

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 512.534.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-76-87

Классы унаров, близкие к плоским

А. М. Пряничников

Пряничников Алексей Михайлович — ООО «Квантом» (г. Москва).

e-mail: genary@ya.ru

Аннотация

Данная статья посвящена описанию унаров, удовлетворяющих различным условиям, близким к плоскостности. И.А.Сахаровым было показано, что проективные унары совпадают со свободными и являются копроизведением лучей. Автором ранее были полностью описаны плоские унары. Данная статья продолжает это направление исследований и даёт полное описание унаров, близких к плоским, а именно: коуниверсально плоских, уравнительно плоских, слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P), точных, строго точных и регулярных унаров. Показано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются копроизведением прямых, лучей и циклов. Точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E) совпадают и являются в точности унарами, не содержащими цикл.

Ключевые слова: полигон, полугруппа, унар, плоскостность.*Библиография:* 13 названий.

Для цитирования:

Пряничников, А. М. Классы унаров, близкие к плоским // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 76–87.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 512.534.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-76-87

Classes of unars that are close to flat ones

A. M. Pryanichnikov

Pryanichnikov Alexey Mikhailovich — LLC “Quantom” (Moscow).

e-mail: genary@ya.ru

Abstract

This paper is devoted to the description of unars satisfying various conditions that are close to flatness. I.A.Sakharov showed that projective unars coincide with free ones and are a coproduct of rays. Previously, the author obtained a complete description of flat unars. This paper continues this line of research and provides a complete description of unars that are close to flat ones, namely: pullback flat, equalizer flat, weakly flat, principally weakly flat, torsion free, unars with conditions (P) or (E), faithful, strongly faithful and regular ones. It is proved that pullback flat and equalizer flat unars coincide and are a coproduct of lines and rays. Unars satisfying condition (P), flat, weakly flat, principally weakly flat and torsion free ones coincide and are a coproduct of lines, rays and cycles. Faithful, strongly faithful, regular unars and unars satisfying condition (E) are exactly unars that do not contain a cycle.

Keywords: act, semigroup, unar, flatness.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

Pryanichnikov, A. M. 2025, "Classes of unars that are close to flat ones", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 76–87.

1. Введение

В теории полугрупп большое значение получил метод исследования полугрупп путём изучения характеристик тесно связанных с ними структур – например, полигона над полугруппой. В монографии [1] сделан обзор работ, посвящённых общим свойствам полигонов. В монографии [2] значительную часть занимают гомологические вопросы теории полугрупп, т.е. исследование полугруппы с точки зрения категории полигонов над ней. Центральное место в этой теории занимают инъективные, проективные, плоские полигоны и связанные с ними. Промежуточное положение между модулями и полигонами занимают полумодули над полукольцами. Исследование их плоскостности проводилось в [3]. А именно, было показано, что полумодуль ${}_R A$ над полукольцом R является плоским тогда и только тогда, когда ${}_R A$ является L -плоским (т.е. ${}_R A$ является фильтрованным копределом конечно порождённых свободных полумодулей). Так как описать тот или иной класс полигонов над произвольной полугруппой довольно затруднительно, то имеет смысл рассматривать частные случаи. Одним из таких частных случаев является унар – полигон над свободной циклической полугруппой. Так, в работе [4] были описаны проективные, слабо, квази- и псевдопроективные унары; инъективные, слабо, квази- и псевдоинъективные унары. В работах [5], [6] было обобщено понятие сильной плоскостности полигона и описана связь между плоскими полигонами и полигонами без кручения. В [7] отмечено, что различные обобщения плоскостности будут распространяться на компоненты связности полигона. В работе [8] получено полное описание плоских унаров. В предполагаемой вниманию работе получено полное описание слабо плоских, главно слабо плоских унаров, унаров без кручения, уравнительно плоских, коуниверсально плоских унаров, точных, строго точных, регулярных унаров и унаров, удовлетворяющих условию (E) или (P).

