

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130

О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана

М. Ш. Шабозов, Д. К. Тухлиев

Шабозов Мирганд Шабозович — доктор физико-математических наук, профессор, Таджикский национальный университет (г. Душанбе).

e-mail: shabozov@mail.ru

Тухлиев Дилшод Камаридинович — кандидат физико-математических наук, Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова (г. Худжанд).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Аннотация

В работе изучаются экстремальные задачи, связанные с наилучшим полиномиальным приближением аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 , с конечной нормой

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}, r \in \mathbb{Z}_+ \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

Доказана точная теорема между величиной наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_2$ и усреднённым с весом $\sin(\pi t/h)$ ($0 < h \leq \pi/n$) значением модуля непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ функций $f \in B_2^{(r)}$. Выясняется связь доказанной теоремы с поведением точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для модулей непрерывности $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$. Для класса функций $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, определённой заданной монотонно возрастающей мажорантой Φ , удовлетворяющей некоторым ограничениям, вычислены точные значения различных n -поперечников в пространстве B_2 .

Ключевые слова: модуль непрерывности, неравенства Джексона – Стечкина, n -поперечники, пространство Бергмана.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:

Шабозов, М. Ш., Тухлиев, Д. К. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 116–130.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130

On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space

M. Sh. Shabozov, D. K. Tukhliev

Shabozov Mirgand Shabozovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tajik National University (Dushanbe).

e-mail: shabozov@mail.ru

Tukhliyev Dilshod Kamaridinovich — candidate of physical and mathematical sciences, Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov (Khujand).

e-mail: dtukhliev@mail.ru

Abstract

The paper studies extremal problems related to the best polynomial approximation of functions that are analytic in the unit disk and belong to the Bergman space B_2 with a finite norm

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<1} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty.$$

Let

$$B_2^{(r)} := \left\{ f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty \right\}, r \in \mathbb{Z}_+ \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

An exact theorem is proved between the value of the best approximation $E_{n-1}(f)_2$ and the value of the modulus of continuity of the m th order $\sin(\pi t/h)$ ($0 < h \leq \pi/n$) of functions $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ averaged with the weight $f \in B_2^{(r)}$. The connection between the proven theorem and the behavior of exact constants in the Jackson-Stechkin inequality for moduli of continuity $\omega_m(f^{(r)}, t)_2$ is clarified. For the class of functions $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, given a given monotonically increasing moharant Φ , satisfying some restrictions, the exact values of various n -widths in B_2 space are calculated.

Keywords: modulus of continuity, Jackson – Stechkin inequalities, n -widths, Bergman space.

Bibliography: 24 titles.

For citation:

Shabozov, M. Sh., Tukhliev, D. K. 2025, “On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 116–130.

1. Введение и постановка задачи

Экстремальным задачам наилучшего полиномиального приближения аналитических в круге функций в различных нормированных пространствах посвящена обширная литература (см., например, работы [1-15] и приведенную там литературу). В данной работе мы решаем ряд экстремальных задач в пространстве Бергмана B_2 , являющихся продолжением недавно опубликованных работ [18, 20, 21].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, $\mathcal{A}(U)$ — множество функций, аналитических в круге U .

Говорят [10], что аналитическая в круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 < \rho \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Производную r -го порядка функции $f \in \mathcal{A}(U)$ определим, как обычно равенством

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad (f^{(0)} \equiv f),$$

где положено

$$\alpha_{k,r} := k!/(k-r)!, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k > r, \quad \alpha_{k,0} \equiv 1.$$

Символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in \mathcal{A}(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}$, которых также принадлежит B_2 :

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Величину

$$E_{n-1}(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_{n-1})_2 = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \},$$

где $\mathcal{P}_{n-1}$ — множество комплексных алгебраических многочленов степени $\leq n-1$, называют наилучшим среднеквадратическим полиномиальным приближением функции $f \in B_2$. Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (2)$$

где $S_{n-1}(f)$ — частичная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в виде

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho |f(\rho e^{it})|^2 d\rho dt \right)^{1/2}$$

и равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau \},$$

где

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$.

