ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 26. Выпуск 1.

УДК 517.5+519.213 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-47-61

О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа[1]

А. Д. Манов

Манов Анатолий Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, Донецкий государственный университет (г. Донецк); Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: manov.ad@ro.ru

Аннотация

В статье изучается ряд экстремальных задач для неотрицательных и интегрируемых на вещественной оси целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ (класс $\mathcal{E}^+_{1,\sigma}$).

Рассматриваемые задачи имеют следующий вид. Пусть Λ_ρ – инвариантный относительно сдвига оператор с локально интегрируемым символом $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$ таким, что $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. При фиксированном $\sigma > 0$ требуется найти следующие величины:

$$M^*(\rho,\sigma) = \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\},$$
$$m^*(\rho,\sigma) = \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\}.$$

Данная общая задача сводится к равносильной экстремальной задаче для положительно определённых функций, решение которой известно. Как следствие, нами получены явные значения величин $M^*(\rho,\sigma)$ и $m^*(\rho,\sigma)$ для ряда различных символов ρ. В частности, рассмотрены случаи, когда Λ_ρ – дифференциальный или разностный оператор специального вида.

Ключевые слова: целые функции экспоненциального типа, экстремальные задачи, положительно определенные функции, теорема Бохнера, преобразование Фурье.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
А. Д. Манов. О некоторых экстремальных задачах для целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 47–61.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-30012).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 26. No. 1.

UDC 517.5+519.213 DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-47-61

On some extremal problems for entire functions of exponential type

A. D. Manov

Manov Anatoliy Dmitrievich — candidate of physical and mathematical sciences, Donetsk State University (Donetsk); Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: manov.ad@ro.ru

Abstract

In this paper we consider a number of extremal problems for nonnegative and integrable entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$ (the class $\mathcal{E}^+_{1,\sigma}$).

The problems under consideration have the following form. Let Λ_ρ be a translation invariant operator with a locally integrable symbol $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$, such that $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$. For a fixed $\sigma > 0$, it is required to find the following constants:

$$M^*(\rho,\sigma) = \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\},$$
$$m^*(\rho,\sigma) = \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\}.$$

This general problem reduces to an equivalent extremal problem for positive-definite functions, the solution of which is known. As consequence, we obtained exact values of $M^*(\rho,\sigma)$ and $m^*(\rho,\sigma)$ for a number of different symbols ρ. In particular, we consider cases where Λ_ρ is a differential or difference operator of a special form.

Keywords: entire functions of exponential type, extremal problems, positive-definite functions, Bochner theorem, Fourier transform.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
Manov, A. D. 2025, “On some extremal problems for entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 47–61.

1. Введение

1.0 Фиксируем некоторые обозначения: $L_p^{loc}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ – множество функций таких, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}$ их сужение на множество K принадлежит $L_p(K)$, $\widetilde{f}(x) := \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$ и $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$. Кроме того, мы будем использовать следующую пару прямого и обратного преобразования Фурье:

$$(\mathcal{F}f)(t) = \widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx, \quad (\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{itx}dx.$$

При такой нормировке преобразования Фурье справедливы равенства:

$$\mathcal{F}^{-1}(f*g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g), \qquad \mathcal{F}^{-1}(f*\widetilde{f}) = |\mathcal{F}^{-1}f|^2, \quad f,g \in L_1(\mathbb{R}).$$

1.1 Обозначим символом $\mathcal{E}_{p,\sigma}$ множество ц.ф.э.т. $\leqslant \sigma$ таких, что их ограничения на $\mathbb{R}$ принадлежат $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, а символом $\mathcal{E}^+_{p,\sigma}$ – подмножество неотрицательных на вещественной оси функций из $\mathcal{E}_{p,\sigma}$. Кроме того, $\mathcal{B}_\sigma := \mathcal{E}_{\infty,\sigma}$.

Пусть $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$. По функции ρ определим на $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ следующий оператор:

$$(\Lambda_\rho f)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\rho(x)e^{itx}dx,\ t \in \mathbb{R},\ f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}.$$

Из теоремы Винера-Пэли вытекает, что $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\sigma,\sigma]$, и значит, $\Lambda_\rho f \in \mathcal{B}_\sigma$. Кроме того, несложно проверить, что Λ_ρ – ограниченный оператор из $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ в $\mathcal{B}_\sigma$, норма которого удовлетворяет неравенству:

$$\|\Lambda_\rho\| = \sup_{f\in\mathcal{E}_{1,\sigma},\ f\neq 0} \frac{\|\Lambda_\rho f\|_\infty}{\|f\|_1} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} |\rho(x)|dx. \tag{1}$$

Нахождение точного значения нормы $\|\Lambda_\rho\|$ в общем случае является сложной задачей и по существу относится к широкому классу экстремальных задач, связанных с нахождением точных констант в неравенствах типа Бернштейна-Никольского.

Рассмотрим "стандартный" пример неравенства типа Бернштейна-Никольского. Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда $(\Lambda_\rho f)(t) = f^{(n)}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и из неравенства (1) вытекает, что

$$\|f^{(n)}\|_\infty \leqslant \frac{\sigma^{n+1}}{\pi(n+1)}\|f\|_1,\ f \in \mathcal{E}_{1,\sigma},\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Стоит отметить, что неравенство (2) также следует из более общих результатов И. И. Ибрагимова, полученных им в 1959 г. (см. [1, следствие 2]).

