ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-35-46

**Алгебраические сетки и их приложение к численному решению
линейных интегральных уравнений — II**

Н. М. Добровольский, А. С. Подолян, Е. М. Рарова, И. Н. Балаба

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobvol@tspu.ru

Подолян Алена Сергеевна — аспирант, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Рарова Елена Михайловна — старший преподаватель, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rarova82@mail.ru

Балаба Ирина Николаевна — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Аннотация

Работа является новой редакцией предыдущей работы авторов на эту тему. Существенное улучшение результатов предыдущей статьи связано с использованием весовых функций для перехода от интеграла меньшей размерности к большей.

Такой переход оказался необходимым, чтобы получить новые оценки погрешности приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода методом итерации с использованием алгебраических сеток.

Суть этого подхода заключается в том, что при приближенном вычислении решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода используется частичная сумма ряда Неймана, состоящего из интегралов разной кратности. При использовании различных алгебраических сеток, соответствующим различным чисто вещественным полям и одному параметру растяжения, оказывается, что для меньшей размерности будет использоваться меньшее количество узлов алгебраической сетки, а поэтому и точность вычисления будет меньшей. Чтобы не решать сложную задачу оптимизации числа узлов для разных размерностей, в данной работе предложен подход, когда все интегралы сводятся к одному и для него используется единая алгебраическая сетка.

Второй положительный эффект такого подхода связан с минимизацией вычисления значений ядра уравнения Фредгольма II рода за счет применения схемы Горнера. В работе рассмотрены два способа выбора чисто-вещественного алгебраического поля. Первый способ основан на задании неприводимого многочлена с целыми коэффициентами, у которого все корни — вещественные числа. Второй способ основан на использовании башни квадратичных полей.

При обоих способах выбора чисто-вещественного алгебраического поля нам удалось использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных. Важную роль при этом сыграла весовая функция, которая позволяет заменить интеграл от функции из класса E_s^α по кубу G_s на интеграл от функции из класса $E_s^{\alpha,0}[-1, 1]$ по кубу K_s . При этом важно отметить, что новая функция обращается в ноль на границе этого куба.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма II рода, метод итерации, алгебраические сетки.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Добровольский Н. М., Подолян А. С., Рарова Е. М., Балаба И. Н. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений — II // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 35–46.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-35-46

Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations — II

N. M. Dobrovol'skii, A. S. Podolyan, E. M. Rarova, I. N. Balaba

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Podolyan Alyona Sergeevna — postgraduate student, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: alena.balabaeva.93@mail.ru

Rarova Elena Mikhailovna — senior lecturer, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: rarova82@mail.ru

Balaba Irina Nikolaevna — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: ibalaba@mail.ru

Abstract

The paper is a new edition of the authors' previous work on this topic. A significant improvement in the results of the previous article is associated with the use of weight functions for the transition from an integral of lower to higher dimension.

Such a transition turned out to be necessary to obtain new estimates of the error of the approximate solution of the Fredholm integral equation of the second kind by the iteration method using algebraic grids.

The essence of this approach is that in the approximate calculation of the solution of the Fredholm integral equation of the second kind, a partial sum of the Neumann series consisting of integrals of different multiplicities is used. When using different algebraic grids corresponding to different purely real fields and one stretching parameter, it turns out that for a lower dimension, a smaller number of nodes of the algebraic grid will be used, and therefore the accuracy of the calculation will be lower. In order not to solve the complex problem of optimizing the number of nodes for different dimensions, this paper proposes an approach in which all integrals are reduced to one and a single algebraic grid is used for it. The second positive effect of this approach is related to the minimization of the calculation of the values of the kernel of the Fredholm equation of the second kind due to the use of Horner's scheme.

The paper considers two methods for choosing a purely real algebraic field. The first method is based on specifying an irreducible polynomial with integer coefficients, all of whose roots are real numbers. The second method is based on using a tower of quadratic fields.

With both methods of choosing a purely real algebraic field, we were able to use a large-dimensional algebraic grid to integrate a function of a smaller number of variables. An important role in this was played by the weight function, which allows replacing the integral of a function from the class E_s^α over the cube G_s with the integral of a function from the class $E_s^{\alpha,0}[-1, 1]$ over the cube K_s . It is important to note that the new function goes to zero on the boundary of this cube.

Keywords: Fredholm integral equation of the second kind, iteration method, algebraic grids.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

Dobrovolskii, N. M., Podolyan, A. S., Rarova, E. M., Balaba, I. N. 2025, “Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations — II”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 35–46.

1. Введение

В работе [2] рассматривался вопрос приложения алгебраических сеток к численному решению линейных интегральных уравнений. В ней отмечалось, что одним из важных классов интегральных уравнений с теоретической и практической точек зрения является уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (1)$$

где $G_s = [0; 1]^s$.

Характерная особенность уравнения (1) — его линейность: неизвестная функция φ входит в него линейно и на неё действует линейный интегральный оператор с ядром $K_s(\vec{t}, \vec{u})$.