В [18] доказано, что для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) справедливо равенство

$$\omega_m^2(f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m, \quad (3)$$

а в [19] для $f \in B_2^{(r)}$ доказано неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)}), \quad (4)$$

которое для $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ обращается в равенство.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f \in B_2^{(r)}$ при любых $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $h \in (0, \pi/(n-r)]$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}. \quad (5)$$

Существует функция $f \in B_2$, для которой (5) обращается в равенство.

Доказательство. В силу определения модуля непрерывности (3), имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt \geq \\ & \geq 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt = \\ & = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k-r+1} \alpha_{k,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(k-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt = \\ & = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \varphi(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt. \quad (7)$$

Учитывая формулу (7), рассмотрим поведение функции φ при $x \geq n > r$. Дифференцируя функцию $\varphi(x)$, находим

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \left(\frac{2(x+1)-r}{(x+1)(x-r+1)} + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right) \times \\ & \quad \times \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \cdot \sin \frac{\pi}{h} t dt + \\ & \quad + \frac{x+1}{x-r+1} \alpha_{x,r}^2 \int_0^h \frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя тождество

$$\frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r)t)^m = \frac{t}{x-r} \cdot \frac{d}{dt} (1 - \cos(x-r)t)^m$$

и вычисляя интеграл во втором слагаемом равенстве (1) после некоторых простых вычислений и упрощений получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{x+1}{x-r+1} \cdot \alpha_{x,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(x-r)t)^m \left[\frac{2(x+1)-r}{2(x+1)(x-r+1)} + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) - \frac{1}{x-r} \cdot \left(1 + \frac{\pi t}{h} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{h} \right) \left. \right] \sin \frac{\pi t}{h} dt \geq 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция $\varphi(x)$ в области $x \geq n > r$ монотонно возрастает. Следовательно

$$\begin{aligned} \inf\{\varphi(x) : x \geq n > r\} &= \varphi(n) = \\ &= \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi t}{h} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (1), из (1) получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt \geq \\ &\geq 2^m \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \\ &= 2^m \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2 \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \cdot E_{n-1}^2(f)_2, \end{aligned}$$

откуда сразу следует соотношение

$$E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}$$

и неравенство (5) доказано.

Докажем точность неравенство (5) для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Так как для f_0 в силу равенств (2) и (3)

$$E_{n-1}^2(f_0)_2 = \frac{1}{n+1}, \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_2 = 2^m \frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)^m,$$

то мы запишем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{\int_0^h \omega_m^2(f_0^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ &= \frac{1}{2^m \alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n+1} \cdot \frac{2^m (\alpha_{n,r}^2 / (n-r+1)) \int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt}{\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ &= \frac{1}{n+1} = E_{n-1}^2(f_0)_2, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{2^m \alpha_{n,r}^2 [(n+1)/(n-r+1)] E_{n-1}^2(f)_2}{\int_0^h \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{h} t dt} = \\ = \left(\int_0^h (1 - \cos(n-r)t)^m \sin \frac{\pi}{h} t dt \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, из (1) при $h = \pi/(n-r)$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ вытекает равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{1/2}} = \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (11)$$

ТЕОРЕМА 2. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ имеет место равенство

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \quad (12)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f \in B_2$ справедливо неравенство [16]

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \cos kt \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \omega_m^{2/m}(f, t)_2. \quad (13)$$

Умножая обе стороны (13) на $\sin nt$ и интегрируя по отрезку $[0, \pi/n]$ по переменному t получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cdot \int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt \leq \\ \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как [17, с. 239]

$$\int_0^{\pi/n} \cos kt \sin ntdt \leq 0,$$

то из (14) следует, что

$$\frac{2}{n} \cdot E_{n-1}^2(f)_2 \leq \frac{1}{2} \cdot E_{n-1}^{2-2/m}(f)_2 \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt$$

или, что тоже

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \left(\frac{n}{4} \cdot \int_0^{\pi/n} \omega_m^{2/m}(f, t)_2 \sin ntdt \right)^{m/2}. \quad (15)$$

Заменяя в (15) функцию f на производную $f^{(r)}$ и число n на $n-r$, получаем

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leq \left(\frac{n-r}{4} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \quad (16)$$

Учитывая (16) и применяя неравенство (4), получаем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \cdot \alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}. \quad (17)$$