В случае, когда Λ_ρ – тождественный оператор ($n = 0$) оценки на точную константу в неравенстве (2) были получены Кореваром в 1949 г. (см. [2]). Им было доказано, что $\sigma/(2\pi) \leqslant \|\Lambda_\rho\| \leqslant \sigma/\pi$. В рассматриваемом случае проблема вычисления точного значения нормы $\|\Lambda_\rho\|$ имеет приложения в теории чисел (см., например, [3, 4]). На данный момент наиболее точные оценки величины $\|\Lambda_\rho\|$ были найдены L. Hörmander и B. Bernhardsson в 1993 г. в работе [5]. Из их оценок следует, что $\|\Lambda_\rho\| = \sigma L$, где $L \approx 0.172182$.

Более подробную информацию о неравенствах типа Бернштейна-Никольского: их истории, разновидностях и приложениях можно найти в статье Д. В. Горбачева [6].

1.2 В данной работе нас интересует следующая задача, связанная с оценкой нормы оператора Λ_ρ снизу в довольно общем случае.

Задача 1. *Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \widetilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти следующие величины:*

$$M^*(\rho,\sigma) = \sup\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\},$$
$$m^*(\rho,\sigma) = \inf\{(\Lambda_\rho f)(0) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\}.$$

Постановка задачи корректна. Действительно, т. к. $\rho = \widetilde{\rho}$, то для любой функции $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$ справедливо равенство:

$$\overline{(\Lambda_\rho f)(0)} = \overline{\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\rho(x)dx} = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{f}(x)\rho(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x)\rho(-x)dx = (\Lambda_\rho f)(0),$$

и значит, $(\Lambda_\rho f)(0)$ является действительным числом.

Так как оператор Λ_ρ и множество $\mathcal{E}_{1,\sigma}$ инвариантны относительно сдвигов, т. е.

$$\Lambda_\rho\tau_h = \tau_h\Lambda_\rho \ \text{ и } \ f \in \mathcal{E}_{1,\sigma} \Rightarrow \tau_h f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}, \text{ где } \tau_h f(\cdot) := f(\cdot + h),\ h \in \mathbb{R},$$

то для любой функции $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$ справедливы точные неравенства:

$$\begin{gathered}\frac{m^*(\rho,\sigma)\|f\|_1}{2\pi} \leqslant (\Lambda_\rho f)(t) \leqslant \frac{M^*(\rho,\sigma)\|f\|_1}{2\pi}, \quad t \in \mathbb{R},\\ \|\Lambda_\rho f\|_\infty \leqslant \frac{\max\{|m^*(\rho,\sigma)|, |M^*(\rho,\sigma)|\}}{2\pi}\|f\|_1.\end{gathered} \tag{3}$$

Поскольку неравенства выше являются точными, то имеет место следующая нижняя оценка нормы оператора Λ_ρ:

$$\frac{\max\{|m^*(\rho,\sigma)|, |M^*(\rho,\sigma)|\}}{2\pi} \leqslant \|\Lambda_\rho\|. \tag{4}$$

Ранее автором в работе [7] были доказаны следующие точные неравенства для функций $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$:

$$-\frac{\sigma^2\sqrt{3}}{12\pi}\|f\|_1 \leqslant f'(t) \leqslant \frac{\sigma^2\sqrt{3}}{12\pi}\|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$-\frac{\sigma^3(5+3\sqrt{5})}{120\pi}\|f\|_1 \leqslant f''(t) \leqslant \frac{\sigma^3}{12\pi}\|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

1.3 Задачу 1 можно переформулировать в терминах положительно определённых функций. Напомним, что комплекснозначная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f \in \Phi(\mathbb{R})$), если для любого $m \in \mathbb{N}$, для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m c_i\overline{c_j} f(x_i - x_j) \geqslant 0.$$

Пусть $\sigma > 0$. Символом $\mathfrak{F}_\sigma$ обозначим множество функций $\varphi \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-\sigma,\sigma]$ и $\varphi(0) = 1$.

Очевидно, что класс функций $\mathfrak{F}_\sigma$ не пуст. Например, если взять функцию $u \in L_2(\mathbb{R})$, $\|u\|_2 \neq 0$ и $u(x) = 0$ при $|x| \geqslant \sigma/2$, то следующая функция принадлежит $\mathfrak{F}_\sigma$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2}(u * \widetilde{u})(x) = \frac{1}{\|u\|_2^2}\int\limits_{\mathbb{R}} u(x-t)\widetilde{u}(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Действительно, $\varphi \in C(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset [-\sigma,\sigma]$, положительная определённость функции φ проверяется непосредственно. Если $u(x) = \chi_{[-\sigma/2,\sigma/2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – индикатор отрезка, то получим функцию $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Более того, из теоремы Боаса-Каца, Крейна (см., например, [8, Theorem 3.10.2]) следует, что $\mathfrak{F}_\sigma$ исчерпывается функциями вида (7). Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. *Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \widetilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Требуется найти следующие величины*:

$$M(\rho,\sigma) = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)\rho(x)dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma\right\}, \quad m(\rho,\sigma) = \inf\left\{\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(x)\rho(x)dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma\right\}. \tag{8}$$

Хорошо известно (см. следствие 6 в разделе 3 данной работы), что функция $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ является положительно определённой тогда и только тогда, когда $(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда и из теоремы Винера-Пэли следует, что преобразование Фурье является биекцией между множеством функций $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$ таких, что $\|f\|_1 = 2\pi$ и множеством функций $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Таким образом, справедливы равенства:

$$M(\rho,\sigma) = M^*(\rho,\sigma) \ \text{ и } \ m(\rho,\sigma) = m^*(\rho,\sigma).$$

Отметим также, что если функция $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ является экстремальной в задаче 2, то функция $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ будет экстремальной в задаче 1 при тех же параметрах ρ и σ.

