

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-99-115

Гладкое многообразие сдвинутых решёток¹

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва,
Н. М. Добровольский

Смирнова Елена Николаевна — Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).

e-mail: helenash@mail.ru

Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, Российский технологический университет МИРЭА (г. Москва).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В предыдущей работе авторов заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрен случай произвольных многомерных решёток.

В данной статье рассмотрен общий случай сдвинутых многомерных решёток.

Отметим, что геометрия метрического пространств многомерных решёток гораздо сложнее, чем геометрия обычного евклидова пространства. Это видно из парадокса неаддитивности длины отрезка в пространстве сдвинутых одномерных решёток. Из наличия этого парадокса следует, что стоит открытой проблема описания геодезических линий в пространствах многомерных решёток, а также в нахождении формулы для длины дуг линий в этих пространствах. Естественно, что было бы интересно не только описание этих объектов, но и получение теоретико-числовой интерпретации этих понятий.

Дальнейшим направлением исследований может быть изучение аналитического продолжения гиперболической дзета-функции на пространствах сдвинутых многомерных решёток. Как известно, аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки построено для произвольной декартовой решётки. Не изучен даже вопрос о непрерывности этих аналитических продолжений в левой полуплоскости на пространствах решёток. Всё это, на наш взгляд, актуальные направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: алгебраические решётки, метрическое пространство решёток.

Библиография: 25 названий.

¹Работа выполнена по гранту РФФИ № 23-21-00317 «Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе»

Для цитирования:

Смирнова, Е. Н., Пихтилькова, О. А., Добровольский, Н. Н., Реброва, И. Ю., Добровольский, Н. М. Гладкое многообразие сдвинутых решёток // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 99–115.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-99-115

Smooth variety of lattices

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Smirnova Elena Nikolaevna — Orenburg State University (Orenburg).

e-mail: helenash@mail.ru

Pikhtilkova Olga Alexandrovna — candidate of physics and mathematics sciences, docent, Russian technological University MIREA (Moscow).

e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, Tula State University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

In the previous work of the authors, the foundations of the theory of smooth manifolds of number-theoretic lattices were laid. The case of arbitrary multidimensional lattices was considered.

This article considers the general case of shifted multidimensional lattices.

Note that the geometry of the metric spaces of multidimensional lattices is much more complicated than the geometry of ordinary Euclidean space. This is evident from the paradox of non-additivity of the length of a segment in the space of shifted one-dimensional lattices. From the presence of this paradox it follows that the problem of describing geodesic lines in spaces of multidimensional lattices remains open, as well as finding a formula for the length of arcs of lines in these spaces. Naturally, it would be interesting not only to describe these objects, but also to obtain a number-theoretic interpretation of these concepts.

A further direction of research may be the study of the analytic continuation of the hyperbolic zeta function on the spaces of shifted multidimensional lattices. As is known, the analytic continuation of the hyperbolic zeta functions of lattices are constructed for an arbitrary Cartesian lattice. Even the question of the continuity of these analytical continuations in the left half-plane on the space of lattices has not been studied. All of these, in our opinion, are relevant directions for further research.

Keywords: algebraic lattices, a metric space lattices.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

Smirnova, E. N., Pikhtilkova, O. A., Dobrovol'skii, N. N., Rebrova, I. Yu., Dobrovol'skii, N. M. 2025, "Smooth variety of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 99–115.

1. Введение

В предыдущих работах авторов [20]–[22] заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток. Рассмотрены: простейший случай одномерных решёток, случай одномерных сдвинутых решёток и случай произвольных многомерных решёток.

Как известно (см. [14], стр. 165), множество всех s -мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) = \ln(1 + \max(\mu, \nu)), \quad (1)$$

где

$$\mu = \inf_{\Gamma=A \cdot \Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda=B \cdot \Gamma} \|B - I\|.$$

Целью данной работы является рассмотрение общего случая гладкого многообразия сдвинутых многомерных решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geq 1$, $\mathfrak{M}_s(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка s , а $\mathfrak{M}_s^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Метрики на пространстве сдвинутых решёток

Обозначим через CPR_s множество всех сдвинутых решёток

$$\Lambda(\vec{x}) = \Lambda + \vec{x},$$

где $\Lambda \in PR_s$ — произвольная s -мерная вещественная решётка и $\vec{x} \in R^s$ — произвольный вектор.

Из свойств решётки непосредственно вытекает, что $\Lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \Lambda(\vec{x})$ для любого $\vec{y} \in \Lambda$.

Приведём без доказательства несколько лемм и теорем из монографии [7].

ЛЕММА 1. Если

$$\Lambda_1 + \vec{x}_1 = \Lambda_2 + \vec{x}_2, \quad (2)$$

то $\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \Lambda_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 59. $\square$

Для задания структуры метрического пространства на множестве CPR_s определим для произвольного $a \neq 0$ вложение

$$\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$$

следующим образом.

Пусть $\Lambda \in PR_s$, $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$ ($j = 1, 2, \dots, s$) — ее базис и $\vec{x} = (x_1, \dots, x_s) \in R^s$ — произвольный вектор. решётку $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ зададим базисом $\vec{\lambda}'_j$ ($j = 1, \dots, s+1$), где $\vec{\lambda}'_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js}, 0)$ ($j = 1, 2, \dots, s$), $\vec{\lambda}'_{s+1} = (x_1, \dots, x_s, a)$.

