f\in F(y)} \|f^{(n)}\|_\infty. \tag{2}$$

Для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}_H = \{kH\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ($H = x_{k+1} - x_k$ для всех $k \in \mathbb{Z}$) и конечных разностей n-го порядка

$$\Delta^n y_k = \sum_{s=0}^{n} (-1)^{n-s} C_n^s y_{k+s}$$

эта задача известна, как задача Яненко — Стечкина (см. работы Ю. Н. Субботина [1]–[5] и большой обзор [6] по этой тематике и родственным задачам). Для произвольной сетки узлов близкую по постановке задачу на отрезке числовой оси при $h = 0$ (этот случай соответствует обычной интерполяции в точках сетки, и $y_k = f(x_k)$) первым в 1940 году сформулировал и доказал ограниченность нормы n-й производной в пространстве L_∞ французский математик Ж. Фавар [7] (см. также [8]–[10]). Дальнейшее развитие данная задача получила для произвольной сетки узлов, $h = 0$ и оператора n-кратного дифференцирования в недавних работах [11]–[14]. В случае интерполяции в среднем (т. е. при $h \neq 0$) задача (2) рассматривалась ранее только для равномерной сетки узлов (см. [3]–[5] для оператора n-кратного дифференцирования и [15]–[17] — для произвольного линейного дифференциального оператора n-го порядка с постоянными коэффициентами в более общей постановке). Следует отметить, что Ю. Н. Субботин в первых своих работах [1]–[3] предложил оригинальный метод решения подобных задач для равномерной сетки узлов, который, как оказалось, можно с небольшими изменениями применить и для произвольной сетки.

Настоящая работа посвящена только случаю $n = 2$. Переформулируем при $n = 2$ и $0 \leqslant h \leqslant H/2$ (т. е. при непересекающихся интервалах усреднения) основной результат Ю. Н. Субботина (см. [3]) для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}_H = \{kH\}_{k=-\infty}^{\infty}$ в терминах разделенных разностей (1) (Ю. Н. Субботин для простоты изложения рассматривал в своих работах только случай $H = 1$), вычисляя соответствующие определенные интегралы от совершенных сплайнов, которые возникли в его работах.

Теорема 1 (Ю. Н. Субботин [3]). *При $0 \leqslant h \leqslant H/2$ имеет место следующее равенство*:

$$A_2(\overline{\Delta}_H, h) = \frac{4}{1 - \frac{4h^2}{3H^2}}.$$

Следствие 1. *При $0 \leqslant h \leqslant H/2$ имеем*

$$A_2(\overline{\Delta}_H, 0) = 4 \leqslant A_2(\overline{\Delta}_H, h) = A_2\Big(\overline{\Delta}_H, \frac{H}{2}\Big) = 6.$$

Ю. Н. Субботин [3], [4] вычислил величину $A_n\big(\overline{\Delta}_H, h\big)$ при всех значениях $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant h \leqslant H$ (случай $H/2 < h \leqslant H$ приводит к пересекающимся интервалам усреднения). Мы не формулируем здесь все его точные результаты, поскольку они не имеют непосредственного отношения к дальнейшему содержанию работы, замечая только, что в случае пересекающихся интервалов усреднения данная задача оказалась гораздо сложнее.

Для любой сетки $\Delta = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ введем следующие величины:

$$A = \lim_{N\to+\infty}\left[\frac{1}{4N}\sum_{k=-N+1}^{N}\frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}\left(\frac{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}+\frac{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}\right)\right]^{-1},$$

$$B = 2\left[\inf_{k\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{2\big(1+\frac{h_k}{h_{k+1}}\big)}{\big(\frac{h_k}{h_{k+1}}+2+\frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\big)^2}-\frac{2\big(1+\frac{h_{k+1}}{h_k}\big)}{\big(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\big)^2}\right)\right]^{-1}.$$

Теорема 2 ([11]). *Для любой сетки узлов Δ при $h = 0$ имеет место двойное неравенство*

$$A \leqslant A_2(\Delta, 0) \leqslant B,$$

причем $A \geqslant 2,\ B \leqslant 18$.