Вообще говоря, унары являются распространённым объектом исследований различных авторов. Например, в монографии [9] дано систематическое изложение теории унаров с особым вниманием к решёткам ретрактов, произведениям, конгруэнциям, гомоморфизмам и многообразиям унаров, а также других алгебраических структур, тесно связанных с унарами. В работе [10] получено полное описание конгруэнций свободного унара с произвольным множеством свободных образующих. Условия дистрибутивности решётки квазимногообразий унаров получены в [11]. В работе [12] получены необходимые и достаточные условия того, чтобы решётка конгруэнций унара являлась цепью, дистрибутивной или модулярной решёткой. В

работе [13] приводится ряд необходимых условий дистрибутивности и модулярности решёток конгруэнций произвольных коммутативных унарных алгебр.

2. Основные определения

Напомним некоторые определения из теории полигонов. Правым *полигоном* над полугруппой S называется множество X с отображением $X \times S \rightarrow X$, $(x, s) \mapsto xs$ таким, что для любых $x \in X$, $s, t \in S$ выполняется равенство $x(st) = (xs)t$. Левый полигон Y над полугруппой S определяется аналогично: это множество Y с отображением $S \times Y \rightarrow Y$ таким, что выполняется равенство $(st)y = s(ty)$ для любых $y \in Y$, $s, t \in S$.

Если S, T – полугруппы, то полигон Z , являющийся одновременно левым S -полигоном и правым T -полигоном с условием $(sz)t = s(zt)$ для любых $z \in Z$, $s \in S$, $t \in T$, называется (S, T) -*биполигоном*. Правые, левые и биполигоны часто обозначают так: X_S , ${}_S Y$ и ${}_S Z_T$.

В случае, когда S – моноид, полигон X_S называется *унитарным*, если $x \cdot 1 = x$ для любого $x \in X$, где 1 – единица моноида S .

Пусть X_S – правый S -полигон. Непустое подмножество $Y \subseteq X$ называется *подполигоном* полигона X , если $ys \in Y$ для любых $y \in Y$, $s \in S$. Левые подполигоны и подбиполигоны определяются аналогично.

Пусть X и Y – соответственно правый и левый полигоны над полугруппой S . *Тензорное произведение* $X_S \otimes {}_S Y$ (или просто $X \otimes Y$) – это фактор-множество $(X \times Y)/\rho$, где ρ – наименьшее отношение эквивалентности, содержащее все пары вида $((xs, y), (x, sy))$ для $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$. Класс, в котором лежит пара (x, y) , обозначается $x \otimes y$. Из определения следует, что для любых $x \in X$, $y \in Y$, $s \in S$ выполняется равенство $xs \otimes y = x \otimes sy$.

Пусть X_S – правый S -полигон, ${}_S Y_T$ – (S, T) -биполигон, тогда $X \otimes Y$ является правым T -полигоном относительно операции

$$(x \otimes y)t = x \otimes yt \quad (x \in X, y \in Y, t \in T)$$

[2, предложение II.5.12].

Копроизведением $\coprod_{i \in I} X_i$ полигонов X_i над одной полугруппой называется их дизъюнктное объединение.

3. Унары

Пусть S – полугруппа. Введём обозначение:

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ содержит единицу;} \\ S \cup \{1\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Унар – это множество с одной унарной операцией $f : X \rightarrow X$. Его можно рассматривать как полигон над свободной циклической полугруппой $S = \langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$ либо как унитарный полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$ (категории правых S -полигонов и унитарных правых S^1 -полигонов изоморфны¹). Здесь $f(x) = xa$, $f(f(x)) = xa^2$ и т.д. Далее, букву a мы будем использовать для обозначения образующего элемента свободной циклической полугруппы $S = \langle a \rangle$.

¹Определим функтор $F : \mathbf{Act} - S \rightarrow \mathbf{Act}_1 - S^1$ следующим образом: $F(X_S) = X_{S^1}$, а именно: множества элементов X полигонов X_S и X_{S^1} совпадают, и если $x = x's$ в X_S , то $x = x's$ в X_{S^1} , $s \in S$, $x, x' \in X$. Морфизму $\varphi : X_S \rightarrow Y_S$ будем ставить в соответствие морфизм $F(\varphi) : X_{S^1} \rightarrow Y_{S^1}$. Обратный функтор $G(X_{S^1}) = X_S$ определяется аналогично, его единственность очевидна.

