

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-88-98

Оценки тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений

И. Ю. Реброва

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Аннотация

В 1963 году, опираясь на оценки специальных тригонометрических сумм, Хули впервые доказал асимптотическую формулу для среднего числа делителей квадратичного полинома со степенным понижением в остаточном члене по сравнению с главным. Позднее эти оценки были улучшены.

В работе доказываются новые, более сильные результаты в этом направлении исследований аналитической теории чисел.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, квадратичные сравнения.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:

Реброва, И. Ю. Оценки тригонометрических сумм по решениям квадратичных сравнений // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 88–98.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5+519.213

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-88-98

Estimates of trigonometric sums from solutions of quadratic congruences

I. Yu. Rebrova

Rebrova Irina Yurevna — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rebrova@tolstovsky.ru

Abstract

In 1963, relying on estimates of special trigonometric sums, Hawley first proved an asymptotic formula for the average number of divisors of a quadratic polynomial with a power-law reduction in the remainder term compared to the principal term. Later, these estimates were improved.

The paper proves new stronger results in this area of research in analytical number theory.

Keywords: trigonometric sums, quadratic congruences.

Bibliography: 12 titles.

For citation:

Rebrova, I. Yu. 2025, “Estimates of trigonometric sums from solutions of quadratic congruences”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 88–98.

Введение

Пусть d, q — натуральные числа и для целого a

$$\delta_q(a) = \frac{1}{q} \sum_{b(\bmod q)} e^{2\pi i \frac{ab}{q}} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0(\bmod q), \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0(\bmod q) \end{cases}$$

— символ Коробова. Далее, для целого m

$$S_d(q; m) = \sum_{b(\bmod 2q)} \delta_{4q}(b^2 - d) e^{2\pi i \frac{mb}{2q}}$$

— тригонометрическая сумма, ассоциированная со сравнением

$$b^2 - d \equiv 0(\bmod 4q); \quad b(\bmod q). \quad (1)$$

Начиная с этого момента и в дальнейшем d — отрицательное число и

$$d \equiv 0, 1(\bmod 4),$$

так как из сравнения (1) следует, что оно неразрешимо для $d \not\equiv 0, 1(\bmod 4)$.

В работе [1] впервые была получена оценка

$$\sum_{1 \leq q \leq P} S_d(q; m) \ll_{\varepsilon, d} P^{\frac{3}{4} + \varepsilon} + |m|^{\frac{4}{3} + \varepsilon}$$

для $d \equiv 0(\bmod 4)$ и всех целых $m \neq 0$. В [2], [3], [4] она была улучшена с

$$P^{\frac{2}{3} + \varepsilon} + P^{\frac{1}{2} + \varepsilon} |m|^{\frac{1}{4}} + |m|^{\frac{2}{3} + \varepsilon}$$

в правой части. Опираясь на методы, предложенные в вышеупомянутых работах, мы получаем новые результаты в этом направлении аналитической теории чисел.

Автор благодарит Быковского В. А. за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

1. Верхняя полуплоскость и бинарные положительно определенные квадратичные формы

Согласно традиционным обозначениям, $GL_2(\mathbb{R})$ — мультипликативная группа матриц вида

$$M = \begin{pmatrix} u & v \\ r & t \end{pmatrix} \quad (2)$$

с вещественными u, v, r, t и $\det(M) \neq 0$. Для таких матриц и любого комплексного числа

$$z = x + it, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

с $rz + t \neq 0$ выполняется равенство

$$\operatorname{Im} \left(\frac{uz + v}{rz + t} \right) = \det(M) \cdot \frac{\operatorname{Im} z}{|rz + t|^2}. \quad (3)$$

Группа $GL_2(\mathbb{R})$ действует слева на $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ посредством дробно-линейных преобразований

$$z \rightarrow Mz = \frac{uz + v}{rz + t}.$$

Левое действие означает, что для любых матриц M_1 и M_2 из $GL_2(\mathbb{R})$

$$(M_1 M_2)z = M_1(M_2 z) \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Из равенства (3) следует, что подгруппа

$$GL_2^{(+)}(\mathbb{R}) = \{M \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

действует на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}.$$

Так как матрицы $\pm M$ действуют на $\mathbb{H}$ одинаково, то их обычно отождествляют и работают с

$$PGL_2^{(+)}(\mathbb{R}) = GL_2^{(+)}(\mathbb{R}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответственно, для

$$SL_2(\mathbb{R}) = \{M \in PGL_2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\},$$

$$PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Инвариантные относительно действия $PSL_2(\mathbb{R})$ метрика ds^2 и мера $d\mu$ определяются по формулам

$$ds^2(z) = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad d\mu(z) = \frac{dx dy}{y^2}.$$

Четверка

$$(\mathbb{H}, PGL_2(\mathbb{R}), ds^2, d\mu)$$

— модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.