Оценка сверху для величины $A_2(\Delta, 0)$ в сформулированной теореме была уточнена (см. [13, 14]): $A_2(\Delta, 0) \leqslant 4$. При этом оказалось, что

$$2 = \inf_{\Delta} A_2(\Delta, 0) \leqslant \sup_{\Delta} A_2(\Delta, 0) = \max_{\Delta} A_2(\Delta, 0) = 4,$$

причем верхняя оценка реализуется на равномерной сетке $\overline{\Delta}_H$ (H — любое положительное число).

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема 3. *Для любой сетки узлов Δ при любом $h:\ 0 < h < \underline{h}/2$ ($\underline{h} = \inf_k h_k$) имеет место неравенство*

$$A \leqslant A_2(\Delta, h) \leqslant \frac{4}{\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}}\big(1-\frac{4h^2}{3h_kh_{k+1}}\big)} \leqslant 6.$$

2. Оценка снизу величины $A_2(\Delta, h)$

Пусть в задаче (2) $n = 2$ и h — любое положительное число. Для любой последовательности $y \in Y$ функцию $f \in F(y)$ запишем по формуле Тейлора в виде

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^{x}(x - t)f''(t)\,dt. \tag{3}$$

Поскольку

$$y_k = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x_k + x)\,dx, \quad y_{k+1} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x_{k+1} + x)\,dx, \quad y_{k+2} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x_{k+2} + x)\,dx,$$

то из (3) и определения (1) разделенной разности $[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]$, учитывая, что она аннулирует линейные функции на произвольной сетке узлов, получим

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\bigg[\int_{x_k}^{x_{k+2}+x}\frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}f''(t)\,dt-$$

$$-\int_{x_k}^{x_{k+1}+x}\frac{x_{k+1}+x-t}{h_kh_{k+1}}f''(t)\,dt+\int_{x_k}^{x_k+x}\frac{x_k+x-t}{h_k(h_k+h_{k+1})}f''(t)\,dt\Bigg]\,dx=$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Bigg[\int_{x_k+x}^{x_{k+2}+x}\frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}f''(t)\,dt-\int_{x_k+x}^{x_{k+1}+x}\frac{x_{k+1}+x-t}{h_kh_{k+1}}f''(t)\,dt\Bigg]\,dx.$$

Из этого равенства следует первое представление для второй разделенной разности в случае интерполяции в среднем:

$$[y_{k+2},y_{k+1},y_k]=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Bigg[\int_{x_{k+1}+x}^{x_{k+2}+x}\frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}f''(t)\,dt+$$

$$+\int_{x_k+x}^{x_{k+1}+x}\frac{t-x_k-x}{h_k(h_k+h_{k+1})}f''(t)\,dt\Bigg]\,dx. \tag{4}$$

После замены переменных выводим второе представление для этой разности:

$$[y_{k+2},y_{k+1},y_k]=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Bigg[\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}\frac{x_{k+2}-z}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}f''(x+z)\,dz+$$

$$+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{z-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}f''(x+z)\,dz\Bigg]\,dx. \tag{5}$$

Для получения оценки снизу для величины $A_2(\Delta,h)$, следуя методу работ [1]–[3] Ю. Н. Субботина, рассмотрим произвольную последовательность $y^*=\{y^*\}_{k=-\infty}^{\infty}\in Y$, удовлетворяющую условию

$$[y^*_{k+2},y^*_{k+1},y^*_k]=(-1)^k\quad(k\in\mathbb{Z}). \tag{6}$$

Из (5) и (6) при любом натуральном $N\geqslant 2$ имеем

$$2N+1=\sum_{k=-N}^{N}(-1)^k[y^*_{k+2},y^*_{k+1},y^*_k]=$$

$$=\sum_{k=-N}^{N}\frac{(-1)^k}{2h(h_k+h_{k+1})}\int_{-h}^{h}\Bigg[\int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}}\frac{x_{k+2}-z}{h_{k+1}}f''(x+z)\,dz+$$

$$+\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{z-x_k}{h_k}f''(x+z)\,dz\Bigg]\,dx=S_1+S_2, \tag{7}$$