Так как теоретико-числовой метод в приближенном анализе прежде всего предназначен для решения вопросов для периодического случая, то мы будем исследовать уравнение (1) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$ ¹. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

Первые работы по применению теоретико-числовых методов для приближенного решения уравнение (1) принадлежат Н. М. Коробову (см. [3], [4]). Современные результаты в этой области получены в работе [6], на которую мы опирались в работе [2].

Целью данной работы — получить новые вычислительные схемы приближенного решения уравнение Фредгольма второго рода методом итерации с применением алгебраических сеток. Как известно, погрешности приближенного интегрирования для алгебраических сеток имеют на классе E_s^α наилучший порядок, поэтому переход от параллелепипедальных сеток к алгебраическим дает лучшие порядки убывания погрешности. Вторая цель связана с тем, что при использовании башни квадратичных полей приходится использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных и возникает естественный вопрос, а нельзя ли в этом случае улучшить оценку погрешности интегрирования и упростить саму квадратурную формулу с весами и алгебраической сеткой?

2. Необходимые сведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.

¹Определение классов см. [4] стр. 48 — 49.

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1]^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \quad (2)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \text{ при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (3)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B \cdot (\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \text{ для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (4)$$

Если выполнены условия (2) и (3), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как указано в работе [5] весовую функцию $\rho(\vec{x})$ нетрудно построить с помощью гладкой функции одной переменной $\rho(x)$ с помощью равенства $\rho(\vec{x}) = \rho(x_1) \dots \rho(x_s)$, если от функции $\rho(x)$ потребовать выполнение следующих условий:

1. $\rho(x) = 0$ при $|x| \geq 1$,
2. $\rho(x) + \rho(x - 1) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$,
3. $\left| \int_{-1}^1 \rho(x) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq B \cdot (\bar{\sigma})^{-r}$ для любого $\sigma \in \mathbb{R}$.

В этом случае функция $\rho(\vec{x})$ будет весовой функцией порядка r с константой B^s .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где } \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leq CB \cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где } c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda} (\bar{x}_1 \dots \bar{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (5)$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (5) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1 \dots N$) называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы.

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода, то есть уравнение вида

$$\varphi(\vec{t}) = \lambda \iint_{G_s} K_s(\vec{t}, \vec{u}) \varphi(\vec{u}) d\vec{u} + f(\vec{t}), \quad (7)$$

где $G_s = [0; 1]^s$. Мы будем исследовать уравнение (7) для случая периодических функций, когда свободный член $f(\vec{t})$ и ядро $K_s(\vec{t}, \vec{u})$ этого уравнения принадлежат, соответственно, классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$. Ясно, что и решение $\varphi(\vec{t})$ будет являться периодической функцией.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q < 1$ и

$$|\lambda| \leq \frac{q}{\|K_s(\vec{t}, \vec{u})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(2\alpha))^s}. \quad (8)$$

Тогда уравнение Фредгольма (7) имеет единственное решение и для него справедливо представление в виде ряда Неймана

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) &= f(\vec{t}) + \\ &+ \sum_{\vec{k}=1}^{\infty} \lambda^k \iint_{G_{s_k}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k \end{aligned}$$

и справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{t}) &= f(\vec{t}) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{s_k}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k + \\ &+ \frac{q^{n+1} \cdot \Theta \cdot \|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha}}{1 - q}, \quad \text{где } |\Theta| \leq (1 + 2\zeta(2\alpha))^s. \end{aligned}$$

Доказательство. См. [6].

Для вычисления кратных интегралов в работе [2] были применены квадратурные формулы с алгебраическими сетками. Для этого были использованы два разных подхода, которые впервые были описаны М. И. Ляминам [8].

Нам потребуется следующая лемма:

ЛЕММА 1. Для любого действительного σ и $1 < \gamma \leq r$ для величины $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$, заданной равенством

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{-\gamma} (\overline{m} + \sigma)^{-r},$$

выполняется неравенство

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leq \frac{2(1 + \zeta(\gamma)) + (1 + 2\zeta(\gamma))2^\gamma}{(\overline{\sigma})^\gamma}. \quad (9)$$

Доказательство. См. [1].

3. Организация вычислений

В работе [6] был использован интересный подход для сокращения числа вычислений значений ядра уравнения Фредгольма и свободного члена. В этом подходе использовался тот факт, что проекция параллелепипедальной сетки на любую координатную гиперплоскость снова является параллелепипедальной сеткой, но меньшей размерности. Этим свойством алгебраические сетки не обладают.

В работе [2] было сделано следующее замечание:

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Остановимся на вопросе, как применять сетку для размерности 2^l к вычислению интеграла по кубу размерности sk , где $sk < 2^l$.

Пусть нам дана функция $f(\vec{x})$ из класса E_{sk}^α и требуется вычислить интеграл

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Рассмотрим функцию $g(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x} \in G_{sk}$, $\vec{y} \in G_{2^l - sk}$, заданную равенством

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \quad \text{для любого } \vec{y} \in G_{2^l - sk}.$$

Ясно, что

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_{G_{2^l}} g(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}, \quad g(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2^l}^\alpha.$$

Отсюда следует, как применять сетку большей размерности для вычисления кратного интеграла меньшей размерности.