Если $\rho(x) \equiv 1$, то величина $M(\rho,\sigma)$ была найдена Зигелем [9] в 1935 году и независимо Боасом и Кацом (см. [10, Theorem 5]) в 1945 году. В этом случае $M(\rho,\sigma) = \sigma$ и достигается она на функции $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$. Отметим также, что Зигелем было получено решение более общей задачи для положительно определённых функций в $\mathbb{R}^n$ с носителем в шаре. Результат Зигеля также был заново открыт Д. В. Горбачевым [11] в 2001 г. другими методами. Кроме того, отметим, что новый способ доказательства результатов Зигеля получен в недавней статье J. P. Gabardo [12].

В случае $\rho(x) \equiv 1$ задача нахождения величины $M(\rho,\sigma)$ относится к классу экстремальных задач типа Турана. Более полную информацию о данном типе задач, а также их приложениях можно найти в статье S. G. Révész [13].

Если $\rho(x) = |x|^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, то задача 2 имеет приложение в проблеме продолжения функций, заданных на $\mathbb{R} \setminus (-a,a)$, $a > 0$, до положительно определённых на $\mathbb{R}$.

В работе автора [7] была доказана следующая теорема, которая даёт решение задачи 2 и как следствие задачи 1.

Теорема A. *Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \widetilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Определим оператор $A_\rho : L_2[-\sigma/2,\sigma/2] \to L_2[-\sigma/2,\sigma/2]$ следующим образом:*

$$(A_\rho u)(t) := \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} \overline{\rho(t-x)}u(x)dx, \quad u \in L_2[-\sigma/2,\sigma/2]. \tag{9}$$

Тогда A_ρ – ограниченный самосопряжённый оператор в $L_2[-\sigma/2,\sigma/2]$ и имеют место следующие равенства:

$$M(\rho,\sigma) = \sup(\operatorname{spec} A_\rho), \quad m(\rho,\sigma) = \inf(\operatorname{spec} A_\rho),$$

где $\operatorname{spec} A_\rho$ – спектр оператора A_ρ.

Замечание 1. *Теорема A является аналогом теоремы Сасса для неотрицательных тригонометрических многочленов (см. [14, Satz IV]). Метод доказательства теоремы A, по существу, повторяет метод из [14].*

Замечание 2. *Стоит подчеркнуть, что формулировка теоремы A несколько отличается от формулировки в работе [7]. Здесь при определении оператора A_ρ в (9) мы берём сопряжённую к ρ функцию.*

В силу замкнутости множества $\mathfrak{F}_\sigma$ относительно сопряжения (см. раздел 3 ниже) при переходе от функции ρ к $\overline{\rho}$ величины (8) не изменятся, т.е. справедливы равенства:

$$M(\rho,\sigma) = M(\overline{\rho},\sigma), \qquad m(\rho,\sigma) = m(\overline{\rho},\sigma).$$

При этом, очевидно, что мнимые части экстремальных функций могут отличаться знаком, если эти функции существуют. Поэтому теорема A сформулирована таким образом, что если наибольшее (наименьшее) значение спектра $\operatorname{spec} A_\rho$ является отличным от нуля собственным значением оператора A_ρ, то экстремальной функцией в задаче 2 будет $\varphi(x) = (u * \tilde{u})(x)/\|u\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}$, где функция $u \in L_2[-\sigma/2,\sigma/2]$ отвечает этому собственному значению. Здесь мы отождествляем пространство $L_2[-\sigma/2,\sigma/2]$ с подпространством функций $u \in L_2(\mathbb{R})$ таких, что $u(x) = 0$ п. в. при $|x| \geqslant \sigma/2$.

Замечание 3. *Определённый в теореме А оператор A_ρ является компактным. Действительно, пусть $\rho_k(x) := \rho(x)\chi_{E_k}(x)$, где $E_k = \{x \in \mathbb{R} : |\rho(x)| \leqslant k\}$. Тогда $\{A_{\rho_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность компактных операторов в $L_2[-\sigma/2, \sigma/2]$ и $\|A_{\rho_k} - A_\rho\| \to 0$ при $k \to \infty$.*

Таким образом, спектр оператора A_ρ состоит из нуля и отличных от нуля собственных значений. Отсюда следует, что решение задачи 2 по существу сводится к решению интегрального уравнения $A_\rho u = \lambda u$, $\lambda \neq 0$. Отсюда также вытекает, что если экстремальные величины (8) *отличны от нуля, то они достигаются, т. е. существуют экстремальные функции.*

1.4 В связи с последним замечанием, стоит выделить следующую экстремальную задачу на множестве функций $\mathfrak{F}_\sigma$. *Пусть $\sigma > 0$. Требуется найти следующую величину*:

$$C(\sigma) = \sup\left\{\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 dx : \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma\right\}. \tag{10}$$

Задача (10) была поставлена и тщательно исследована в работе A. Garsia, E. Rodemich, H. Rumsey [15] в 1969 г. Как отмечается в [15] задача (10) связана с проблемой оптимизации средней мощности получаемого сигнала при радиолокационном исследовании планет. В Theorem 5.1 работы [15] доказано, что решение задачи (10) равносильно решению интегрального уравнения специального вида.