Пусть S – свободная циклическая полугруппа. Так как она коммутативна, то нет разницы между правыми и левыми полигонами над S (см. [2, замечание I.4.3(2)]). Учитывая [2, предложение II.5.12], X и Y можно считать биполигонами над S , поэтому для унар X и Y тензорное произведение $X \otimes Y$ – тоже унар. При этом для любого $x \otimes y \in X \otimes Y$

$$(x \otimes y)a = x \otimes ya = x \otimes ay = xa \otimes y = ax \otimes y = a(x \otimes y).$$

Лучом будем называть свободный унар с одним образующим (см. Рис. 1). Эквивалентное определение: луч – это унар, изоморфный унару $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \geq 0$.

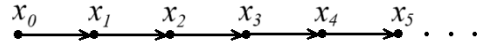


Рис. 1: Свободный унар с единственным образующим x_0 (луч).

Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$ – это копроизведение лучей (см. Рис. 2).

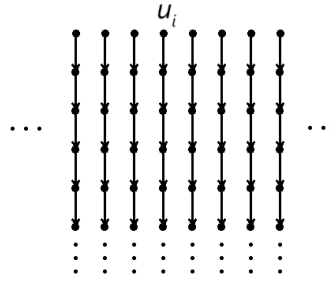


Рис. 2: Свободный унар с множеством свободных образующих $\{u_i \mid i \in I\}$.

Прямая – это унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}$ с операцией $i \cdot a = i + 1$ при $i \in \mathbb{Z}$, (см. Рис. 3).



Рис. 3: Прямая (унар).

Циклом $C_n = \{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$ длины n называется унар, изоморфный унару $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ с операцией $i \cdot a = i + 1 \pmod{n}$ (см. Рис. 4).

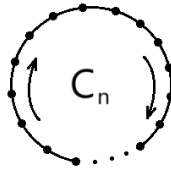


Рис. 4: Цикл C_n длины n .

Унар X называется *связным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существуют такие i, j , что $x_1 a^i = x_2 a^j$. Очевидно, что связный унар не может содержать два или более циклов.

Примеры связных унар изображены на рисунке 5. В первом случае (Рис. 5, А) унар имеет бесконечную убывающую цепь, во втором (Рис. 5, В) есть цикл C_n .

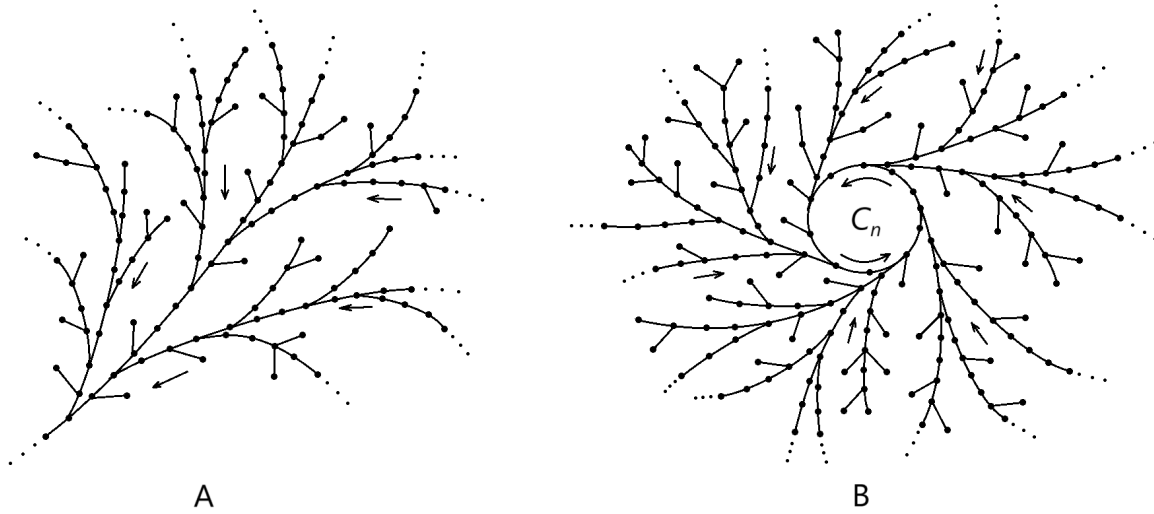


Рис. 5: Связные унары.