ЛЕММА 2. Решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ или замены вектора $\vec{x}$ на $\vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \Lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 60. $\square$

Обозначим через $PR_{s+1}(a)$ множество всех решёток $\Lambda(a)$ таких, что для любой точки $\vec{x} \in \Lambda(a)$ имеем $x_{s+1} = n \cdot a$, $n \in \mathbb{Z}$ и найдется хотя бы одна ненулевая точка $\vec{x} \in \Lambda(a)$ такая,

что $x_{s+1} = a$. Будем говорить, что решётка $\Lambda(a)$ имеет канонический базис, если её базисная матрица имеет вид

$$A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}, n_1a)$ и $\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{21}, \dots, \lambda_{2s}, n_2a)$ два линейно независимых вектора и $n_1 = qn_2 + r$, $0 \leq r < |n_2|$, тогда вектора $\vec{\lambda}_2$ и $\vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_1 - q\vec{\lambda}_2 = (\lambda_{31}, \dots, \lambda_{3s}, ra)$ линейно независимы и справедливо равенство решёток $\Lambda(\vec{\lambda}_1, \vec{\lambda}_2) = \Lambda(\vec{\lambda}_3, \vec{\lambda}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\vec{\lambda}_1 = \vec{\lambda}_3 + q\vec{\lambda}_2$. Отсюда следуют утверждения леммы. $\square$

ЛЕММА 4. Любая решётка $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$ имеет канонический базис и является образом сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ при отображении $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть решётка $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$ имеет базис с базисной матрицей

$$B(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & \lambda_{s+11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & \lambda_{s+1s} \\ n_1a & \dots & n_sa & n_{s+1}a \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можно считать, что все величины n_j неотрицательные ($j = 1, \dots, s+1$). Обозначим через $n(B(\Lambda(a)))$ минимальное значение ненулевых значений n_j . Без ограничения общности можно считать, что $n = n_{s+1}$. Ясно, что $n > 0$, так как в противном случае вектора $\vec{\lambda}_j$ ($j = 1, \dots, s+1$) были бы линейно зависимые.

Нетрудно видеть, что $(n_1, \dots, n_{s+1}) = 1$, так как иначе при $(n_1, \dots, n_{s+1}) = d > 1$ все точки решётки $\vec{x} \in \Lambda(a)$ будут иметь вид $x_{s+1} = nda$, $n \in \mathbb{Z}$, что противоречит определению решётки $\Lambda(a) \in PR_{s+1}(a)$. Отсюда следует, что найдутся целые $c_1, \dots, c_{s+1}$ такие, что $c_1n_1 + \dots + c_{s+1}n_{s+1} = 1$.

Пусть $n_j = q_jn + r_j$, $0 \leq r_j < n$ ($j = 1, \dots, s$), тогда по лемме 3 базисом решётки $\Lambda(a)$ будет система векторов $\vec{\lambda}'_j = \vec{\lambda}_j - q_j\vec{\lambda}_{s+1} = (\lambda_{j1} - q_j\lambda_{s+11}, \dots, \lambda_{js} - q_j\lambda_{s+1s}, r_ja)$, ($j = 1, \dots, s$), $\vec{\lambda}'_{s+1} = \vec{\lambda}_{s+1}$. Нетрудно видеть, что либо базисная матрица²

$$B'(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}'_1{}^\top & \dots & \vec{\lambda}'_{s+1}{}^\top \end{pmatrix}$$

задает канонический базис в случае $r_1 = \dots = r_s = 0$, тогда обязательно $n = n_{s+1} = 1$, либо величина $n(B'(\Lambda(a))) < n(B(\Lambda(a)))$. Отсюда следует, что, повторяя конечное число раз операцию приведения базисной матрицы, мы придём к базисной матрице, задающей канонический базис. $\square$

Из доказанной леммы следует, что каждая решётка из $PR_{s+1}(a)$ является образом сдвинутой решётки при отображении $\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$. Следовательно, можно рассмотреть обратное отображение

$$\varphi_a^{-1} : PR_{s+1}(a) \rightarrow CPR_s.$$

ЛЕММА 5. Решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ определена однозначно и не зависит от выбора базиса $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ или замены вектора $\vec{x}$ на $\vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{y} \in \Lambda$.

²Здесь и далее $\vec{x}^\top$ обозначает вектор-столбец, а $A^\top$ — транспонированную матрицу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 60. $\square$

Теперь для любого $a \neq 0$ на пространстве CPR_s можно задать метрику $\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y})$ с помощью вложения φ_a и метрики $\rho(\cdot, \cdot)$ на пространстве PR_{s+1} равенством

$$\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y}) = \rho(\varphi_a(\Lambda + \vec{x}), \varphi_a(\Gamma + \vec{y})). \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Функция $\rho_a(\Lambda + \vec{x}, \Gamma + \vec{y})$ задает метрику на пространстве CPR_s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 61–62. $\square$

После введения метрики на пространстве сдвинутых решёток сразу возникает вопрос о вычислении расстояния между двумя сдвигами одной и той же решётки. Второй естественный вопрос: как согласована метрика в пространстве сдвинутых решёток с уже имеющейся метрикой на подпространстве решёток. Перейдем к решению этих вопросов.