Отметим, что так как множество $\mathfrak{F}_\sigma$ замкнуто относительно умножения (см. раздел 3 ниже), то справедливо неравенство $C(\sigma) \leqslant M(1, \sigma) = \sigma$. Последнее неравенство является строгим. На это указывает, например то, что не всякую функцию $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ можно представить в виде $\varphi = |\psi|^2$, где $\psi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Например, такой функцией является $\varphi(x) = (1 - |x/\sigma|)_+$, $x \in \mathbb{R}$. Это следует из того, что для любой функции $\psi \in \mathfrak{F}_\sigma$ справедливо неравенство $|\psi(\sigma/2)| \leqslant 1/2$ (см., например, [10]). Алгоритм вычисления константы $C(\sigma)$ с заданной точностью содержится в разделах 7, 8 работы [15]. В частности, $C(1) \approx 0.686981$. Также из раздела 8 работы [15] и теоремы А вытекает следующая связь между задачей (10) и задачей 2:

$$C(\sigma) = \sup\{M(\rho, \sigma) : \rho \in \mathfrak{F}_\sigma\}.$$

Данная статья посвящена исследованию свойств величин $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$, а также нахождению их в частных случаях. Как следствие, получен ряд точных неравенств для функций $f \in \mathcal{E}_{1,\sigma}^{+}$. Перейдём к формулировке результатов.

2. Формулировка основных результатов

Нами доказана следующая теорема в которой собраны основные свойства экстремальных величин $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$.

Теорема 1. *Пусть $\sigma > 0$, $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$ и $\rho(x) = \widetilde{\rho}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:
1) *выполняется неравенство*: $m(\rho, \sigma) \leqslant 0 \leqslant M(\rho, \sigma)$;
2) *если $\rho(x) \neq 0$ на некотором множестве $K \subset [-\sigma, \sigma]$ положительной меры, то имеет место неравенство*: $m(\rho, \sigma) < M(\rho, \sigma)$;
3) *если $\operatorname{Re} \rho(x) \equiv 0$, то $m(\rho, \sigma) = -M(\rho, \sigma)$.*

В ряде следующих теорем найдены величины $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ в частных случаях.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы равенства*:

$$M(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{max}, \quad m(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{min},$$

где λ_{max} и λ_{min} – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы:

$$A_n := \left(\frac{(-i)^n(-1)^{k+1}C_n^{k-1}(1+(-1)^{n+k-j})}{n+1+k-j}\right)_{k,j=1}^{n+1}. \tag{11}$$

Замечание 4. *Если $n = 3$, то несложно проверить, что наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A_3 равны:*

$$\lambda_{max} = \frac{4}{105}\sqrt{1575+84\sqrt{345}}, \quad \lambda_{min} = -\frac{4}{105}\sqrt{1575+84\sqrt{345}}.$$

Из замечания выше и неравенств (3) вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$. Тогда справедливы точные неравенства*:

$$-\frac{\sigma^4\sqrt{1575+84\sqrt{345}}}{840\pi}\|f\|_1 \leqslant f'''(t) \leqslant \frac{\sigma^4\sqrt{1575+84\sqrt{345}}}{840\pi}\|f\|_1, \ t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Теорема 3. *Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Тогда справедливы равенства*:

$$M(\rho,\sigma) = \max\{\lambda_{max}, 0\}, \quad m(\rho,\sigma) = \min\{\lambda_{min}, 0\},$$

где

$$\begin{array}{l}\lambda_{max} = \dfrac{\sigma}{2}\left(\xi+\mu+\sqrt{(\xi+\mu)^2-4\xi\mu s(\sigma,h)}\right) \\ \lambda_{min} = \dfrac{\sigma}{2}\left(\xi+\mu-\sqrt{(\xi+\mu)^2-4\xi\mu s(\sigma,h)}\right)\end{array}, \quad s(\sigma,h) := 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}.$$

Как прямое следствие получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Тогда справедливы утверждения*: 1) *Если $\xi = 1$ и $\mu = 1$, то*

$$M(\rho,\sigma) = \sigma\left(1 + \left|\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}\right|\right), \qquad m(\rho,\sigma) = 0.$$

2) *Если $\xi = -1$ и $\mu = 1$, то*

$$M(\rho,\sigma) = \sigma\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}\right)^{1/2}, \qquad m(\rho,\sigma) = -\sigma\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}\right)^{1/2}.$$

3) *Если $\xi = \cos\varphi$, $\mu = \sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и $h = 2\pi k/\sigma$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ то*

$$M(\rho,\sigma) = \begin{cases}\sigma\cos\varphi, \ \varphi \in [0,\pi/4]\cup[3\pi/2,2\pi] \\ \sigma\sin\varphi, \ \varphi \in [\pi/4,\pi] \\ 0, \ \varphi \in [\pi, 3\pi/2]\end{cases}, \ m(\rho,\sigma) = \begin{cases}\sigma\cos\varphi, \ \varphi \in [\pi/2,5\pi/4] \\ \sigma\sin\varphi, \ \varphi \in [5\pi/4,2\pi] \\ 0, \ \varphi \in [0,\pi/2].\end{cases}$$

Замечание 5. *Несложно найти функции на которых достигаются экстремальные величины в теореме 4. Например, величина $M(\rho,\sigma)$ в утверждении 1) достигается на функции $\varphi(x) = (u * \tilde{u})(x)/\|u\|_2^2$, где*

$$u(x) = \chi_{[-\sigma/2,\sigma/2]}(x)(a + be^{-ihx}), \ a,b \in \mathbb{C}, \ |a|+|b| \neq 0 \ \text{ при } h = \frac{2\pi k}{\sigma}, \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$
$$u(x) = \chi_{[-\sigma/2,\sigma/2]}(x)\left(1 + \operatorname{sign}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}\right)e^{-ihx}\right), \ \text{ при } h \neq \frac{2\pi k}{\sigma}, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Экстремальные функции для величин из утверждений 2) и 3) мы не приводим ввиду громоздкости их выражений.