Положим для $d < 0$

$$\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \beta^2 - 4\alpha\gamma = d, \alpha > 0, \gamma > 0\}.$$

Элементы $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ параметризуют положительно определенные квадратичные формы

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

дискриминанта d . В дальнейшем

$$\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

— множество положительно определенных бинарных квадратичных форм дискриминанта d с целыми коэффициентами.

Группа $PSL_2(\mathbb{R})$ действует слева на $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d)$ по правилу

$$M : \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} \alpha(M) & \beta(M)/2 \\ \beta(M)/2 & \gamma(M) \end{pmatrix}.$$

Оно соответствует линейной замене переменных x и y для квадратичных форм

$$\begin{aligned} Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 &\rightarrow \\ \rightarrow MQ(x, y) = Q(ux + ry, vx + ty) = \alpha(M)x^2 + \beta(M)xy + \gamma(M)y^2 \end{aligned}$$

с матрицей M вида (2). При этом

$$M(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha u^2 + \beta uv + \gamma v^2, 2\alpha ur + \beta(ut + vr) + 2\gamma vt, \alpha r^2 + \beta rt + \gamma t^2).$$

В нашем случае $d < 0$ соответствие

$$(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow z = \frac{\beta}{2\gamma} + \frac{\sqrt{d}}{2\gamma}$$

определяет биекцию $\mathcal{P}_d : \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \rightarrow \mathbb{H}$ с обратной к ней

$$\mathcal{P}_d^{-1}(z) = \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, \sqrt{|d|} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}, \frac{\sqrt{|d|}}{2} \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right).$$

Пусть M матрица вида (2) и

$$Q(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \gamma(zx + y)(\bar{z}x + y).$$

Тогда

$$\begin{aligned} MQ(x, y) &= Q(ux + ry, vx + ty) = \\ &= \gamma(z(ux + ry) + vx + ty)(\bar{z}(ux + ry) + vx + ty) = \\ &= \gamma|rz + t|^2 (M(z)x + y)(\overline{M(z)}x + y) = \alpha(M)x^2 + \beta(M)xy + \gamma(M)y^2. \end{aligned}$$

Поэтому $\mathcal{P}_d(M(\alpha, \beta, \gamma)) = M(z)$. Следовательно, для любой матрицы M из $PSL_2(\mathbb{R})$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(d) \\ \mathcal{P}_d \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_d \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{M} & \mathbb{H} \end{array}$$

коммутативна.

2. Спектральная теория автоморфных функций

Подробности и ссылки по поводу приводимых ниже сведений можно найти в [5] и [6].

Группа $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ действует на функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} u & v \\ r & t \end{pmatrix} f(z) = f\left(\frac{uz + v}{rz + t}\right).$$

При этом

$$(M_1 M_2)f(z) = f(M_1 M_2(z)) = M_2(M_1 f)(z) \quad \forall M_1, M_2 \in PGL_2^{(+)}(\mathbb{R}).$$

Более удобно пользоваться обозначением

$$Mf(z) = (f|M)(z).$$

В таком случае,

$$(f|M_1 M_2)(z) = f(M_1 M_2(z)) = (f|M_1)M_2(z) = (f|M_1|M_2)(z).$$

То есть, мы определили правое действие $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ на функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

Пусть

$$\Delta = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

— дифференциальный оператор второго порядка. Для любой матрицы M из $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ и любой дважды дифференцируемой функции $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ по переменным x и y ($z = x + iy$) выполняется равенство

$$\Delta(f|M)(z) = (\Delta f)M(z). \quad (4)$$

Это означает, что Δ является $PGL_2^{(+)}(\mathbb{R})$ -инвариантным оператором.

Линейное пространство автоморфных функций относительно полной модулярной группы

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

состоит из всех функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$f|M = f \quad \forall M \in \Gamma.$$

Из (4) следует, что оператор Δ переводит автоморфные функции снова в автоморфные.