ЛЕММА 6. Если решётка $\Lambda \in PR_s$ задана s -мерной невырожденной матрицей $A : \Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s$, то решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ переводится в решётку $\varphi_a(\Lambda + \vec{y})$ линейным преобразованием с блочной матрицей

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & \frac{y_1 - x_1}{a} \\ & \vdots \\ & \frac{y_s - x_s}{a} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где I — единичная s -мерная матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 63. $\square$

Лемма 6 допускает простое обобщение.

ЛЕММА 7. Если решётки Λ и $\Gamma \in PR_s$ заданы s -мерными невырожденными матрицами A и B , соответственно:

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}^s,$$

то решётка $\varphi_a(\Lambda + \vec{x})$ переводится в решётку $\varphi_a(\Gamma + \vec{y})$ линейным преобразованием с блочной матрицей

$$C(A, B, \vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & (\vec{z})_1 \\ & \vdots \\ & (\vec{z})_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{где } \vec{z} = \frac{-BA^{-1}\vec{x} + \vec{y}}{a}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 64. $\square$

Рассмотрим множество блочных матриц $\mathfrak{MP}_{s+1}$, заданное равенством

$$\mathfrak{MP}_{s+1} = \left\{ M \left| M \in \mathfrak{M}_{s+1}(\mathbb{R}), M = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} \right. \right\},$$

где невырожденная матрица $M = M(M_1, \vec{z})$ имеет вид

$$M(M_1, \vec{z}) = \begin{pmatrix} & (\vec{z})_1 \\ & \vdots \\ & (\vec{z})_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M_1 \neq 0, \quad M_1 \in \mathfrak{M}_s^*(\mathbb{R}), \quad \vec{z} \in \mathbb{R}^s.$$

Ясно, что $I_{s+1} \in \mathfrak{MP}_{s+1}$. Нам также потребуется множество $\mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ прямоугольных матриц порядка $s \times (s+1)$ таких, что любая матрица $M \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ будет иметь вид $M = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$, где $M_2 = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что задано отображение $\sigma : \mathfrak{MP}_{s+1} \rightarrow \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ по формуле $\sigma(M) = M_2 = (m_{2ij})_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s+1}$. Обратное преобразование $\sigma^{-1} : \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R}) \mathfrak{MP}_{s+1} \rightarrow \mathfrak{MP}_{s+1}$ задаётся для матрицы $M_2 = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ равенством

$$\sigma^{-1}(M_2) = \begin{pmatrix} M_1 & \vec{z} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}.$$

Пространство $\mathfrak{M}_{s \times (s+1)}(\mathbb{R})$ является нормированным вещественным пространством размерности $s^2 + s$ с нормой

$$\|M_2\| = (s+1) \cdot \max_{1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s+1} |m_{2ij}|.$$

Следовательно и пространство $\mathfrak{MP}_{s+1}$ является нормированным вещественным пространством размерности $s^2 + s$.

ЛЕММА 8. *Для любой матрицы $M \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ пространство решёток $PR_{s+1}(a)$ переходит в себя под действием линейного преобразования с матрицей M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\Lambda(a)$ произвольная решётка из $PR_{s+1}(a)$ с базисной матрицей

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix}, \quad A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{s1} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{1s} & \dots & \lambda_{ss} & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & A(\Lambda) & & \vdots \\ & & & x_s \\ 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix},$$

тогда

$$M \cdot A(\Lambda(a)) = \begin{pmatrix} & (M_1 \cdot \vec{x})_1 + a \cdot (\vec{z})_1 \\ M_1 \cdot A(\Lambda) & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & (M_1 \cdot \vec{x})_s + a \cdot (\vec{z})_s \\ & & & a \end{pmatrix},$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Для дальнейшего нам потребуется общее свойство метрики на PR_s , позволяющее, в принципе, за конечное число операций вычислять расстояние между двумя решётками, заданными своими базисными матрицами. Обозначим через $U_s(\rho)$ множество матриц W из $SL_s(\mathbb{Z})$ с $\|W\| \leq \rho$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть решётки Λ и Γ заданы своими матрицами A и B , соответственно:*

$$\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s, \quad \Gamma = B \cdot \mathbb{Z}^s,$$

и величины μ_1 и ν_1 вычисляются по формулам:

$$\mu_1 = \|B^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot (\|BA^{-1} - I\| + 1),$$

$$\nu_1 = \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \cdot (\|AB^{-1} - I\| + 1),$$

тогда

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \mu), \ln(1 + \nu)) \leq$$

$$\leq \max(\ln(1 + \|BA^{-1} - I\|), \ln(1 + \|AB^{-1} - I\|)),$$

где

$$\mu = \min_{W \in U_s(\mu_1)} \|BWA^{-1} - I\|, \quad \nu = \min_{W \in U_s(\nu_1)} \|AWB^{-1} - I\|,$$

и найдутся матрицы $A(\Lambda, \Gamma)$, $B(\Lambda, \Gamma)$ такие, что

$$\Gamma = A(\Lambda, \Gamma) \cdot \Lambda, \quad \Lambda = B(\Lambda, \Gamma) \cdot \Gamma,$$

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1 + \|A(\Lambda, \Gamma) - I\|), \ln(1 + \|B(\Lambda, \Gamma) - I\|)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 65, 66. $\square$

Теорема 2 позволяет решить вопрос о вычислении расстояния между сдвинутыми решётками в ε -окрестности для достаточно малого ε . Для этого прежде всего введем следующие обозначения.