Элемент z_0 унара называется *нулём*, если $z_0 s = z_0$ для всех $s \in S$. Если у связного унара есть цикл C_1 , состоящий из одного элемента, то унар называется *нуль-унаром*. То есть, он имеет нуль z_0 и для каждого $x \in X$ существует такое $k \geq 0$, что $xa^k = z_0$.

4. Различные виды плоскостности

Выбор классов полигонов, которые описываются в данной работе основан на [2, таблица III.2]. Утверждения и определения из [2], на которые мы будем ссылаться сейчас и в дальнейшем, приведены в [2] для полигонов над произвольными моноидами. При ссылке на них мы будем приводить их для унаров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2, определения III.9.1 и III.8.1]). Унар X называется *коуниверсально плоским*, если функтор $X \otimes -$ сохраняет коуниверсальный квадрат;
уравнительно плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет уравнители;
сильно плоским, если он является коуниверсально плоским и уравнительно плоским;
плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет мономорфизмы;
слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения левых идеалов в S ;
главно слабо плоским, если функтор $X \otimes -$ сохраняет все вложения главных левых идеалов в S ;
унаром без кручения, если $\forall x, x' \in X, \forall s \in S \quad xs = x's \rightarrow x = x'$.²

Приведём некоторые известные утверждения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ЛЕММА 1 ([2, лемма III.9.3 и утверждение III.8.2]). Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i, i \in I$ – унары. Тогда X обладает каким-либо свойством из определения 1, если и только если для каждого $i \in I$ унар X_i обладает этим свойством.

СЛЕДСТВИЕ 1 ([2, следствие III.16.4]). Коуниверсально плоский унар является уравнительно плоским.

²В оригинальном определении сказано, что данная импликация выполняется для всех сократимых справа элементов полугруппы S . Но, как нетрудно проверить, в свободной циклической полугруппе любой элемент сократим справа, поэтому мы записываем определение унара без кручения в таком упрощённом виде.

ЛЕММА 2 ([2, лемма III.9.2]). Для любого унара X верны следующие импликации:

$$\begin{aligned} \text{сильно плоский} &\Rightarrow \text{коуниверсально плоский} \\ \text{сильно плоский} &\Rightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow \text{плоский} \\ &\Rightarrow \text{слабо плоский} \Rightarrow \text{главно слабо плоский}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 ([2, утверждение III.10.3]). Главно слабо плоский унар является унаром без кручения.

Разделим основную часть исследования на четыре части. Сначала мы опишем слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения, а в последующем - уравнительно плоские, коуниверсально плоские, точные, строго точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (E).

5. Слабо плоские, главно слабо плоские унары и унары без кручения

ЛЕММА 3. Пусть X – унар. Если x_1, x_2 – различные элементы из X такие, что $x_1a = x_2a$, то унар X не является унаром без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Пусть X – унар без кручения. Тогда, по определению, если $x_1a = x_2a$, то $x_1 = x_2$ – противоречие, так как по условию $x_1 \neq x_2$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – унар без кручения, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале отметим, что перенос свойства "без кручения" с компонент связности на весь унар и обратно мы получаем из леммы 1.

Теперь предположим, что утверждение следствия не выполнено. Это означает, что унар X – без кручения и при этом обладает компонентой связности X_i , которая не является ни прямой, ни лучом, ни циклом. Это означает, что в такой компоненте X_i будет выполняться $x_1a = x_2a$ при некоторых $x_1 \neq x_2$ из X_i . Тогда по лемме 3 унар X не является унаром без кручения – противоречие. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если X – главно слабо плоский, слабо плоский, плоский, уравнительно плоский либо коуниверсально плоский унар, то его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2, следствия 1 и утверждения 1 мы имеем:

$$\text{коуниверсально плоский} \Rightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow \text{плоский} \Rightarrow \text{слабо плоский} \Rightarrow \text{главно слабо плоский} \Rightarrow \text{без кручения}.$$

Поэтому, если X – один из унаров, перечисленных в условии, то он является унаром без кручения. По следствию 2 мы получаем, что компонентами связности X могут быть лишь прямые, лучи и циклы. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для любого унара X верны следующие эквивалентности:

$$\text{плоский} \Leftrightarrow \text{слабо плоский} \Leftrightarrow \text{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \text{без кручения}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 и утверждения 1 следует, что в этой цепочке эквивалентностей верны импликации $\Rightarrow$. Осталось доказать, что унар без кручения является плоским.