где

$$S_1=\frac{(-1)^N}{2h(h_N+h_{N+1})}\int_{-h}^{h}dx\int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}}\frac{x_{N+2}-z}{h_{N+1}}f''(x+z)\,dz+$$

$$+\frac{(-1)^N}{2h(h_{-N}+h_{-N+1})}\int_{-h}^{h}dx\int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}}\frac{z-x_{-N}}{h_{-N}}f''(x+z)\,dz,$$

$$S_2=\sum_{k=-N+1}^{N}\frac{(-1)^k}{2h}\int_{-h}^{h}dx\int_{x_k}^{x_{k+1}}\varphi_k(z)f''(x+z)\,dz,$$

$$\varphi_k(z)=\frac{z-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}-\frac{x_{k+1}-z}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\quad(z\in[x_k;x_{k+1}]),\quad k=\overline{-N+1,N}. \tag{8}$$

Из (8) имеем

$$|S_1|\leqslant\Bigg[\frac{1}{h_{N+1}(h_N+h_{N+1})}\int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}}(x_{N+2}-z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{h_{-N}(h_{-N}+h_{-N+1})}\int_{x_{-N}}^{x_{-N+1}}(z-x_{-N})\,dz\Bigg]\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|,$$

$$|S_2|\leqslant\Bigg[\sum_{k=-N+1}^{N}\int_{x_k}^{x_{k+1}}|\varphi_k(z)|\,dz\Bigg]\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|. \tag{9}$$

После несложных вычислений получаем

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}}|\varphi_k(z)|\,dz=\frac{h_k}{2(h_{k-1}+2h_k+h_{k+1})}\Big(\frac{h_k+h_{k+1}}{h_{k-1}+h_k}+\frac{h_{k-1}+h_k}{h_k+h_{k+1}}\Big). \tag{10}$$

Следует заметить, что формула (10) ранее была доказана в работе [11]. Таким образом, из (7)–(10) для любого натурального числа $N\geqslant 2$ следует неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|\geqslant\frac{2N+1}{|S_1|+|S_2|}\geqslant\frac{2N+1}{K}, \tag{11}$$

где

$$K=1+\frac{1}{2}\sum_{k=-N+1}^{N}\frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}\left(\frac{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}+\frac{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}\right).$$

Устремляя число N к бесконечности, из неравенства (11) для величины $A_2(\Delta,h)$, получаем следующую оценку снизу, зависящую от шагов сетки Δ и не зависящую от длины $2h$ интервала усреднения:

$$A_2(\Delta,h)\geqslant A, \tag{12}$$

в которой константа A была определена во введении к настоящей работе.

3. Оценка сверху величины $A_2(\Delta,h)$

Наряду с сеткой $\Delta=\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ рассмотрим еще одну сетку узлов Δ' в точках $x_{k+0{,}5}=$ $=(x_k+x_{k+1})/2\quad(k\in\mathbb{Z})$, и пусть $\underline{h}=\inf_k h_k>0,\quad 0<h\leqslant\underline{h}/2$. Покажем, что для любой последовательности $y\in Y$ существует функция $f\in F(y)$, которая является интерполяционным параболическим сплайном с узлами в точках сетки Δ', который интерполирует в среднем значения последовательности y, а именно удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x_k+x)\,dx=y_k\quad(k\in\mathbb{Z}),$$

и для него справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(x)|\leqslant\frac{4}{\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{4h^2}{3h_kh_{k+1}}\right)}.$$

Для любого числа $k\in\mathbb{Z}$ полагаем

$$f''(x)=Z_k,\quad x_{k-0{,}5}\leqslant x<x_{k+0{,}5}, \tag{13}$$

где числа $Z=\{Z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ подлежат дальнейшему определению.

Из равенства (4) с учетом того, что число h достаточно мало $(0<h\leqslant\underline{h}/2)$, меняя порядок интегрирования, тогда получим разностное уравнение с трехленточной матрицей вида

$$[y_{k+2},y_{k+1},y_k]=a_kZ_{k+2}+b_kZ_{k+1}+c_kZ_k\quad(k\in\mathbb{Z}), \tag{14}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2h}\int_{x_{k+2}-h}^{x_{k+2}+h} dt \int_{t-x_{k+2}}^{h} \frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\,dx + \frac{1}{2h}\int_{x_{k+1,5}}^{x_{k+2}-h} dt \int_{-h}^{h} \frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{2h}\int_{x_{k+1}-h}^{x_{k+1}+h} dt \int_{-h}^{t-x_{k+1}} \frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\,dx + \frac{1}{2h}\int_{x_{k+1}+h}^{x_{k+1,5}} dt \int_{-h}^{h} \frac{x_{k+2}+x-t}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{x_{k+1}-h}^{x_{k+1}+h} dt \int_{t-x_{k+1}}^{h} \frac{t-x-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}\,dx + \frac{1}{2h}\int_{x_{k+0,5}}^{x_{k+1}-h} dt \int_{-h}^{h} \frac{t-x-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}\,dx,$$