Пусть $M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц A порядка s с операторной нормой $\|A\| = s \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s} |a_{ij}| \leq \varepsilon$.

Так как при $0 < \varepsilon < 1$ для любого $A \in M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$ матрица $I + A$ обратима и

$$(I + A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots = I + A^*, \quad \|A^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

то при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц A порядка s таких, что $\|A\| \leq \varepsilon$ и $\|A^*\| \leq \varepsilon$, где $A^* = (I + A)^{-1} - I$. Из определения следует, что $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}) \subset M_{s,\varepsilon}(\mathbb{R})$.

Как обычно, для любого действительного числа x расстояние до ближайшего целого обозначается через $\|x\|$. Эта величина выражается через дробную часть x по формуле

$$\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\}).$$

Непрерывная периодическая функция $\|x\|$ задает метрику на окружности $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ единичной длины. Аналогично, на s -мерном торе $T^s = \mathbb{R}^s/\mathbb{Z}^s$ можно задать метрику

$$\rho((\vec{x}), (\vec{y})) = \max_{1 \leq j \leq s} \|x_j - y_j\|,$$

где через $(\vec{x})$ обозначена сдвинутая фундаментальная решётка $\vec{x} + \mathbb{Z}^s$ — класс эквивалентности, порожденный точкой $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$. Окрестность радиуса ε точки $(\vec{x})$ на T^s обозначим через

$$T^s(\vec{x}, \varepsilon) = \{(\vec{y}) \mid \max_{1 \leq j \leq s} \|x_j - y_j\| \leq \varepsilon\}.$$

Рассмотрим наряду с решёткой Λ ее взаимную решётку

$$\Lambda^* = \{\vec{x} \mid (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}, \vec{y} \in \Lambda\}.$$

Как известно, если

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix}$$

— матрица из базисных векторов $\vec{\lambda}_j = (\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{js})$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11}^* & \dots & \lambda_{1s}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1}^* & \dots & \lambda_{ss}^* \end{pmatrix}$$

— матрица из базисных векторов $\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{1j}^*, \dots, \lambda_{sj}^*)$ взаимного базиса взаимной решётки Λ^* , который определяется условием

$$(\vec{\lambda}_j, \vec{\lambda}_j^*) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Определим величину

$$M(\Lambda) = \min_{\Lambda = A^T \cdot \mathbb{Z}^s} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$$

которую по аналогии с мерой обусловленности системы линейных уравнений будем называть мерой обусловленности решётки. В силу дискретности специальной группы $SL_s(\mathbb{Z})$ существует матрица $A(\Lambda)$ такая, что $\Lambda = A(\Lambda)^T \cdot \mathbb{Z}^s$ и $M(\Lambda) = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A(\Lambda)^{-1}\|$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$ и отображение ψ_Λ задано на $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу

$$\psi_\Lambda(B) = (I + B) \cdot \Lambda, \quad B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Gamma) \leq \delta\},$$

и для любого $B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)),$$

где $B^* = (I + B)^{-1} - I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 68, 69. $\square$

ЛЕММА 9. Для меры обусловленности решётки $\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}) \in PR_{s+1}$, где $\vec{x} \in [0; 1]^s$ справедливо неравенство

$$M(\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x})) \leq (s + 1)^2 \cdot \max\left(\frac{M(\Lambda)}{s}, 1, \frac{\|A(\Lambda)\|}{a}, \frac{M(\Lambda) \cdot a}{s \cdot \|A(\Lambda)\|}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 69, 70. $\square$

При фиксированных $\Lambda \in PR_s$, $\vec{x} \in G_s$ и $a > 0$ на декартовом произведении $M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}) \times T^s(\vec{0}, \varepsilon)$ зададим отображение $\Theta_{\Lambda, \vec{x}}$ в CPR_s по правилу

$$\Theta_{\Lambda, \vec{x}}(B, \vec{y}) = (I + B) \cdot (\Lambda + A(\Lambda) \cdot (\vec{x} + \vec{y})),$$

$$B \in M_{s,\varepsilon}^*(\mathbb{R}), \quad \vec{y} \in T^s(\vec{0}, \varepsilon).$$

Через $U(\Lambda + \vec{z}, \delta)$ обозначим δ – окрестность сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{z}$:

$$U(\Lambda + \vec{z}, \delta) = \{\Gamma + \vec{w} \in CPR_s \mid \rho_\alpha(\Lambda + \vec{z}, \Gamma + \vec{w}) \leq \delta\}.$$