Из теоремы 4 и неравенств (3) сразу получаем следующие два следствия.

Следствие 2. *Пусть $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$ и $h \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы точные неравенства*:

$$0 \leqslant f(t+h) + f(t) \leqslant \frac{\sigma}{2\pi}\left(1 + \left|\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}\right|\right)\|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Следствие 3. *Пусть $f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}$ и $h \in \mathbb{R}$. Тогда справедливо точное неравенство*:

$$|f(t+h) - f(t)| \leqslant \frac{\sigma}{2\pi}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}\right)^{1/2}\|f\|_1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Замечание 6. *Если разделить правую и левую части неравенства* (14) *на* $|h|$, *а затем устремить* $h \to 0$, *то получим неравенство* (5).

Замечание 7. *Напомним, что опорная функция непустого множества* $K \subset \mathbb{R}^2$ *определяется следующим образом:*

$$H_K(\varphi) := \sup\{x\cos\varphi + y\sin\varphi : (x,y) \in K\},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Пусть $\sigma > 0$ *и* $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Рассмотрим множество*

$$G := \{(f(0), f(2\pi k/\sigma)) : f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma},\ \|f\|_1 = 2\pi\}. \tag{15}$$

Пусть $h = 2\pi k/\sigma$ *и* $\rho(x) = \cos\varphi + \sin\varphi e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда справедливо равенство:*

$$(\Lambda_\rho f)(0) = f(0)\cos\varphi + f(2\pi k/\sigma)\sin\varphi, \quad f \in \mathcal{E}^+_{1,\sigma}.$$

Отсюда и из теоремы 4 вытекает, что

$$H_G(\varphi) = \begin{cases} \sigma\cos\varphi,\ \ \varphi \in [0,\pi/4] \cup [3\pi/2, 2\pi] \\ \sigma\sin\varphi,\ \ \varphi \in [\pi/4, \pi] \\ 0,\ \ \varphi \in [\pi, 3\pi/2] \end{cases}.$$

Так как G *является образом выпуклого множества при линейном отображении, то множество* G *само является выпуклым. Также заметим, что у замкнутого треугольника с вершинами* $(0,0)$, $(\sigma,0)$ *и* $(0,\sigma)$ *опорная функция совпадает с* H_G. *Из теоремы Хана-Банаха вытекает, что два выпуклых компакта совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их опорные функции. Отсюда получаем, что замыкание множества* G *является треугольником с вершинами* $(0,0)$, $(\sigma,0)$ *и* $(0,\sigma)$. *Сдвигая подходящим образом следующую функцию*

$$f(t) = \frac{\sigma\sin^2\left(\frac{\sigma t}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2}$$

получим, что точки $(0,0)$, $(\sigma,0)$, $(0,\sigma)$ *принадлежат множеству* G. *Отсюда следует, что* G *является замкнутым множеством.*

Таким образом, G *– замкнутый треугольник с вершинами* $(0,0)$, $(\sigma,0)$ *и* $(0,\sigma)$.

Замечание 8. *Стоит отметить, что по существу используемый способ описания множества* G *не является новым. В статье P. Delsarte, Y. Genin, Y. Kamp* [16] *подобный метод использовался при решении некоторых задач, связанных с неотрицательными тригонометрическими многочленами.*

Зная описание множества G можно получать различные "нелинейные" неравенства для функций $f \in \mathcal{E}^{+}_{1,\sigma}$. Например, из того, что функция $g(x,y) = xy$ достигает максимума на G в точке $(\sigma/2, \sigma/2)$ вытекает следующее следствие.

Следствие 4. *Пусть $f \in \mathcal{E}^{+}_{1,\sigma}$, $\|f\|_1 = 2\pi$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы точные неравенства*:

$$0 \leqslant f(t)f(t + 2\pi k/\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{4},\ t \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Теорема 5. *Пусть $\rho(x) = i\,\mathrm{sign}\,x$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы равенства*:

$$M(\rho,\sigma) = \frac{2\sigma}{\pi}, \quad m(\rho,\sigma) = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Кроме того, экстремальные величины достигаются на функциях $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x}{\sigma}}\left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right)_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Замечание 9. *Отметим, что если $\rho(x) = -i\,\mathrm{sign}\,x$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор Λ_ρ является преобразованием Гильберта $\mathcal{H}$ (см., например, [17]), т. е.*

$$(\Lambda_\rho f)(t) = (\mathcal{H}f)(t) := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(x)dx}{t-x},\ t \in \mathbb{R}.$$

Из теоремы 5 и неравенств (3) получаем следующее следствие.

Следствие 5. *Пусть $f \in \mathcal{E}^{+}_{1,\sigma}$. Тогда справедливы точные неравенства*:

$$-\frac{\sigma}{\pi^2}\|f\|_1 \leqslant (\mathcal{H}f)(t) \leqslant \frac{\sigma}{\pi^2}\|f\|_1,\ t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Далее работа устроена следующим образом. В разделе 3 приведены вспомогательные факты и утверждения. В разделах 4, 5, 6 и 7 мы докажем теоремы 1, 2, 3 и 5 соответственно.