$$c_k = \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} dt \int_{-h}^{t-x_k} \frac{t-x-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}\,dx + \frac{1}{2h}\int_{x_k+h}^{x_{k+0,5}} dt \int_{-h}^{h} \frac{t-x-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})}\,dx.$$

Вычисляя интегралы, получим

$$a_k = \frac{h^2}{6h_{k+1}(h_k+h_{k+1})} + \frac{h_{k+1}}{8(h_k+h_{k+1})},$$

$$b_k = \frac{3h_{k+1}h-2h^2}{3h_{k+1}(h_k+h_{k+1})} + \frac{3h_{k+1}^2-8h_{k+1}h+4h^2}{8h_{k+1}(h_k+h_{k+1})} + \frac{3h_kh-2h^2}{8h_k(h_k+h_{k+1})} + \frac{3h_k^2-8h_kh+4h^2}{8h_k(h_k+h_{k+1})},$$

$$c_k = \frac{h^2}{6h_k(h_k+h_{k+1})} + \frac{h_k}{8(h_k+h_{k+1})}. \tag{15}$$

Лемма 1. *При* $0<h\leqslant \underline{h}/2$ *имеют место следующие соотношения*:
1) $0<a_k<7/48,\ b_k>0,\ 0<c_k<7/48,$
2) $2a_k+2b_k+2c_k=1,$
3) $4a_k+4c_k=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2h^2}{3h_kh_{k+1}}\leqslant\dfrac{2}{3}.$

Доказательство. Пункты 1) и 2) легко проверяются с помощью непосредственных вычислений. Докажем пункт 3). Из (15) имеем

$$4a_k+4c_k = \frac{4h_k}{8(h_k+h_{k+1})} + \frac{4h_{k+1}}{8(h_k+h_{k+1})} + \frac{4h^2}{6(h_k+h_{k+1})}\Big(\frac{1}{h_k}+\frac{1}{h_{k+1}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2h^2}{3h_kh_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{2h_kh_{k+1}}{12h_kh_{k+1}} = \frac{2}{3}.$$

Лемма 1 полностью доказана.

Изучим разностное уравнение (14) для определения чисел $Z=\{Z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Лемма 2. *При* $0<h\leqslant \underline{h}/2$ *для любой последовательности* $y\in Y$ *разностное уравнение* (14) *имеет ограниченное решение, и это решение единственно.*

Доказательство. Автором в [13, § 5] (см. также [14]) лемма 2 при $h=0$ (т. е. в случае обычной интерполяции в точках сетки Δ) доказана по методу [11, лемма 2]. В случае интерполяции в среднем приведем аналогичное доказательство с помощью теоремы о неподвижной точке.

Равенство (14) с учетом второго утверждения леммы 1 переписывается в виде

$$2a_k(Z_{k+1}-Z_{k+2}) + 2c_k(Z_{k+1}-Z_k) + 2[y_{k+2},y_{k+1},y_k] = Z_{k+1}.$$

Рассмотрим нелинейный оператор $T:\ l_\infty(\mathbb{Z})\to l_\infty(\mathbb{Z})$, который ставит в соответствие произвольной последовательности $Z=\{Z_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\in l_\infty(\mathbb{Z})$ последовательность

$$\bigl\{2a_k(Z_{k+1}-Z_{k+2})+2c_k(Z_{k+1}-Z_k)+2[y_{k+2},y_{k+1},y_k]\bigr\}_{k=-\infty}^{\infty}\in l_\infty(\mathbb{Z}).$$