Пусть X – унар без кручения. По следствию 2 его компонентами связности могут быть лишь прямые, лучи и циклы. По [8, теорема] прямая, луч и цикл являются плоскими унарами, а значит, из леммы 1 мы заключаем, что X – плоский. $\square$

6. Уравнительно плоские унары

Следующие условия играют важную роль при исследовании различных типов плоских полигонов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([2, определение III.9.4]). Будем говорить, что полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (P), если для него выполняется импликация: если $xs = x's'$ для $x, x' \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x'' \in X$, $u, v \in S$ такие, что $x = x''u$, $x' = x''v$, $us = vs'$ (см. Рис. 6).

Полигон X над полугруппой S удовлетворяет условию (E), если для него выполняется импликация: если $xs = xs'$ для $x \in X$, $s, s' \in S$, то существуют $x' \in X$, $u \in S$ такие, что $x = x'u$, $us = us'$.

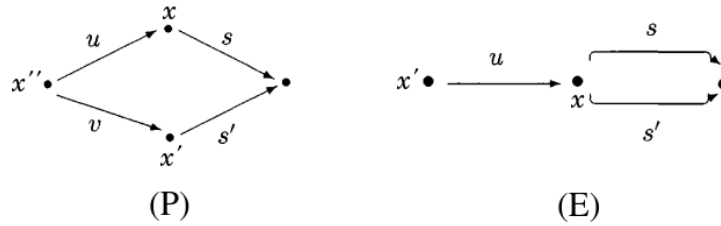


Рис. 6: Условия (P) и (E).

Для описания уравнительно плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

ТЕОРЕМА 2 ([2, теорема III.15.8]). Если унар удовлетворяет условиям (E) и (P), то он является уравнительно плоским.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Луч и прямая удовлетворяют условию (E).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – луч и будем считать его унитарным полигоном над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. Очевидно, что если $xa^k = xa^m$ для $x \in X$, то $k = m$. Отсюда, если в определении 2 взять $x' = x$ и $u = 1$, то условие (E) будет выполнено.

Так как прямую можно представить как объединение возрастающей последовательности лучей, то для неё тоже будет выполняться условие (E)³. □

Оказывается, что цикл условию (E) не удовлетворяет, как показывает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Цикл не удовлетворяет условию (E).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C_n – цикл длины n . Тогда $xa^k = xa^{k+n}$ при всех $x \in C_n$ и некотором $a^k \in S$. Предположим, что цикл удовлетворяет условию (E). Это значит, что существуют такие $x' \in C_n$ и $a^m \in S$, что $x = x'a^m$ и $a^m \cdot a^k = a^m \cdot a^{k+n}$. Тогда $m + k = m + k + n$, откуда следует, что $n = 0$ – противоречие. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – прямая либо цикл и $xa^n = x'a^m$ для $x, x' \in X$, $a^n, a^m \in S$. Без ограничения общности будем считать, что $n \geq m$. Возьмём такой $x'' \in X$, что $x = x''a^k$, $x' = x''a^{k+n-m}$ при некотором $k \geq 0$. Тогда, очевидно, что равенство $a^k \cdot a^n = a^{k+n-m} \cdot a^m$ будет выполняться.

³В этом можно также убедиться, если рассматривать прямую как полигон над свободной циклической полугруппой и проверить для неё выполнение условия (E).