3. Вспомогательные факты и утверждения

Отметим следующие свойства функций из $\Phi(\mathbb{R})$. Пусть f, $f_i \in \Phi(\mathbb{R})$. Тогда:

1. $|f(x+y) - f(x)|^2 \leqslant 2f(0)(f(0) - \mathrm{Re}f(y))$, $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, $\bar{f}$, $\mathrm{Re}\, f$, $f_1 f_2 \in \Phi(\mathbb{R})$, где $\lambda_i \geqslant 0$;
3. если для всех $x \in \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: g(x)$, то $g \in \Phi(\mathbb{R})$.

Свойства 1) – 3) хорошо известны (см., например, [8, 18, 19]). В 1932 году Бохнер и независимо Хинчин доказали следующий критерий положительной определённости:

Теорема 6 (Бохнер-Хинчин). *Функция $f \in \Phi(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует конечная неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{R}$ такая, что*

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixt}d\mu(t),\ x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [8, 18, 19]. Как следствие, мы получаем следующий критерий положительной определённости в терминах неотрицательности преобразования Фурье:

Следствие 6. *Если $f \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то $f \in \Phi(\mathbb{R}) \iff \widehat{f}(t) \geqslant 0$, $t \in \mathbb{R}$ и в этом случае $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$.*

4. Доказательство теоремы 1

Докажем утверждение 1). Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$. Тогда имеют место неравенства:

$$m(\rho,\sigma) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{\sigma x}{\varepsilon}\right)\rho(x)dx \leqslant M(\rho,\sigma), \quad \varepsilon \in (0,\sigma). \tag{18}$$

С другой стороны,

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{\sigma x}{\varepsilon}\right)\rho(x)dx\right| \leqslant \varphi(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|\rho(x)|dx \to 0, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ в неравенствах (18) получим требуемое.

Докажем утверждение 2). Предположим, что $m(\rho,\sigma) = M(\rho,\sigma)$. Тогда из утверждения 1) вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\rho(x)dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{F}_\sigma. \tag{19}$$

В частности, равенство (19) выполняется и для функций $\varphi_t(x) = e^{itx}(1-|x/\sigma|)_+$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $\mathcal{F}((1-|\cdot/\sigma|)_+\rho(\cdot))(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, $(1-|x/\sigma|)_+\rho(x) = 0$ п. в. на $\mathbb{R}$, и значит, $\rho(x) = 0$ п. в. на $[-\sigma,\sigma]$. Пришли к противоречию.

Докажем утверждение 3). Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ и $\operatorname{Re}\rho(x) \equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)\rho(x)dx &= -\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi(x)\operatorname{Im}\rho(x)dx + i\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Re}\varphi(x)\operatorname{Im}\rho(x)dx \\ &= -\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}\varphi(x)\operatorname{Im}\rho(x)dx.\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь мы воспользовались нечётностью функции $\operatorname{Re}\varphi(x)\operatorname{Im}\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Из (20) получаем, что $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\rho(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi(x)}\rho(x)dx$. Из замкнутости множества $\mathfrak{F}_\sigma$ относительно сопряжения следует справедливость утверждения 3).

Теорема доказана. ■

5. Доказательство теоремы 2

Пусть $\rho(x) = i^n x^n$, $x \in \mathbb{R}$, где $n \in \mathbb{N}$. Несложно проверить, что в этом этом случае справедливы равенства:

$$M(\rho,\sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} M(\rho,2), \quad m(\rho,\sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} m(\rho,2).$$

Пусть $\sigma = 2$. В этом случае оператор A_ρ конечномерный и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = (-i)^n\int\limits_{-1}^{1}(t-x)^n u(x)dx = (-i)^n\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_n^{k-1}t^{n+1-k}s_{k-1}, \quad \text{где}$$

$$s_p = \int\limits_{-1}^{1} x^p u(x)dx, \quad p = 0,\ldots,n.$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$(A_\rho u)(t) = \lambda u(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1. \tag{21}$$

Будем искать функцию $u(x)$ в следующем виде $u(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$, где $a_l \in \mathbb{C}$.

В этом случае,

$$s_p = \sum_{j=0}^{n} \frac{1+(-1)^{n+p-j}}{n+1+p-j} a_{n-j}, \quad p = 0, \dots, n.$$

Приравнивая коэффициенты в равенстве (21), получим систему $A_n \cdot a = \lambda a$, где $a := (a_0, \dots, a_n)$ и

$$A_n := \left(\frac{(-i)^n (-1)^{k+1} C_n^{k-1} (1+(-1)^{n+k-j})}{n+1+k-j} \right)_{k,j=1}^{n+1}. \tag{22}$$

Пусть λ_{max} и λ_{min} – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A_n. Покажем, что $\lambda_{min} < 0$. Предположим, что $\lambda_{min} \geqslant 0$. В этом случае $m(\rho, \sigma) = 0$. Тогда для любой функции $\varphi \in \mathfrak{F}_\sigma$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} i^n x^n \varphi(x) e^{itx} dx \geqslant 0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Из следствия 6 вытекает, что функция $\psi(x) = i^n x^n \varphi(x)$ является положительно определённой. Так как $|\psi(x)| \leqslant \psi(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ то $\varphi(x) \equiv 0$. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что $\lambda_{max} > 0$.