Зададим две блочные вещественные квадратные матрицы порядка $s + 1$ формулами

$$C(B, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & & z_1 \\ & I + B & \vdots \\ & & z_s \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_s)^T = \frac{(I + B) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}}{a},$$

$$C^*(B, \vec{y}) = \begin{pmatrix} & & w_1 \\ & (I + B)^{-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w} = (w_1, \dots, w_s)^T = -\frac{(I + B)^{-1} \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}}{a}.$$

ТЕОРЕМА 4. При

$$0 < \varepsilon < \frac{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2 \cdot (s+1) \|A(\Lambda)\|}\right)}{3 \cdot M(\varphi_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}))}$$

справедливы вложения

$$\begin{aligned} U(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, \delta_1) &\subset \Theta_{\Lambda, \vec{x}}(M_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R}) \times T^s(\vec{0}, \varepsilon)) \subset \\ &\subset U(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, \delta_2) \end{aligned}$$

для любых δ_1 и δ_2 , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq \ln \left(1 + \min \left(\frac{(s+1) \cdot s \cdot a}{\|A(\Lambda)\|}, \frac{(s+1) \cdot a}{\|A(\Lambda)\| + a}, \frac{(s+1) \cdot \varepsilon}{\|2 \cdot a \cdot A(\Lambda)^{-1}\|} \right) \right), \\ \delta_2 &\geq \ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\varepsilon}{s}, \frac{\|A(\Lambda)\|}{a} \cdot (\varepsilon + \varepsilon^2) \right) \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &\rho_a(\Lambda + A(\Lambda) \cdot \vec{x}, (I + B) \cdot (\Lambda + A(\Lambda) \cdot (\vec{x} + \vec{y}))) = \\ &= \max \left(\ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\|B\|}{s}, \frac{\|(I + B) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}\|}{a} \right) \right) \right), \\ &\ln \left(1 + (s+1) \max \left(\frac{\|B^*\|}{s}, \frac{\|(I + B^*) \cdot A(\Lambda) \cdot \vec{y}\|}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], стр. 71–75. $\square$

Обозначим через $DM_{s, \varepsilon}(\mathbb{R})$ множество всех диагональных матриц $D(d_1, \dots, d_s)$ с

$$\|D(d_1, \dots, d_s)\| \leq \varepsilon,$$

а через $DM_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$ — множество всех диагональных матриц $D(d_1, \dots, d_s)$ с

$$\|D(d_1, \dots, d_s)\| \leq \varepsilon, \quad \text{и} \quad \left\| D \left(\frac{-d_1}{1+d_1}, \dots, \frac{-d_s}{1+d_s} \right) \right\| \leq \varepsilon.$$

Так как $DM_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$ — компактное подмножество множества $M_{s, \varepsilon}^*(\mathbb{R})$, а $T^s(0, \varepsilon)$ — компактное подмножество тора, то для любой сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x}$ ее замкнутая ε — окрестность траектории $D_s(\mathbb{R}) \cdot (\Lambda + \vec{x})$ при достаточно малом ε будет полным метрическим пространством.

3. Топология на пространстве сдвинутых решёток

Пусть $s \geq 2$. Рассмотрим пространство CPR_s всевозможных сдвинутых полных вещественных решёток $\Lambda + \vec{x}$ в вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^s$. Таким образом, произвольная сдвинутая решётка $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ имеет базис $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ решётки Λ , где вектора $\vec{\lambda}_1, \dots, \vec{\lambda}_s$ образуют линейно независимую систему векторов. Обозначим через $A(\Lambda)$ базисную матрицу решётки Λ :

$$A(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix},$$

тогда любая решётка Λ с базисной матрицей $A(\Lambda)$ получается из фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ с помощью линейного преобразования с матрицей $A(\Lambda)$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda), \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_s) = (m_1, \dots, m_s) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} \in \Lambda, \quad \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s.$$

Образ сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ при отображении $\varphi_a : CPR_s \rightarrow PR_{s+1}$ задается базисной матрицей $A(\Lambda, \vec{x})$:

$$A(\Lambda, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} & 0 \\ x_1 & \dots & x_s & a \end{pmatrix}, \quad \varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A(\Lambda, \vec{x}) = A(\Lambda, \vec{x})^\top \cdot \mathbb{Z}^{s+1}.$$

Хорошо известно, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^{s+1}$ имеет при $s \geq 1$ бесконечно много различных базисов, задаваемых базисными матрицами M из расширенной специальной линейной группы целочисленных матриц порядка $s+1$: $SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$. Расширенная специальная линейная группа целочисленных матриц порядка $s+1$ состоит из всех целочисленных матриц M порядка $s+1$ с $\det M = \pm 1$. Отсюда следует, что все базисные матрицы образа сдвинутой решётки $\Lambda + \vec{x}$ выражаются через любую базисную матрицу $A(\Lambda, \vec{x})$ и матрицу перехода $M \in SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$ по формулам $A_1(\Lambda, \vec{x}) = M \cdot A(\Lambda, \vec{x})$.