В случае, когда X – луч, то рассуждения выше применимы и к нему, если рассматривать X как полигон над свободным циклическим моноидом. Уточнения требует случай, когда один из элементов $x, x' \in X$ совпадает с образующим элементом полигона X . Если $x, x' \in X$ и x совпадает с образующим элементом X , тогда в качестве x'' можно взять x , а в качестве u – единицу моноида S . Тогда нетрудно увидеть, что условие (Р) будет выполняться. $\square$

ТЕОРЕМА 3. *Унар является уравнительно плоским тогда и только тогда, когда он является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Тогда, по лемме 2 он является плоским, откуда, по предложению 1 X является копроизведением унаров, являющихся прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда, по [2, утверждение III.15.3] X_i удовлетворяет условию (Е), что противоречит предложению 3. Отсюда получаем, что X является копроизведением унаров, являющихся прямыми либо лучами.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – луч либо прямая. По предложениям 2 и 4 X_i удовлетворяет условиям (Р) и (Е), откуда, по теореме 2 X_i является уравнительно плоским унаром. Наконец, по лемме 1 получаем, что X – уравнительно плоский унар. $\square$

7. Точные, регулярные унары и унары, удовлетворяющие условию (Е)

ЛЕММА 4. *Связный унар без цикла удовлетворяет условию (Е).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – связный унар без цикла (см. Рис. 5, А) и будем рассматривать его как полигон над свободным циклическим моноидом $S^1 = \{1, a, a^2, a^3, \dots\}$. Пусть $xa^k = xa^m$ для некоторых $a^k, a^m \in S$, $x \in X$. В силу отсутствия циклов $k = m$. Отсюда, если в определении 2 взять $x' = x$ и $u = 1$ ($x' \in X$, $1 \in S$), то условие (Е) будет выполняться. $\square$

ТЕОРЕМА 4. *Унар удовлетворяет условию (Е) тогда и только тогда, когда он не содержит циклов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – унар, удовлетворяющий условию (Е). Связный унар X_i может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 5). Так как по предложению 3 цикл не удовлетворяет условию (Е), то X_i является связным унаром, не содержащим цикл. Из [2, лемма III.9.5] получаем, что X не содержит циклов.

Достаточность. Пусть X – унар и $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где X_i – связный унар, не содержащий цикл. По лемме 4 унар X_i удовлетворяет условию (Е). Из [2, лемма III.9.5] получаем, что X удовлетворяет условию (Е). $\square$

"Точное действие" на языке автоматов означает, что разные входные слова по-разному воздействуют хотя бы на одно из состояний автомата. Действие является строго точным, если разные входные слова по-разному воздействуют на все состояния автомата.

Полигон X_S называется *точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для всех $x \in X$, то $s = t$. Полигон X_S называется *строго точным*, если для $s, t \in S$ выполняется импликация: если $xs = xt$ для некоторого $x \in X$, то $s = t$ (см. [2, определение I.4.8]).

Очевидно, что если полигон является строго точным, то он является точным.

ЛЕММА 5. *Если X – унар без цикла (см. Рис. 5, (А)), то он является строго точным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a^n, a^m \in S$ и пусть $xa^n = xa^m$ для некоторого $x \in X$. В силу отсутствия цикла $n = m$ и $a^n = a^m$. $\square$

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом (Рис. 5, (В)), то он не будет являться точным, а значит, не будет и строго точным.

Пусть X – полигон над моноидом S^1 . Элемент $x \in S$ называется *регулярным*, если существует гомоморфизм $\varphi : xS^1 \rightarrow S^1$ такой, что $x\varphi(x) = x$. Полигон X над моноидом S^1 называется *регулярным* полигоном, если каждый его элемент является регулярным (см. [2, определение III.19.1]).

ЛЕММА 6. *Унар без цикла является регулярным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем рассматривать унар как полигон над свободным циклическим моноидом S^1 . Пусть X – унар без цикла и возьмём $x \in X$. Очевидно, что унар xS^1 является лучом, как и полигон $S^1_{S^1}$. Построим между ними отображение $\varphi : xS^1 \rightarrow S^1$, а именно: положим $\varphi(x) = 1$ ($1 \in S^1$). Тогда получим, что $xS^1 \cong S^1$ (как полигоны). Теперь нетрудно видеть, что $x\varphi(x) = x \cdot 1 = x$, откуда следует, что x – регулярный элемент полигона S . Так как элемент x выбран произвольно, то заключаем, что X – регулярный унар. $\square$

Нетрудно увидеть, что если X – связный унар с циклом, то он не будет являться регулярным в силу того, что построить требуемый изоморфизм невозможно.