Так как неравенство (17) справедливо для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то из него следует оценка сверху для величины расположенной в левой части равенства (12):

$$\sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} \leq \frac{1}{2^{m/2}}. \quad (18)$$

С целью получения аналогичной оценки снизу введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$ для которой

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_m^2(f_0^{(r)}, t) = \frac{2^m \cdot \alpha_{n,r}}{n-r+1} \cdot (1 - \cos(n-r)t)^m,$$

$$\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2} = 2^{m/2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Пользуясь этими равенствами, запишем оценку снизу указанной величины

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} \geq \\ & \geq \frac{\alpha_{n,r} \cdot \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\frac{n-r}{2} \cdot \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{m/2}} = \frac{1}{2^{m/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Требуемое равенство (12) получаем из сопоставлении неравенств (18) и (19). Теорема 2 доказана.

2. Связь теоремы 1,2 с поведением точных констант в неравенстве Джексона-Стечкина для модуля непрерывности m -го порядка на классах $B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$

В этом пункте выясним связь результата теоремы 1,2 с исследованием поведения констант в неравенствах типа Джексона-Стечкина следующего вида

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \chi \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2. \quad (20)$$

Точнее, требуется найти точное значение величины

$$\chi_{n,r,m(\gamma)} := \chi_{n,r}(\omega_m, \gamma)_2 := \sup_{\substack{f \in B_2^{(r)} \\ f \notin \mathcal{P}_r}} \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} E_{n-1}(f)_2}{\omega_m(f^{(r)}, \gamma/(n-r))_2}, \quad (21)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f^{(0)} \equiv f$, $B_2^{(0)} \equiv B_2$, $\gamma \in (0, \pi]$.

Чтобы найти точное значение константы (21) или получить удовлетворительную оценку сверху константы χ в (20), воспользуемся неравенством

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left(\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt \right)^{1/2}, \quad (22)$$

вытекающим из соотношения (11) и верным для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Пользуясь свойством монотонности $\omega_m(f^{(r)}, t)$ из (2), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \times \\ &\times \left(\omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2 \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \sin(n-r)t dt \right)^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} \right)_2, \end{aligned} \quad (23)$$

и таким образом мы получили неравенство Джексона-Стечкина вида (20) с константой

$$\chi_{n,r,m}(\pi) \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (24)$$

Докажем, что если функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)$ на отрезке $[0, \pi/2(n-r)]$ удовлетворяет условию

$$\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} - t \right)_2 \leq 2 \omega_m(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2, \quad (25)$$

в частности, если она выпукла вверх на $[0, \pi/2(n-r)]$, то неравенство (2) можно уточнить. В этом случае справедливо следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. На множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2$ удовлетворяет условию (25), справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \omega_m \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)} \right)_2. \quad (26)$$

Доказательство. В самом деле, если функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)$ при всех $t \in [0, \pi/2(n-r)]$ удовлетворяет неравенству (24), то оценивая интеграл в правой части (2) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt = \\ &= \frac{n-r}{2} \left(\int_0^{\pi/2(n-r)} + \int_{\pi/2(n-r)}^{\pi/(n-r)} \right) \omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 \sin(n-r)t dt = \\ &= \frac{n-r}{2} \int_0^{\pi/2(n-r)} \left[\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 + \omega_m^2 \left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n-r} - t \right)_2 \right] \sin(n-r)t dt \leq \\ &\leq (n-r) \int_0^{\pi/2(n-r)} \omega_m^2(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2 \sin(n-r)t dt = \end{aligned}$$

$$= \omega_m^2(f^{(r)}, \pi/2(n-r))_2. \quad (27)$$

Подставляя полученную оценку (2) в (2), приходим к неравенству (26). Следствие 2 доказано.