Обозначим через $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ фундаментальную область в $\mathbb{H}$ относительно Γ , состоящую из объединения двух множеств

$$\left\{ z \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 0, |z| > 1 \right\}, \left\{ z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}, |z| \geq 1 \right\} \quad (5)$$

Фундаментальность $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ означает, что внутренние области $M(\Gamma)$ по всем $M \in \Gamma$ не пересекаются и

$$\bigcup_{M \in \Gamma} M(\Gamma \backslash \mathbb{H}) = \mathbb{H}.$$

Пусть

$$\Gamma_z = \{ M \in \Gamma \mid M(z) = z \}$$

— стабилизатор точки $z \in \mathbb{H}$ в Γ . При этом

$$\Gamma_i = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

и для $\rho = \exp(\pi i/3) = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i$

$$\Gamma_\rho = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Для остальных $z \in \Gamma \backslash \mathbb{H}$ группа состоит из единичного элемента.

Множествам из (5) соответствуют подмножества из $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$, выделяемые парой условий

$$-c < b < 0 \text{ и } c < a, \quad 0 \leq b \leq c \text{ и } c \leq a.$$

В таком случае говорят, что форма $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ приведена. Таких форм конечное число и они составляют набор

$$(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{h(d)}, b_{h(d)}, c_{h(d)})$$

элементов из $\Gamma \setminus \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$, а $h(d)$ — число классов форм дискриминанта d , которое совпадает с числом точек из $\Gamma \setminus \mathbb{H}(d)$.

Определим на линейном пространстве Γ -автоморфных функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ линейный функционал

$$\Omega_d(f) = \left(\frac{4}{|d|}\right)^{1/4} \cdot \sum_{z \in \Gamma \setminus \mathbb{H}(d)} \frac{1}{|\Gamma z|} f(z).$$

На этом пространстве для любого натурального n действуют операторы Гекке $T(n)$ по формуле

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n_1 n_2 = n} \sum_{0 \leq m < n_2} f\left(\frac{n_1 z + m}{n_2}\right).$$

Они удовлетворяют соотношению мультипликативности

$$T(n_1)T(n_2) = \sum_{l \mid \text{НОД}(n_1, n_2)} T\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right),$$

из которого следует, что операторы Гекке коммутируют между собой.

3. Разложения по спектру Δ и их применения

Пусть $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ — гильбертово пространство, состоящее из Γ -автоморфных функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$\iint_{\Gamma \setminus \mathbb{H}} |f(z)|^2 \frac{dx dy}{y^2} < \infty$$

со скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle = \iint_{\Gamma \setminus \mathbb{H}} f(z) \overline{g(z)} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Обозначим через $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ линейное подпространство в $L_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, состоящее из функций f с

$$\int_0^1 f(x + iy) dx = 0$$

Из собственных функций оператора Δ в $L_2^{(0)}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ можно выбрать ортонормированный базис

$$u_1(z), u_2(z), \dots, u_j(z), \dots$$

с

$$\Delta u_j = \lambda_j u_j, \quad \frac{1}{4} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

При этом (см. по этому поводу [9])

$$\lambda_j = 12j + o(j), \quad j \rightarrow \infty.$$

Так как Δ коммутирует с операторами Гекке, то u_j можно считать собственными функциями последних и для них

$$T(n)u_j = \lambda_j(n)u_j, \tag{6}$$

при этом $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Гипотеза Рамануджана–Петерссона утверждает, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lambda_j(n) \ll_{\varepsilon} n^{\theta+\varepsilon} \quad (7)$$

с $\theta = 0$. Наилучшая на сегодняшний день оценка получена в [10] с

$$\theta = \frac{7}{64} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64}.$$

Ряды Эйзенштейна также являются собственными функциями операторов Гекке с

$$T(n)E(\dots; s) = \tau_s(n)E(\dots; s), \quad \tau_s(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^{s-\frac{1}{2}}.$$

В соответствии со стандартными обозначениями (см. [11])

$$K_s(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} t^{s-1} \exp \left(-\frac{z}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \right) dt$$

— функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя второго рода), экспоненциально убывающая при вещественном $z \rightarrow \infty$. Принимая во внимание равенство (периодичность по x с периодом 1)

$$u_j(z+1) = \left(u_j \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right) (z) = u_j(z),$$

и равенство (6), получим разложение в ряд Фурье по переменной x

$$u_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_j(n) \sqrt{y} K_{i\chi_j}(2\pi|n|y) \exp^{2\pi i n x},$$

с

$$\chi_j = \sqrt{\lambda_j - \frac{1}{4}}.$$

и

$$\rho_j(-n) = \rho_j(-1)\lambda_j(n), \quad \rho_j(n) = \rho_j(1)\lambda_j(n)$$

для натурального $n > 0$. Оператор отражения

$$(T_{-1}f)(z) = f(-\bar{z})$$

коммутирует с Δ и операторами Гекке. Поэтому

$$T_{-1}u_j = \eta_j u_j, \quad \eta_j = \pm 1.$$

Если $\eta_j = 1$, то u_j называется четной, а для $\eta_j = -1$ — нечетной. Ряды Эйзенштейна являются четными автоморфными функциями и для них справедливо следующее разложение в ряд Фурье по x

$$\begin{aligned} E(z; s) &= y^s + \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)} y^{1-s} + \\ &+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_s(|n|) \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