Будем говорить, что для произвольного $\mu > 0$, $\mu < 1$ множество $\mathbb{L}_\mu(M + \vec{y})$ сдвинутых решёток $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ является *открытой μ -окрестностью* сдвинутой решётки $M + \vec{y} \in CPR_s$, если оно состоит из всех сдвинутых решёток

$$\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \varphi_a(M + \vec{y}) \cdot B, \quad (3)$$

для которых невырожденная матрица $B \in \mathfrak{MP}_{s+1}$ удовлетворяет соотношению³

$$\|B - I_{s+1}\| < \mu. \quad (4)$$

Условие $\mu < 1$ гарантирует, что все матрицы B с условием (4) будут невырожденными (см. [14], стр. 158).

Нам потребуется величина $M(\Lambda + \vec{x})$, которая задается равенством

$$M(\Lambda + \vec{x}) = \min_{\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

³Матричная норма для $s+1$ -мерной матрицы $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq s+1}$ задается равенством $\|B\| = (s+1) \cdot \max_{1 \leq i, j \leq s+1} |b_{ij}|$.

и по аналогии с мерой обусловленности систем линейных уравнений называется мерой обусловленности сдвинутой решётки. В силу дискретности расширенной специальной линейной группы $SL_{s+1}^*(\mathbb{Z})$ целочисленных матриц порядка $s+1$ существует матрица $A(\Lambda + \vec{x})$ такая, что $\varphi_a(\Lambda + \vec{x}) = \mathbb{Z}^{s+1} \cdot A(\Lambda + \vec{x})$ и $M(\Lambda + \vec{x}) = \|A(\Lambda + \vec{x})\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda + \vec{x})\|$. Из равенства $I_{s+1} = A \cdot A^{-1}$ и неравенства $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ следует, что всегда $M(\Lambda + \vec{x}) \geq s+1$.

Пусть $MP_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$ — множество всех вещественных квадратных матриц B порядка $s+1$ из $\mathfrak{MP}_{s+1}$ с нормой $\|B\| < \varepsilon$ и при $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ через $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ обозначим множество всех вещественных матриц $B, B^* \in MP_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$, где $B^* = (I_{s+1} + B)^{-1} - I_{s+1}$. Согласно лемме 1 из монографии [14] (см. стр. 158) имеем $\|B^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$. Отсюда следует, что $MP_{s+1,\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}(\mathbb{R}) \subseteq MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda + \vec{x})}$ и отображение ψ_Λ задано на $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ по правилу

$$\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_{s+1} + B), \quad B \in MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R}),$$

тогда $\psi_\Lambda(B)$ — взаимнооднозначное отображение $MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ на $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon))$, где

$$U(\Lambda, \delta) = \{\Gamma \in PR_{s+1}(a) \mid \rho(\Lambda, \Gamma) \leq \delta\},$$

где метрика $\rho(\cdot, \cdot)$ задана равенством (1), и для любого $B \in MP_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \psi_\Lambda(B)) = \max(\ln(1 + \|B\|), \ln(1 + \|B^*\|)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7], теорема 19, стр. 68. $\square$

Очевидно, что $M_{s+1,\varepsilon}(\mathbb{R})$ и $M_{s+1,\varepsilon}^*(\mathbb{R})$ являются открытыми множествами в $s^2 + s$ -мерном вещественном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^{s^2+s}$, которое имеет естественную структуру евклидова пространства.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}_{s+1}$ всевозможных открытых μ -окрестностей всевозможных сдвинутых решёток $M + \vec{y} \in CPR_s$ с условием $\mu \leq \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda + \vec{x})}$. Так как, очевидно, что $\mathfrak{P}_{s+1}$ покрывает всё пространство s -мерных сдвинутых решёток CPR_s , то множество $\mathfrak{P}_{s+1}$ можно рассматривать как предбазу топологии $\mathfrak{T}_{s+1}$ на всём пространстве CPR_s . А именно, если множество $\mathfrak{B}_{s+1}$ получено из $\mathfrak{P}_{s+1}$ добавлением произвольных конечных пересечений его элементов, то $\mathfrak{B}_{s+1}$ будет базой топологии $\mathfrak{T}_{s+1}$, в которой всякое открытое множество $U \in \mathfrak{T}_{s+1}$ представимо как объединение открытых μ -окрестностей: существует некоторое множество A элементов из $\mathfrak{B}_{s+1}$ такое, что

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathfrak{B}_{s+1} : U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Таким образом, на CPR_s задана структура топологического пространства

$$T_{s+1} = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1}),$$

где $\mathfrak{T}_{s+1}$ — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство

$$T_{s+1} = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1})$$

имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ -окрестностей рациональных сдвинутых решёток M с рациональными μ , и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество CPQ_s всех рациональных сдвинутых решёток, т.е. сдвинутых решёток M с рациональной базисной матрицей $A(M)$ и с рациональным сдвигом $\vec{y}$.

Из предыдущего следует, что хаусдорфово топологическое пространство

$$CT_s = (CPR_s, \mathfrak{T}_{s+1})$$

является локально евклидовым пространством размерности $s^2 + s$.