В этом случае для константы Джексона-Стечкина имеет место оценка

$$\chi_{n,r,m}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{m+1}}{2^m}. \quad (28)$$

Вопрос о точности оценок (24) и (28) при всех $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ остаётся открытым. При $m = 1$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ оценка (28) является точной. Чтобы установить этот факт снова рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$. В силу равенств (2) и (3) (при $m = 1$), имеем

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}; \quad \omega_1(f_0^{(r)}, t)_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} (1 - \cos(n-r)t)^{1/2},$$

$$\omega_1\left(f_0^{(r)}, \frac{\pi}{2(n-r)}\right)_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}}.$$

Учитывая эти равенства, запишем оценки снизу

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{\alpha_{n,r} \sqrt{(n+1)/(n-r+1)} \cdot E_{n-1}(f_0)_2}{\omega_1(f_0^{(r)}, \pi/2(n-r))_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (29)$$

С другой стороны, из (28) при $m = 1$ следует, что

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (30)$$

Из сопоставления неравенств (29) и (30) получаем

$$\chi_{n,r,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad n > r.$$

Таким образом доказано, что на множестве функций $f \in B_2^{(r)}$, у которых функция $\omega_m^2(f^{(r)}, t)_2$ выпукла вверх, оценка (28) при любых $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ и $m = 1$ не улучшаема.

3. Точные значения n -поперечников классов функций $W_{2,m}^{(r)}(\Phi)$ в B_2

Прежде чем сформулировать остальные результаты, напомним необходимые в дальнейшем понятия и определения.

Пусть $S := \{\varphi : \|\varphi\|_2 \leq 1\}$ — единичный шар в B_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из B_2 , $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — n -мерное подпространство, $\mathcal{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|\varphi - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n \} : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|\varphi - \Lambda\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \{ \sup \{ \|\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, B_2) = \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|\varphi - \Lambda^\perp \varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в B_2 . Поскольку B_2 — гильбертово пространство, то между перечисленными величинами имеют место соотношения [22, 23]:

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2). \quad (31)$$

Отметим, что вычислению в пространстве B_2 точных значений n -поперечников классов аналитических в круге функций, определённых при помощи модулей непрерывности различных порядков и иных характеристик гладкости функций, посвящены работы [4, 5, 10–14, 18, 20, 21].

Пусть $\Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$ — есть непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Для любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in [0, 2\pi]$ определим в $B_2^{(r)}$ следующие классы функций:

$$W_{2,m}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t) \sin \frac{\pi t}{u} dt \leq \Phi^2(u) \right\}.$$

Положим ещё

$$(1 - \cos \theta)_* := \begin{cases} 1 - \cos \theta, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi; \\ 2, & \text{если } \theta > \pi. \end{cases}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. Для произвольного полинома $p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathcal{P}_n$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \cdot \|p_n\|_2^2. \quad (32)$$

Доказательство. Учитывая формулу (3) для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$, запишем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|a_k|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m = \\ &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \frac{k+1}{k-r+1} \alpha_{k,r}^2 \cdot \frac{|a_k|^2}{k+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \end{aligned} \quad (33)$$

Заметив, что

$$\max_{r+1 \leq k \leq n} \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 = \frac{n+1}{n-r+1} \alpha_{n,r}^2,$$

и при любых $t \geq 0$ и $r+1 \leq k \leq n$

$$(1 - \cos(k-r)t)^m \leq (1 - \cos(n-r)t)_*^m$$

из равенства (3) получаем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 &\leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \sum_{k=r+1}^n \frac{|a_k|^2}{k+1} = \\ &= 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)t)_*^m \cdot \|p_n\|_2^2, \end{aligned}$$

и неравенство (32) доказано.

ТЕОРЕМА 3. Пусть функция Φ при любых $\mu > 0$, $u \in (0, 2\pi]$ и $m \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos v)_* \sin \frac{v}{\mu} dv \leq 2\mu\Phi^2(u). \quad (34)$$

Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &= d_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) = E_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right), \end{aligned}$$

где

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_2 := \sup\{E_{n-1}(f)_2 : f \in \mathfrak{M}\},$$

а $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n -поперечников.