— дзета-функция Римана. Отметим также, что из соотношения мультипликативности для операторов Гекке следуют равенства

$$\begin{aligned} \lambda_j(n_1)\lambda_j(n_2) &= \sum_{l \setminus \text{НОД}(n_1, n_2)} \lambda_j\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right), \\ \tau_s(n_1)\tau_s(n_2) &= \sum_{l \setminus \text{НОД}(n_1, n_2)} \tau_s\left(\frac{n_1 n_2}{l^2}\right). \end{aligned}$$

Следующее утверждение доказано в [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть d — отрицательный дискриминант и $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ произвольная функция, для которой при некотором $\delta > 0$

$$\psi(y) \ll y^{\frac{1}{2}+\delta}, \quad y \rightarrow 0.$$

Тогда для любого целого $m \neq 0$

$$\Omega_d(\Psi_m) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi\left(\frac{\pi|m|\sqrt{|d|}}{q}\right),$$

где

$$\Psi_m(z) = \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(2\pi|m|\text{Im} M(z)) e^{2\pi i m \text{Re} M(z)},$$

и для $m = 0$

$$\Omega_d(\Psi_0) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2q}\right),$$

где

$$\Psi_0(z) = \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(\text{Im} M(z)).$$

В той же работе [5] доказано еще одно утверждение

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ непрерывная функция, для которой при некотором $\delta > 0$

$$\psi(y) \ll y^{\frac{1}{2}+\delta} \quad (y \rightarrow 0), \quad \psi(y) \ll y^{-\delta} \quad (y \rightarrow \infty),$$

а также для любого вещественного t

$$v(t) = ch \frac{\pi t}{2} \int_0^{\infty} \psi(y) K_{it}(y) \frac{dy}{y} \ll (1 + |t|)^{-2-\delta}.$$

Тогда для любого целого $m \neq 0$ и $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} & \sum_{M \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma} \text{Im}^{\frac{1}{2}} M(z) \psi(2\pi|m|\text{Im} M(z)) e^{2\pi i m \text{Re} M(z)} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} v(\chi_j) \overline{\rho_j(m)} \frac{1}{ch \frac{\pi \chi_j}{2}} u_j(z) + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \overline{\pi^{it} \tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)} \frac{E\left(z; \frac{1}{2} + it\right)}{ch \frac{\pi t}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \zeta(1 + 2it)} dt. \end{aligned}$$

Из теоремы (2) непосредственно следует утверждение:

ТЕОРЕМА 3. Пусть ψ и v такие же, как в теореме (2). Тогда для любого отрицательного дискриминанта d и любого целого $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi \left(\frac{\pi |m| \sqrt{|d|}}{q} \right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v(\chi_j)}{\operatorname{ch} \frac{\pi \chi_j}{2}} \overline{\rho_j(m)} \Omega_d(u_j) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}} \overline{\left(\frac{\pi^{it} \tau_{\frac{1}{2}+it}(|m|)}{\Gamma(\frac{1}{2}+it) \zeta(1+2it)} \right)} \Omega_d \left(E \left(\dots; \frac{1}{2} + it \right) \right) dt. \end{aligned}$$

Теперь докажем главный результат работы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и целого $m \neq 0$

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q}} S_d(q; m) \psi \left(\frac{2\pi |m| \sqrt{|d|}}{q} \right) \ll_{\varepsilon} |d|^{\frac{3}{16}+\varepsilon} |m|^{\frac{1}{8}-\frac{1}{64}+\varepsilon}.$$

Доказательство. Напомним интегральное представление для функции Макдональда

$$K_{\nu}(y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > |\operatorname{Re} \nu|} \Gamma \left(\frac{s+\nu}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-\nu}{2} \right) \left(\frac{y}{2} \right)^{-s} ds.$$

Воспользовавшись им, получим

$$\begin{aligned} v(t) &= \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \int_0^{\infty} \psi(y) K_{it}(y) \frac{dy}{y} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} \int_0^{\infty} \psi(y) \Gamma \left(\frac{s+it}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-it}{2} \right) \left(\frac{y}{2} \right)^{-s} dy ds = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi t}{2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = \sigma > 0} 2^s \Gamma \left(\frac{s+it}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s-it}{2} \right) \hat{\psi}(s) ds, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\psi}(s) = \int_0^{\infty} \psi(y) y^{-s} dy.$$