4. Дифференцируемая структура на локально евклидовом пространстве

Рассмотрим произвольную сдвинутую решётку $\Lambda + \vec{x} \in CPR_s$ и открытое множество сдвинутых решёток $U(\Lambda + \vec{x}, \ln(1 + \varepsilon_{\Lambda+\vec{x}}))$, где $\varepsilon_{\Lambda+\vec{x}} = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda+\vec{x})}$. Взаимнооднозначное отображение $\psi_\Lambda(B) = \Lambda \cdot (I_s + B)$ переводит $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$ в $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$, а обратное отображение $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma) = A^{-1}(\Lambda)A(\Gamma) - I_s$ переводит $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ в $M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$. Согласно терминологии из монографии [23] (см. стр. 13) $\psi_\Lambda^{-1}(\Gamma)$ — координатное отображение, функции $x_i = r_i \circ \psi_\Lambda^{-1}$ — координатные функции, пара $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), \psi_\Lambda^{-1}$ (обозначаемую через $(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)), x_1, \dots, x_{s^2})$) — система координат. Нетрудно видеть, что началом данной системы координат является решётка Λ .

Мы имеем очевидное равенство

$$\bigcup_{\Lambda \in PR_s} U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) = PR_s.$$

Рассмотрим $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$.

Так как $\psi_\Lambda^{-1} : U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R})$, а $\psi_\Gamma : M_{s,\varepsilon_\Gamma}^*(\mathbb{R}) \mapsto U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$, то

$$\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma : \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) \mapsto M_{s,\varepsilon_\Lambda}^*(\mathbb{R}).$$

Из определения множеств $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda))$ и $U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ следует, что

$$U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \{\Delta \in PR_s \mid \rho(\Lambda, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Lambda), \rho(\Gamma, \Delta) \leq \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)\}.$$

Таким образом, если

$$\Delta \in U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)),$$

то $\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D$, $\Gamma = \Delta \cdot B_1$, $\Lambda = \Delta \cdot D_1$ и $\max(\|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Gamma$, $\max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|) \leq \varepsilon_\Delta$. Отсюда следует, что $B = I_s + C$, $B_1 = I_s + C_1$, $B \cdot B_1 \in SL_s^*(\mathbb{Z})$, $\|B \cdot B_1\| = \|I_s + C + C_1 + C \cdot C_1\|$, $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \leq 2\varepsilon_\Gamma + \varepsilon_\Gamma^2 \leq \frac{5}{4}$. Матрица $C + C_1 + C \cdot C_1$ — целочисленная, поэтому, если она ненулевая, то $\|C + C_1 + C \cdot C_1\| \geq s \geq 2$, что приводит к противоречию. Следовательно $B_1 = B^{-1}$. Аналогично получим, что $D_1 = D^{-1}$. Отсюда вытекает, что $\Gamma = \Lambda \cdot D \cdot B_1$, $\Lambda = \Gamma \cdot B \cdot D_1$ и

$$\begin{aligned} & U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) = \\ & = \{\Delta = \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D \mid \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Применяя ψ_Γ^{-1} к $U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma))$ получим

$$\begin{aligned} & \psi_\Gamma^{-1} \left(U(\Lambda, \ln(1 + \varepsilon_\Lambda)) \cap U(\Gamma, \ln(1 + \varepsilon_\Gamma)) \right) = \\ & = \{A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s \mid \Gamma \cdot B = \Lambda \cdot D, \|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Lambda, \|B - I_s\|, \|B_1 - I_s\| \leq \varepsilon_\Gamma\}. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B) - I_s) &= \psi_\Lambda^{-1}(\Gamma \cdot A^{-1}(\Gamma)A(\Gamma \cdot B)) = \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Gamma \cdot B)) = \\ &= \psi_\Lambda^{-1}(\mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)) = \psi_\Lambda^{-1}(\Lambda \cdot D) = A^{-1}(\Lambda)A(\Lambda \cdot D) - I_s. \end{aligned}$$

Для матриц D из малой окрестности единичной матрицей I_s введём обозначение $\varepsilon(D)$, где $\varepsilon(D) = \max(\|D - I_s\|, \|D^{-1} - I_s\|) = \max(\|D - I_s\|, \|D_1 - I_s\|)$.

ЛЕММА 10. Пусть $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda$, тогда справедливо неравенство

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)) \leq \frac{13}{18}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению матрицы $A(\Lambda)$ она удовлетворяет соотношениям $\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda)$ и $M(\Lambda) = \min_{\Lambda = \mathbb{Z}^s \cdot A} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \|A(\Lambda)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda)\|$. Аналогично, имеем $\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A(\Lambda \cdot D)$, $M(\Lambda \cdot D) = \min_{\Lambda \cdot D = \mathbb{Z}^s \cdot A \cdot D} \|A \cdot D\| \cdot \|(A \cdot D)^{-1}\| = \|A(\Lambda \cdot D)\| \cdot \|A^{-1}(\Lambda \cdot D)\|$. Для любой невырожденной матрице A имеем:

$$\begin{aligned} \|A \cdot D\| &= \|A + A \cdot (D - I_s)\| \leq \|A\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|(A \cdot D)^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A\| &= \|A \cdot D - A \cdot D \cdot (I_s - D_1)\| \leq \|A \cdot D\| \cdot (1 + \varepsilon(D)), \\ \|A^{-1}\| &= \|D_1 \cdot A^{-1} + (D - I_s) \cdot (A \cdot D)^{-1}\| \leq \|(A \cdot D)^{-1}\| \cdot (1 + \varepsilon(D)). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$M(\Lambda \cdot D) \leq \|A(\Lambda) \cdot D\| \cdot \|D_1 \cdot A^{-1}(\Lambda)\| \leq M(\Lambda) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Аналогично, имеем

$$M(\Lambda) \leq \|A(\Lambda \cdot D) \cdot D_1\| \cdot \|D \cdot A^{-1}(\Lambda \cdot D)\| \leq M(\Lambda \cdot D) \cdot (1 + \varepsilon(D))^2.$$