Доказательство. В силу определения класса $W_m^{(r)}(\Phi)_2$ из неравенства (17), получим оценку сверху всех перечисленных n -поперечников:

$$\begin{aligned} \lambda_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &\leq d_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) \leq E_{n-1}(W_m^{(r)}(\Phi))_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

С целью получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)_2$, в силу соотношения (31), достаточно оценить снизу бернштейновского n -поперечника. Для этого в подпространстве комплексных полиномов $p_n \in \mathcal{P}_n \cap B_2$ зафиксируем $(n+1)$ -мерный шар

$$S_{n+1} := \left\{ p_n : \|p_n\|_2 \leq \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}$$

и докажем, что $S_{n+1} \subset W_m^{(r)}(\Phi)_2$. Таким образом, требуется доказать, что для любого $p_n \in S_{n+1}$, $u \in (0, 2\pi]$ выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \Phi^2(u).$$

Для этого умножим обе части неравенства (32) на функцию $\frac{\pi}{2u} \sin \frac{\pi}{u} t$ и проинтегрируем по t на отрезке $[0, u]$, затем сделаем замену переменной $u = \mu\pi/(n-r)$ в правой части и заменяем норму полинома по формуле радиуса сферы S_{n+1} . В итоге после всех этих операций, с учётом (34), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2u} \int_0^u \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t)_2 \sin \frac{\pi}{u} t dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2u} \Phi^2\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \int_0^u (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{\pi}{u} t dt = \\ &= \frac{n-r}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\pi\mu/(n-r)} (1 - \cos(n-r)t)_* \sin \frac{(n-r)t}{\mu} dt = \\ &= \frac{1}{2\mu} \Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right) \int_0^{\mu\pi} (1 - \cos t)_* \sin \frac{t}{\mu} dt \leq \Phi^2(u) \end{aligned}$$

и тем самым включение $S_{n+1} \in W_m^{(r)}(\Phi)_2$ доказано. В силу определения бернштейновского n -поперечника, запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} b_n(W_m^{(r)}(\Phi)_2, B_2) &\geq b_n(S_{n+1}, B_2) = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}} \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right). \end{aligned} \quad (36)$$

Сопоставляя неравенства (3) и (3) с учётом соотношения (31), получим утверждение теоремы 3.

В завершении статьи отметим, что функция Φ , удовлетворяющая условию (34) существует [24]. Этому условию удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi^2}{8}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. —М.—Л.: Наука. 1964. 440 с.
2. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв.АН СССР, сер. матем. 1958. Т. 22. № 5. С.631-640.
3. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т.15. № 3. С.81-120.
4. Тайков Л. В. О наилучших линейных методах приближения функций классов $\mathcal{B}^r$ и H^r // УМН. 1963. Т.18. № 4. С.183-189.
5. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т.1. № 2. С.155-162.
6. Sheik J. T. Polynomial Approximation of functions analytic in a disc // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Т.17. № 6. С.1238-1243.
7. Белый В. И., Двейрин М. З. О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами. Метрические вопросы теории функций и отображений // Из-во, "Науково думка". 1971. вып.2. С.37-54.
8. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимация в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Наукова думка. Киев. 1983. С.63-73.
9. Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // УМН. 1990. Т.45. № 3. С.197-198.
10. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т.57. № 1. С.30-39.
11. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т.65. № 2. С.186-193.
12. Вакарчук С. Б., Забутная В. И. О наилучших линейных методах приближений функций классов Л. В. Тайкова в пространствах Харди $H_{q,\rho}$ $q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$ // Матем. заметки. 2009. Т.85. № 3. С.323-329.

13. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сборник. 2010. Т. 201. № 8. С. 3-22.
14. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Сиб. мат. журнал. 2019. Т. 60. № 6. С. 1414-1423.
15. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А., Заргаров Дж. Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Труд. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 239-254.
16. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43. № 1. С. 125-129.
17. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. — М.: Наука. 1976. 320 с.
18. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 3. С. 435-446.
19. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n -поперечников // Матем. заметки. 2018. Т. 103. № 4. С. 617-631.
20. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Матем. 2020. № 2. С. 74-92.
21. Хуромонов Х. М. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Известия вузов. Матем. 2023. № 5. С. 71-81.
22. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. — Berlin: Springer. 1985. 312 p.
23. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — МГУ. 1976. 325 с.
24. Айнуллоев Н. Значение поперечников некоторых классов дифференцируемых функций в L_2 // Докл. АН ТаджССР. 1984. Т. 29. № 8. С. 415-418.