Таким образом, справедливы равенства:

$$M(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{max}, \quad m(\rho, \sigma) = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{n+1} \lambda_{min}.$$

Теорема доказана. ∎

6. Доказательство теоремы 3

Пусть $\rho(x) = \xi + \mu e^{ihx}$, $x \in \mathbb{R}$, где $\xi, \mu, h \in \mathbb{R}$ и $h \neq 0$. Если $\xi = 0$ или $\mu = 0$, то утверждение теоремы вытекает из случая $\rho(x) \equiv 1$. Будем предполагать, что $\xi \neq 0$ и $\mu \neq 0$. В этом случае оператор A_ρ имеет вид:

$$\begin{aligned}(A_\rho u)(t) &= \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} (\xi + \mu e^{ih(x-t)}) u(x) dx \\ &= \xi \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} u(x) dx + \mu e^{-iht} \int_{-\sigma/2}^{\sigma/2} e^{ihx} u(x) dx, \ -\sigma/2 \leqslant t \leqslant \sigma/2.\end{aligned}$$

Найдём спектр оператора A_ρ. Так как A_ρ является конечномерным оператором в бесконечномерном пространстве, то спектр состоит из нуля и отличных от нуля собственных значений.

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$. Пусть $u(t) = a + b e^{iht}$, $-\sigma/2 \leqslant t \leqslant \sigma/2$, где $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}(A_\rho u)(t) &= \sigma \xi \left(a + \frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} b \right) + \sigma \mu e^{-iht} \left(\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} a + b \right) \\ &= \lambda (a + b e^{iht}), \ -\sigma/2 \leqslant t \leqslant \sigma/2.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты в равенстве $A_\rho u = \lambda u$ при 1 и e^{iht}, получим систему:

$$\begin{pmatrix} \sigma\xi & \sigma\xi\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} \\ \sigma\mu\frac{\sin\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)} & \sigma\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \sigma(\xi+\mu)\lambda - 4\xi\mu\sigma^2 s(\sigma,h) = 0, \quad \text{где} \quad s(\sigma,h) := 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\sigma h}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma h}{2}\right)^2}. \tag{23}$$

Из самосопряжённости оператора A_ρ следует, что уравнение (23) имеет 2 вещественных корня с учётом кратности. Найдём дискриминант:

$$\frac{D}{\sigma^2} = (\xi+\mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma,h) = (\mu + (1-2s(\sigma,h))\xi)^2 + 4\xi^2 s(\sigma,h)(1-s(\sigma,h)) \geqslant 0.$$

Отсюда получаем, что корнями уравнения (23) являются:

$$\lambda_{max} = \frac{\sigma}{2}\left(\xi+\mu+\sqrt{(\xi+\mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma,h)}\right)$$
$$\lambda_{min} = \frac{\sigma}{2}\left(\xi+\mu-\sqrt{(\xi+\mu)^2 - 4\xi\mu s(\sigma,h)}\right).$$

Таким образом, $\operatorname{spec} A_\rho = \{0, \lambda_{min}, \lambda_{max}\}$. Из теоремы A вытекает утверждение теоремы 3. ■

7. Доказательство теоремы 5

Несложно проверить, что справедливы равенства:

$$M(\rho,\sigma) = \frac{\sigma}{2}M(\rho,2), \qquad m(\rho,\sigma) = \frac{\sigma}{2}m(\rho,2).$$

Пусть $\rho(x) = i\operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$ и $\sigma = 2$. В этом случае оператор A_ρ является компактным и имеет вид:

$$(A_\rho u)(t) = i\int_{-1}^{1} \operatorname{sign}(t-x)u(x)dx = i\int_{-1}^{t} u(x)dx - i\int_{t}^{1} u(x)dx, \ -1 \leqslant t \leqslant 1.$$

Найдём все $\lambda \neq 0$ при которых существуют нетривиальные решения уравнения $A_\rho u = \lambda u$, т. е. следующего интегрального уравнения:

$$i\int_{-1}^{t} u(x)dx - i\int_{t}^{1} u(x)dx = \lambda u(t), \ -1 \leqslant t \leqslant 1. \tag{24}$$

Несложно заметить, что если функция u при некотором $\lambda \neq 0$ удовлетворяет уравнению (24), то $u \in C^\infty(-1,1)$. Кроме того, подставляя $t=-1$ и $t=1$ в (24), получаем следующие краевые условия: $u(1) = -u(-1)$. Легко проверить, что функция $u(t)$ является решением уравнения (24) тогда и только тогда, когда она является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \lambda u'(t) - 2iu(t) = 0; \\ u(1) = -u(-1). \end{cases} \tag{25}$$

Общим решением первого уравнения в (25) является функция

$$u(t) = Ce^{\frac{i2t}{\lambda}},\ -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad \text{где} \ \ C \in \mathbb{C}.$$

Подставляя краевые условия, получим уравнение $\cos(2/\lambda) = 0$, решением которого являются числа

$$\lambda_k = \frac{2}{\pi/2 + \pi k},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом,

$$M(\rho, \sigma) = \frac{2\sigma}{\pi}, \qquad m(\rho, \sigma) = -\frac{2\sigma}{\pi}.$$

Непосредственным вычислением проверяется то, что величины $M(\rho, \sigma)$ и $m(\rho, \sigma)$ достигаются на паре функций $\varphi(x)$ и $\overline{\varphi(x)}$, где

$$\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi x}{\sigma}} \left(1 - \left|\frac{x}{\sigma}\right|\right)_+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана. ∎

8. Заключение

Из универсальности нижней оценки (4) нормы оператора $\Lambda_\rho : \mathcal{E}_{1,\sigma} \to \mathcal{B}_\sigma$ можно предположить, что в преобладающем большинстве случаев она является грубой. Возникает естественный вопрос, существует ли функция $\rho \in L_1^{loc}(\mathbb{R})$, $\rho(x) = \overline{\rho(-x)}$, $x \in \mathbb{R}$ такая, что неравенство (4) обращается в равенство? И если такая функция существует, то можно ли её задать в “явном” виде?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов И. И. Экстремальные задачи в классе целых функций конечной степени // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Том 23, № 2. С. 243–256.