В силу леммы 1 и неравенств

$$\bigl\|TZ^{(1)}-TZ^{(2)}\bigr\|_{l_\infty}=\sup_{k\in\mathbb{Z}}\bigl|2a_k\bigl(Z^{(2)}_{k+2}-Z^{(1)}_{k+2}\bigr)+2a_k\bigl(Z^{(1)}_{k+1}-Z^{(2)}_{k+1}\bigr)+$$

$$+2c_k\bigl(Z^{(2)}_{k}-Z^{(1)}_{k}\bigr)+2c_k\bigl(Z^{(1)}_{k+1}-Z^{(2)}_{k+1}\bigr)\bigr|\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl(2\sup_{k\in\mathbb{Z}}a_k+2\sup_{k\in\mathbb{Z}}c_k+2\sup_{k\in\mathbb{Z}}(a_k+c_k)\Bigr)\bigl\|Z^{(1)}-Z^{(2)}\bigr\|_{l_\infty}<\frac{11}{12}\bigl\|Z^{(1)}-Z^{(2)}\bigr\|_{l_\infty}$$

этот оператор является сжимающим оператором в полном метрическом пространстве $l_\infty(\mathbb{Z})$ с константой сжатия $11/12<1$. Здесь $Z^{(1)}=\{Z^{(1)}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $Z^{(2)}=\{Z^{(2)}_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Поэтому по теореме функционального анализа о сжимающем операторе уравнение $T\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$ (т. е. разностное уравнение (14)) имеет ограниченное решение, и это решение единственно. Лемма 2 доказана.

Поскольку разностное уравнение (14) в силу леммы 1 имеет доминирующую главную диагональ, легко получить оценку сверху для его единственного решения, хотя само решение явно выписать не удается.

Лемма 3. *При* $0<h\leqslant \underline{h}/2$ *для решения разностного уравнения* (14) *имеет место следующая оценка*:

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Z_k|\leqslant\frac{2}{\inf_{k\in\mathbb{Z}}(1-4a_k-4c_k)}.$$

При $h=0$ лемма 3 доказана в [13, лемма 5.1]. При $0<h\leqslant\underline{h}/2$ доказательство [13] повторяется почти дословно. Из леммы 3 и леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. *При* $0<h\leqslant\underline{h}/2$ *имеет место оценка*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|Z_k|\leqslant\frac{4}{\inf_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(1-\frac{4h^2}{3h_kh_{k+1}}\bigr)}\leqslant 6.$$

Из леммы 3 и следствия 2 с учетом равенства (13) получаем оценку сверху величины $A_2(\Delta,h)$ при $0<h\leqslant h/2$:

$$A_2(\Delta,h)\leqslant\frac{4}{\inf_{k\in\mathbb{Z}}\bigl(1-\frac{4h^2}{3h_kh_{k+1}}\bigr)}\leqslant 6. \tag{16}$$

Таким образом, из оценок (12) и (16) следует, что теорема 3 полностью доказана.

Замечание 10. *При* $0<h\leqslant\underline{h}/2$ *имеет место равенство*

$$\sup_{\Delta}A_2(\Delta,h)=A_2(\overline{\Delta}_H,h)=\frac{4}{1-\frac{4h^2}{3H^2}}.$$

Данное утверждение вытекает из оценки сверху в теореме 3 при $h_k=H$ $(k\in\mathbb{Z})$ и теоремы 1 (см. введение), доказанной Ю. Н. Субботиным [3] для равномерной сетки узлов $\overline{\Delta}_H$ с шагом H.

4. Заключение

Условие $\underline{h} > 0$ не позволяет рассматривать исследуемую задачу на конечном промежутке, если число узлов сетки бесконечно. Ограничение на шаг усреднения h в теореме 3 объясняется тем, что при $h > h_k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{Z}$ разностное уравнение (14) не будет иметь трехленточной структуры с доминирующей главной диагональю, и для доказательства существования решения, а также для его оценки надо привлекать другие методы. В этом случае интервалы усреднения при интерполяции в среднем могут пересекаться, и как показывают исследования Ю. Н. Субботина [4], [5] и автора [16], [17] для равномерной сетки узлов при пересекающихся интервалах усреднения задача экстремальной интерполяции становится гораздо сложнее. Большую трудность при решении этой задачи для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ вызывает отсутствие общей теории решения разностных уравнений с переменными коэффициентами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.

2. Субботин Ю. Н. Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Труды МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.

3. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Труды МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.

4. Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция в среднем с наименьшим значением n-й производной при больших интервалах усреднения // Матем. заметки. 1996. Т. 59, № 1. С. 114–132. doi: 10.4213/mzm1699 .