REFERENCES

1. Smirnov, V. I., Lebedev, N. A. 1964, "Constructive theory of functions of complex analysis". — Moscow; Leningrad: Nauka, 440 p.
2. Babenko, K. I. 1958, "On the best approximations of one class of analytic functions", *Izvestiya Academy Nauk SSSR*, vol. 22, no. 5, pp. 631-640.
3. Tikhomirov, V. M. 1960, "Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations", *UMN*, vol. 15, no. 3, pp. 81-120.
4. Taikov, L. V. 1963, "On the best linear methods for approximating functions of the classes $\mathcal{B}^r$ and H^r ", *UMN*, vol. 18, no. 4, pp. 183-189.
5. Taikov, L. V. 1967, "Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions", *Math. Notes*, vol. 1, no. 2, pp. 155-162.

6. Sheik, J. T. 1966, "Polynomial Approximation of functions analytic in a disc", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 17, no. 6, pp. 1238-1243.
7. Belyi, V. I., Dvejrín, M. Z. 1971, "On the best linear approximation methods on classes of functions defined by allied kernels. Metric questions in the theory of functions and mappings", *Publ. "Naukovo dumka"*, vol. 2, pp. 37-54.
8. Dvejrín, M. Z., Chebanenko, I. V. 1983, "On polynomial approximation in Banach spaces of analytic functions", *Map theory and function approximation. Naukovo dumka. Kyiv.*, pp. 63-73.
9. Farkov, Yu. A. 1990, "Diameters of the Hardy and Bergman classes in a ball of $\mathbb{C}^n$ ", *UMN*, vol. 45, no. 3, pp. 197-198.
10. Vakarchuk, S. B. 1995, "Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk", *Math. Notes*, vol. 57, no. 1, pp. 30-39.
11. Vakarchuk, S. B. 1999, "On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions", *Math. Notes*, vol. 65, no. 2, pp. 186-193.
12. Vakarchuk, S. B., Zabutnaya, V. I. 2009, "Best Linear Approximation Methods for Functions of Taikov Classes in the Hardy spaces $H_{q,\rho}$ $q \geq 1, 0 < \rho \leq 1$ ", *Math. Notes*, vol. 85, no. 3, pp. 323-329.
13. Vakarchuk, S. B., Shabozov, M. Sh. 2010, "The widths of classes of analytic functions in a disc", *Sb. Math.*, vol. 201, no. 8, pp. 3-22.
14. Shabozov, M. Sh., Langarshoev, M. R. 2019, "Best linear approximation methods for some classes of analytic functions on the unit disk", *Siberian Math. J.*, vol. 60, no. 6, pp. 1414-1423.
15. Shabozov, M. Sh., Yusupov, G. A., Zargarov, J. J. 2021, "On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces", *Trudy IMM Uro RAN.*, vol. 27, no. 4, pp. 239-254.
16. Shalaev V. V. 1991, "On the cross-sections in L_2 of classes of differentiable functions defined by higher-order continuity modules", *Ukrainian Math. J.*, vol. 43, no. 1, pp. 125-129.
17. Korneychuk, N. P. 1976, "Extremal problems approximation theory", *Moscow.: Nauka.* 320 p.
18. Shabozov, M. Sh. 2023, "On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space B_2 ", *Math. Notes*, vol. 114, no. 3, pp. 435-446.
19. Shabozov, M. Sh., Saidusajnov, M. S. 2018, "Upper Bounds for the Approximation of Certain Classes of Functions of a Complex Variable by Fourier Series in the Space L_2 and n -Widths", *Math. Notes*, vol. 103, no. 4, pp. 617-631.
20. Shabozov, M. Sh., Khuromonov, Kh. M. 2020, "On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in the Bergman space", *Russian Math. (Iz. VUZ).*, no. 2, pp. 74-92.
21. Khuromonov, Kh. M. 2023, "On the best joint approximation of functions in Bergman space B_2 ", *Russian Math. (Iz. VUZ).*, no. 5, pp. 71-81.
22. Pinkus, A. 1985, " n -Widths by Approximation Theory", —Berlin: Springer. 312 p.

23. Tikhomirov, V. M. 1976, "Some questions of approximation theory", —*Moscow State University* 325 p.
24. Ainulloev, N. 1984, "The value of the diameters of some classes of differentiable functions in L_2 ", *Doklady AN TajSSR.*, vol. 29, no. 8, pp. 415-418.

Получено: 22.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025