ТЕОРЕМА 5. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$(E) \Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (Е). Из теоремы 4 следует, что он является унаром, не содержащим цикл. Тогда, из леммы 5 следует, что X является строго точным. Если X является строго точным, то он является точным. Из леммы 6 следует, что X является регулярным.

Пусть X – регулярный унар. X может либо содержать цикл, либо нет (см. Рис. 5). Так как из определения нетрудно увидеть, что унар, содержащий цикл не является регулярным, то заключаем, что X – унар, не содержащий цикл. Из теоремы 4 заключаем, что X удовлетворяет условию (Е). $\square$

8. Коуниверсально плоские унары

Для описания коуниверсально плоских унаров воспользуемся следующим критерием.

ТЕОРЕМА 6 ([2, теорема III.16.3]). *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условиям (Е) и (Р).*

ТЕОРЕМА 7. *Унар является коуниверсально плоским тогда и только тогда, когда он является уравнительно плоским (т.е. является копроизведением прямых и лучей).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть X – коуниверсально плоский унар. Тогда, по следствию 1 он является уравнительно плоским.

Достаточность. Пусть $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – уравнительно плоский унар. Из предложения 1 мы получаем, что компоненты связности X_i являются прямыми, лучами либо циклами. Если X_i – цикл, тогда по [2, утверждение III.15.3] X_i удовлетворяет условию (Е), что противоречит предложению 3. Значит, X_i может быть лишь прямой либо лучом. По предложениям 2 и 4 X_i удовлетворяет условиям (Р) и (Е), откуда по теореме 6 X_i является коуниверсально плоским унаром. Наконец, по лемме 1 получаем, что X – коуниверсально плоский. $\square$

9. Следствия

Таким образом, мы можем собрать результаты всех частей данной работы воедино и сформулировать следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любого унара X верны следующие эквивалентности:*

$$(P) \Leftrightarrow \text{плоский} \Leftrightarrow \text{слабо плоский} \Leftrightarrow \text{главно слабо плоский} \Leftrightarrow \text{без кручения}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первую эквивалентность. Пусть X – унар, удовлетворяющий условию (P). Тогда, по [2, утверждение III.13.3] X является плоским унаром. Наоборот, пусть X – плоский унар. Тогда, по предложению 1 его компонентами связности могут быть прямые, лучи либо циклы. По предложению 4 луч, прямая и цикл удовлетворяют условию (P).

Все остальные эквивалентности следуют из теоремы 1. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для любого унара X верны следующие импликации:*

$$\begin{aligned} \text{коуниверсально плоский} &\Leftrightarrow \text{уравнительно плоский} \Rightarrow (E) \\ &\Leftrightarrow \text{строго точный} \Leftrightarrow \text{точный} \Leftrightarrow \text{регулярный}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая эквивалентность следует из теоремы 7.

Если X – уравнительно плоский унар, то по [2, предложение III.15.3] он удовлетворяет условию (E). В обратную сторону эта импликация выполняться не будет, как можно видеть из теоремы 4. Остальные импликации следуют из теоремы 5. $\square$

10. Заключение

Таким образом, в работе полностью описаны коуниверсально плоские, уравнительно плоские, плоские, слабо плоские, главно слабо плоские унары, унары без кручения, унары, удовлетворяющие условию (E) или (P), точные, строго точные и регулярные унары.

Доказано, что коуниверсально плоские унары совпадают с уравнительно плоскими и являются копроизведением прямых и лучей. Унары, удовлетворяющие условию (P), плоские, слабо плоские, главно слабо плоские и унары без кручения совпадают и являются копроизведением прямых, лучей и циклов. Унары, удовлетворяющие условию (E), точные, строго точные и регулярные унары совпадают и являются унарами, не содержащими цикл.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Кожухову Игорю Борисовичу за помощь при написании данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожухов И. Б., Михалёв А. В., Тищенко А. В. Избранные вопросы теории полугрупп: представления и многообразия полугрупп. М.: Интуит, 2021. 160 с.
2. Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and categories. Berlin; New York: de Gruyter, 2000. 546 p.
3. Katsov Y. On Flat Semimodules over Semirings // Algebra universalis. 2004. Vol. 51. №2. P. 287–299.
4. Сахаров И. А. Проективные и инъективные унары // Дальневост. матем. журн. 2024. Том 24, №1. С. 107–119.

5. Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts I // *Communications in Algebra*. 2001. Vol. 29(2). P. 829–850.
6. Bulman-Fleming S., Kilp M., Laan V. Pullbacks and flatness properties of acts II // *Communications in Algebra*. 2001. Vol. 29(2). P. 851–878.
7. Golchin A. Flatness and coproducts // *Semigroup Forum*. 2006. Vol. 72(3). P. 433–440.
8. Пряничников А. М. Плоские унары // *Известия высших учебных заведений. Математика*. 2025. (в печати)
9. Jakubíková-Studenovská D., Pócs J. Monounary algebras. Košice: UPJŠ Košice, 2009.
10. Будиянская К. В., Кожухов И. Б. Конгруэнции свободного унара // *Чебышевский сборник*. 2023. Том 24(1). С. 15–26.
11. Карташов В. К., Карташова А. В. Характеризация дистрибутивных решеток квазимногообразий унаров // *Чебышевский сборник*. 2021. Том 22(1). С. 177–187.
12. Егорова Д. П. Структура конгруэнций унарной алгебры // *Межвузовский научный сборник «Упорядоченные множества и решётки»*. г. Саратов: Издательство Саратовского университета, 1978. Вып. 5. С. 11–44.
13. Карташов В. К., Карташова А. В., Пономарёв В. Н. Об условиях дистрибутивности и модулярности решеток конгруэнций коммутативных унарных алгебр // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика*, 2013. Том 13, вып. 4, ч. 2. С. 52–57.

REFERENCES

1. Kozhukhov, I. B., Mikhalev & A. V., Tishenko, A. V. 2021, “Selected issues in semigroup theory: representations and variety of semigroups“, *Intuit: Moscow*, 160 p.
2. Kilp, M., Knauer, U. & Mikhalev, A. V. 2000, “Monoids, acts and categories“, *Berlin; New York: de Gruyter*, 546 p.
3. Katsov, Y. 2004, “On flat semimodules over semirings“, *Algebra universalis*, vol. 51, no. 2, pp. 287–299.
4. Sakharov I. A. 2024, “Projective and injective unars“, *Far Eastern Math. Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 107–119.
5. Laan, V. 2001, “Pullbacks and flatness properties of acts I“, *Communications in Algebra*, vol. 29(2), pp. 829–850.
6. Bulman-Fleming, S., Kilp, M. & Laan, V. 2001, “Pullbacks and flatness properties of acts II“, *Communications in Algebra*, vol. 29(2), pp. 851–878.
7. Golchin, A. 2006, “Flatness and coproducts“, *Semigroup Forum*, vol. 72(3), pp. 433–440.
8. Pryanichnikov, A. M. 2025, “Flat unars“, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, (in print).
9. Jakubíková-Studenovská, D., Pócs, J. 2009, “Monounary algebras“, *Košice: UPJŠ Košice*.
10. Budianskaia, C. V., Kozhukhov, I. B. 2023, “Congruences of a free unar“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol 24(1), pp. 15–26.

-
11. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. 2021, "Characterization of distributive lattices of quasivarieties of unars", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22(1), pp. 177–187.
 12. Egorova, D. P. 1978, "The structure of congruences of unary algebra", *Interuniversity scientific collection "Ordered sets and lattices"*, Saratov: Saratov University Press, issue 5, pp. 11–44.
 13. Kartashov, V. K., Kartashova, A. V. & Ponomarjov, V. N. 2013, "On conditions for distributivity or modularity of congruence lattices of commutative unary algebras", *Izv. Sarat. Univ. Math. Mech. Inform.*, vol. 13(4:2), pp. 52–57.

Получено: 16.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025