Отсюда следует, что

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq (2\varepsilon(D) + \varepsilon(D)^2) \min(M(\Lambda \cdot D), M(\Lambda)).$$

Так как $\varepsilon(D) \leq \varepsilon_\Lambda = \frac{1}{3 \cdot M(\Lambda)}$, то

$$|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)| \leq \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \cdot M(\Lambda)} \leq \frac{13}{18}.$$

Таким образом, неравенство для $|M(\Lambda \cdot D) - M(\Lambda)|$ доказано. $\square$

Из доказанной леммы мы получаем равенство $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma(B - I_s) = D - I_s$ и матрицы B и D связаны равенством $B = A^{-1}(\Gamma)A(\Lambda)D$. Так как матрицы B и D связаны линейным соотношением, то отображение $\psi_\Lambda^{-1} \circ \psi_\Gamma$ — бесконечно дифференцируемое и тем самым задано гладкое многообразие s -мерных решёток (см. [23], стр. 14).

5. Об основных функциях на решётках

К числу основных функций на решётках мы относим детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, меру обусловленности сдвинутой решётки, гиперболическую дзета-функцию решётки и гиперболическую дзета-функцию сдвинутой решётки.

Непрерывность детерминанта решётки очевидна и следует из равенства $\det \Lambda = |\det A(\Lambda)|$. Непрерывность гиперболического параметра решётки на метрическом пространстве решёток доказана в работе [24].

Непрерывность меры обусловленности сдвинутой решётки следует из леммы 10.

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки в правой полуплоскости $\sigma > 1$ доказана в работе [10].

И наконец, непрерывность гиперболической дзета-функции сдвинутой решётки доказана в работе [18].

Вопрос об их дифференцируемости мы рассмотрим в последующих статьях.

6. Заключение

В данной работе построено гладкое многообразие сдвинутых решёток. Несомненно, что открывается новое направление исследований, которое может дать много неожиданных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.
2. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.
3. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6089–84.
4. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНТИ 24.08.84. № 6091–84.
5. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНТИ 24.08.84, № 6090–84.
6. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10–15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54–80.
7. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.
8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова. О гиперболической дзета-функции Гурвица, Чебышевский сб., 2016, том 17, вып. 3, С. 72–105.
9. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.
10. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.
11. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.
12. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.
13. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

14. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.
15. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.
16. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.
17. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
18. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.
19. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.
20. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.
21. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных сдвинутых решёток // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 196–231.
22. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие решёток // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 299–301.
23. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.
24. Т. С. Шмелева. Непрерывность гиперболического параметра решеток // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2009. Вып. 3. С. 92–99.
25. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, M.: Science, 240 p.
2. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.
3. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, Dep. v VINITI, no. 6089–84.
4. Dobrovol'skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$ ”, Dep. v VINITI, no. 6091–84.
5. Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.

6. Dobrovolsky N. M. “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis”, Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54–80.
7. Dobrovol'skii, N. M. 2005, *Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya* [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.
8. N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, V. N. Soboleva, D. K. Sobolev, L. P. Dobrovol'skaya, O. E. Bocharova, 2016, “On hyperbolic Hurwitz zeta function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol 17, no. 3, P. 72–105.
9. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebroya I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights”, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.
10. Dobrovol'skij, N.M., Rebroya, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices“, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.
11. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross”, *Math. Notes*, 63:3 (1998), 319–324.
12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross”, *Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh*, p. 53.
13. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, “On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices”, *Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University*, p. 77–87.
14. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
15. A. N. Kormacheva, 2020, “Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.
16. Korobov, N.M. 1963, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.
17. Korobov, N.M. 2004, *Teoretiko-chislovye metody v priblizhenom analize* [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.
18. Rebroya, I. YU. 1998, “The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation“, *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.
19. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, “Algebraic lattices in the metric space of lattices”, *Chebyshev sb.*, vol. 18, no. 4, p. 326–338.
20. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebroya, N. M. Dobrovol'skii, 2020, “Smooth manifold of one-dimensional lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

-
21. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionova, L. D. Sitnikova, N. M. Dobrovol'skii, 2021, "Smooth manifold of one-dimensional shifted lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 196–231.
 22. E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2023, "Smooth diversity of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 299–310.
 23. Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M.: Mir, 1987. — 304 p.
 24. Shmeleva, T. S., 2009, "Continuity of the hyperbolic parameter of lattices", *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, Issue 3. pp. 92–99.
 25. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky, 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices". In: *Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*. Vol. 211. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено: 10.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025