5. Субботин Ю. Н. Экстремальная в L_p интерполяция в среднем при пересекающихся интервалах усреднения // Известия РАН. Серия математическая. 1997. Т. 61, № 1. С. 177–198. doi: 10.4213/im110 .

6. Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 .

7. Favard J. Sur interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. Vol. 19, no. 9. P. 281–306.

8. de Boor C. How small can one make the derivatives of an interpolating function? // J. Approx. Theory, 1975. Vol. 13, no. 2. P. 105–116.

9. de Boor C. A smooth and local interpolant with small k-th derivative. Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations. N.-Y: Acad. Press. 1975. P. 177–197.

10. Kunkle Th. Favard's interpolation problem in one or more variables // Constructive Approxim. 2002. Vol. 18, no. 4. P. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .

11. Новиков С. И., Шевалдин В. Т. О связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 .

12. Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция на полуоси с наименьшим значением нормы третьей производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 4. С. 210–223. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-210-223 .

13. Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция с наименьшим значением нормы второй производной в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 1. С. 219–236. doi: https://doi.org/10.4213/im9125 .

14. Волков Ю. С. Замечание о связи между второй разделенной разностью и второй производной // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 1. С. 19–21. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-19-21 .

15. Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.

16. Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения и $\mathcal{L}$-сплайны // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 4. С. 201–224. doi: 10.4213/im193 .

17. Шевалдин В. Т. Экстремальная интерполяция в среднем при перекрывающихся интервалах усреднения с наименьшим значением нормы линейного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 219–232. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-219-232 .

REFERENCES

1. Subbotin Yu. N. “On the connection between finite differences and corresponding derivatives”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).

2. Subbotin Yu. N. “Functional interpolation in the mean with smallest n-derivative”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.

3. Subbotin Yu. N. “Extremal problem of functional interpolation, and mean interpolation splines”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.

4. Subbotin Yu. N. “Extremal functional interpolation in the mean with least value of thenth derivative for large averaging intervals”, *Math. Notes*, 1996, vol. 59, no. 1, pp. 83–96. doi: 10.1007/BF02312469 .

5. Subbotin Yu. N. “Extremal L_p interpolation in the mean with intersecting averaging intervals”, *Izv. Math.*, 1997, vol. 61, no. 1, pp. 183–205. doi: 10.1070/im1997v061n01ABEH000110 .

6. Subbotin Yu. N., Novikov S. I., Shevaldin V. T. “Extremal function interpolation and splines”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 200–225. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-3-200-225 (in Russian).

7. Favard J. “Sur interpolation”, *J. Math. Pures Appl.*, 1940, vol. 19, no. 9, pp. 281–306.

8. de Boor C. “How small can one make the derivatives of an interpolating function?” *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 13, no. 2, pp. 105–116.

9. de Boor C. “A smooth and local interpolant with small k-th derivative”, Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations. N.-Y: Acad. Press, 1975, pp. 177–197.

10. Kunkle Th. “Favard’s interpolation problem in one or more variables”, *Constructive Approx.*, 2002, vol. 18, no. 4, pp. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .

11. Novikov S. I., Shevaldin V. T. “On the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 216–224. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224 (in Russian).

12. Novikov S. I., Shevaldin V. T. “Extremal interpolation on the semiaxis with the smallest norm of the third derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 210–223. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-4-210-223 (in Russian).

13. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation with the least value of the norm of the second derivative in $L_p(\mathbb{R})$”, *Izvestiya: Mathematics*, 2022, vol. 86, no. 1, pp. 203–219. doi: 10.1070/IM9125 .

14. Volkov Yu. S. “A remark on the connection between the second divided difference and the second derivative”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 19–21. doi: 10.21538/0134-4889-2021-27-1-19-21 (in Russian).

15. Shevaldin V. T. “Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.

16. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and $\mathcal{L}$-splines”, *Izv. Math.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 201–224. doi: 10.4213/im193 .

17. Shevaldin V. T. “Extremal interpolation in the mean with overlapping averaging intervals and the smallest norm of a linear differential operator”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 219–232. doi: 10.21538/0134-4889-2023-29-1-219-232 (in Russian).

Получено: 26.11.2024
Принято в печать: 10.03.2025