2. Korevaar J. An inequality for entire functions of exponential type // Nieuw Arch. Wiskunde. 1949. Vol. 23., № 2. P. 55–62.

3. Горбачев Д. В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

4. Carneiro E., Milinovich M. B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.

5. Hörmander L., Bernhardsson B. An extension of Bohr's inequality // Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math. 1993. Vol. 29. P. 179–194.

6. Горбачев Д. В. Точные неравенства Бернштейна – Никольского для полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2021. Том 22, № 5. С. 58–110.

7. Манов А. Д. Об одной экстремальной задаче для положительно определённых функций // Чебышевский сб. 2021. Том 22, № 5. С. 161–171.

8. Sasvári Z. Multivariate Characteristic and Correlation Functions. Berlin, Boston: De Gruyter, 2013.

9. Siegel C. L. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremal problem // Acta Math. 1935. Vol. 65. P. 307–323.

10. Boas R. P. Jr., Kac M. Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.

11. Горбачев Д. В. Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Том 69, № 3. С. 346–352.

12. Gabardo J. P. The Turán Problem and Its Dual for Positive Definite Functions Supported on a Ball in Rd // J. Fourier Analysis and Applictions. 2024. Vol. 30, № 11.

13. Révész S. G. Turán's extremal problem on locally compact abelian groups // Anal. Math. 2011. Vol. 37, № 1. P. 15–50.

14. Szász O. Über harmonische Funktionen und L-Formen // Math. Zeitschr. 1918. Vol. 1. P. 149–162.

15. Garsia A., Rodemich E., Rumsey H. On Some Extremal Positive Definite Functions // Journal of Mathematics and Mechanics. 1969. Vol. 18, № 9, P. 805–834.

16. Delsarte P., Genin Y., Kamp Y. Interpolation Type Problems in the Class of Positive Trigonometric Polynomials of Fixed Order // Math. Control Signal Systems. 1989. Vol. 2. P. 171–185.

17. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

18. Sasvári Z. Positive Definite and Definitizable Functions. Berlin: Akad. Verl., 1994.

19. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis and Approximation of Functions. Boston, Dordrecht, London: Kluwer-Springer, 2004.

REFERENCES

1. Ibragimov, I. I. 1959. "Extremal problems in a class of entire functions of finite degree", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 23, no. 2, pp. 243–256. (in Russ.)

2. Korevaar, J. 1949. "An inequality for entire functions of exponential type", *Nieuw Arch. Wiskunde.*, vol. 23, no. 2, pp. 55–62.

3. Gorbachev, D. V. 2005. "An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 11, no. 2, pp. 72–91. (in Russ.)

4. Carneiro, E., Milinovich, M. B. & Soundararajan, K. 2019. "Fourier optimization and prime gaps", *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.

5. Hörmander, L.& Bernhardsson, B. 1993. "An extension of Bohr's inequality", *Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math.*, vol. 29, pp. 179–194.

6. Gorbachev, D. V. 2021. "Sharp Bernstein–Nikolskii inequalities for polynomials and entire functions of exponential type", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 58–110. (in Russ.)

7. Manov, A. D. 2021. "On an extremal problem for positive definite functions", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 22, no. 5, pp. 161–171. (in Russ.)

8. Sasvári, Z. 2013. “Multivariate Characteristic and Correlation Functions”, *De Gruyter*, Berlin–Boston.

9. Siegel, C. L. 1935. “Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremal problem”, *Acta Math.*, vol. 65. pp. 307–323.

10. Boas, R. P. Jr. & Kac, M. 1945. “Inequalities for Fourier transforms of positive functions”, *Duke Math. J.*, vol. 12, no. 1, pp. 189–206.

11. Gorbachev, D. V. 2001. “Extremum Problem for Periodic Functions Supported in a Ball”, *Math. Notes.*, vol. 69, no. 3, pp. 313–319.

12. Gabardo, J. P. 2024. “The Turán Problem and Its Dual for Positive Definite Functions Supported on a Ball in Rd”, *J. Fourier Analysis and Applictions*, vol. 30, no. 11.

13. Révész, S. G. 2011. “Turán’s extremal problem on locally compact abelian groups”, *Anal. Math.*, vol. 37, no. 1, pp. 15–50.

14. Szász, O. 1918. “Über harmonische Funktionen und L-Formen”, *Math. Zeitschr.*, vol. 1, pp. 149–162.

15. Garsia, A., Rodemich, E. & Rumsey, H. 1969. “On Some Extremal Positive Definite Functions”, *Journal of Mathematics and Mechanics*, vol. 18, no. 9, pp. 805–834.

16. Delsarte, P., Genin, Y. & Kamp, Y. 1989. “Interpolation Type Problems in the Class of Positive Trigonometric Polynomials of Fixed Order”, *Math. Control Signal Systems*, vol. 2, pp. 171–185.

17. Stein, E. 1970. “Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions”, *Princeton University Press.*

18. Sasvári, Z. 1994. “Positive Definite and Definitizable Functions”, *Akad. Verl.*, Berlin.

19. Trigub, R. M. & Belinsky, E. S. 2004. “Fourier Analysis and Approximation of Functions”, *Kluwer-Springer*, Boston–Dordrecht–London.

Получено: 19.11.2024
Принято в печать: 10.03.2025