Интегрированием по частям для $0 < \operatorname{Re} s = \sigma < 1$ и любого $A > 0$ получаем оценку

$$\hat{\psi}(s) \ll_A (1 + |s|)^{-A}.$$

Поэтому $\forall t \in \mathbb{R}$

$$v(t) \ll_A (1 + |t|)^{-A}.$$

Применяя оценки (7) и (см. [12])

$$\Omega_d(u_j) \ll_{\varepsilon} \chi_j^{\frac{15}{2}} |d|^{\frac{3}{16}+\varepsilon},$$

получим утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hooley C. On the number of divisors of quadratic polynomials. *Acta Math.*, 1963, V.110, № 1–2, p. 97–114 (Русский перевод: сб. Математика, 1968, 12:5, с. 3–18.)
2. Быковский В. А. Асимптотические свойства целых точек (a_1, a_2) , удовлетворяющих сравнению $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1981, т. 112, с. 5–25.
3. Быковский В. А. Об одной формуле суммирования в спектральной теории автоморфных функций и ее применения в аналитической теории чисел. Докл. АН СССР, 1982, т. 264, Т. 2, с. 275–277.
4. Быковский В. А. Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения. В кн.: Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1984, с. 15–33.
5. Быковский В. А. Арифметические средние и L -ряды автоморфных форм. Хабаровск, Издательство ТОГУ, 2017 г., 68 с.
6. Zagier D. Eisenstein series and the Riemann zeta-function, *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1979. pp. 275–301.
7. Гаусс К.Ф. Труды по теории чисел. М., 1950, 979 с.
8. Дирихле П. Лекции по теории чисел. М., Л., 1936, 404 с.
9. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. М.: МЦНМО, 2014 (Перевод с английского: Iwaniec H., Kowalski E. *Analytic Number Theory*, Colloquium publications (AMS), v. 53, 2004).
10. Kim H. and Sarnak P. Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures. *G. Amer. Math. Soc.*, 16, 2003, p. 175–181.
11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, Т.1 (1973); Т.2 (1974). (Перевод с английского: Bateman H. and Erdelyi, *Higher Transcendental functions*, Mc GRAW-Hill BOOK COMPANY, vol. 1, 2, 1953).
12. Liu S. and Hasri R. The average of the divisor function over values of quadratic polynomial. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, 2015, p. 4143–4160.

REFERENCES

1. Hooley, C. 1963, “On the number of divisors of quadratic polynomials”, *Acta Math.*, 110(1–2), 97–114. (Russian translation: collection Mathematics, 1968, 12:5, pp. 3–18.)
2. Bykovsky, V. A. 1981, “Asymptotic properties of integer points (a_1, a_2) satisfying the relation $a_1 a_2 \equiv l \pmod{q}$ ”, In *Notes of Scientific Seminars of LOMI*, L.: Nauka, 112, pp. 5–25.
3. Bykovsky, V. A. 1982, “On a summation formula in the spectral theory of automorphic functions and its applications in analytic number theory”, *Dokl. AN USSR*, 264(2), pp. 275–277.
4. Bykovsky, V. A. 1984, “Spectral decompositions of some automorphic functions and their number-theoretic applications”, In *Notes of Scientific Seminars of LOMI*, L.: Nauka, pp. 15–33.

5. Bykovsky, V. A. 2017, “Arithmetic means and L -series of automorphic forms”, *Khabarovsk: Publishing House of TOGU*, 68 p.
6. Zagier, D. 1979, “Eisenstein series and the Riemann zeta-function”, In *Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, pp. 275–301.
7. Gauss, K. F. 1950, “Works on number theory”, *M: Nauka*, 979 p.
8. Dirichlet, P. 1936, “Lectures on number theory”, *M: Leningrad*, 404 p.
9. Iwaniec, H., & Kowalski, E. 2004, “Analytic Number Theory”, *Colloquium Publications* (AMS), 53.
10. Kim, H., & Sarnak, P. 2003, “Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures”, *G. Amer. Math. Soc.*, 16, pp. 175–181.
11. Bateman, H., & Erdelyi, A. 1953, “Higher Transcendental Functions”, *McGraw-Hill Book Company*, Vol. 1, 2.
12. Liu, S., & Hasri, R. 2015, “The average of the divisor function over values of quadratic polynomial”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, pp. 4143–4160.

Получено: 14.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025