Оказывается, что в случае алгебраических сеток этот подход можно существенно усилить с большим эффектом по точности вычисления.

Рассмотрим s -мерный куб $K_s = \{\vec{x} \mid |x_j| \leq 1 \ (j = 1, \dots, s)\}$.

Определим на кубе K_{2^l} функцию $h(\vec{x}, \vec{y})$, где $\vec{x} \in K_{sk}$, $\vec{y} \in K_{2^l - sk}$, заданную равенством

$$h(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \prod_{j=1}^{2^l - sk} \rho(y_j) \quad \text{для любых } \vec{x} \in K_{sk}, \vec{y} \in K_{2^l - sk}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу $E_s^{\alpha,0}[-1,1]$, если она удовлетворяет условиям:

1. $f(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \notin K_s$,
2. $f(\vec{x}) = 0$ при $\max_{j=1,\dots,s} |x_j| = 1$,
3. $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} c(\vec{m}) e^{\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$ и для любого $\vec{m}$ выполняется неравенство

$$|c(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,0}[-1,1]}}{\overline{m_1}^\alpha \cdot \dots \cdot \overline{m_s}^\alpha}.$$

ЛЕММА 2. Для любой функции $f(\vec{x}) \in E_{sk}^\alpha$, $\alpha > 1$ и весовой функции $\rho(x)$ порядка $r \geq \alpha$ с константой B функция $h(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2l}^{\alpha,0}[-1,1]$,

$$\|h(\vec{x}, \vec{y})\|_{E_{2l}^{\alpha,0}[-1,1]} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} \cdot B^{2l} (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha))2^\alpha)^{sk}$$

и справедливо равенство

$$\iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iint_{K_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем равенство интегралов. Действительно,

$$\int_{-1}^1 \rho(x) dx = \int_0^1 (\rho(x) + \rho(x-1)) dx = \int_0^1 dx = 1, \quad \iint_{K_{2l-sk}} \prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) d\vec{y} = 1.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \iint_{K_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) d\vec{x} &= \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \iint_{G_{sk}} f(\vec{x} + \vec{\varepsilon}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j + \varepsilon_j) d\vec{x} = \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \sum_{\varepsilon=-1}^0 \rho(x_j + \varepsilon) d\vec{x} = \\ &= \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \iint_{K_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} d\vec{y} = \iint_{K_{sk}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) d\vec{x} \iint_{K_{2l-sk}} \prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) d\vec{y} = \iint_{G_{sk}} f(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Перейдём теперь к изучению ряда Фурье для функции $h(\vec{x}, \vec{y}) \in E_{2l}^\alpha[-1,1]$ по многомерному кубу K_{2l} .

Пусть функция $f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$, $c(\vec{m}) = \int \dots \int_{G_{sk}} f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x}$, $|c(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha}}{\overline{m_1}^\alpha \cdot \dots \cdot \overline{m_{sk}}^\alpha}$.

Тогда $h(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^{sk}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^{2l-sk}} c^*(\vec{m}, \vec{n}) e^{\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))}$ и $c^*(\vec{m}, \vec{n}) = \int \dots \int_{G_{2l}} h(\vec{x}, \vec{y}) e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y}$.

Далее имеем:

$$\begin{aligned} c^*(\vec{m}, \vec{n}) &= \int \dots \int_{G_{2l}} f(\vec{x}) \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) \right) e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{a}) \int \dots \int_{G_{2l}} \prod_{j=1}^{sk} \rho(x_j) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \rho(y_j) \right) e^{2\pi i(\vec{a}, \vec{x})} e^{-\pi i((\vec{m}, \vec{x}) + (\vec{n}, \vec{y}))} d\vec{x} d\vec{y} = \\ &= \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} c(\vec{a}) \left(\prod_{j=1}^{sk} \int_{-1}^1 \rho(x_j) e^{\pi i(2a_j - m_j)x_j} dx_j \right) \left(\prod_{j=1}^{2l-sk} \int_{-1}^1 \rho(y_j) e^{-\pi i n_j y_j} dy_j \right). \end{aligned}$$

Пользуясь определением весовой функции, получим

$$\begin{aligned} |c^*(\vec{m}, \vec{n})| &\leq \sum_{\vec{a} \in \mathbb{Z}^{sk}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha}}{a_1^\alpha \cdot \dots \cdot a_{sk}^\alpha} \left(\prod_{j=1}^{sk} \frac{B}{2a_j - m_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{B}{n_j} \right) = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} \left(\prod_{j=1}^{sk} \sum_{a_j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_j^\alpha 2a_j - m_j} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j} \right). \end{aligned}$$

Применим лемму 1 к сомножителям первого произведения, получим:

$$\begin{aligned} |c^*(\vec{m}, \vec{n})| &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} \prod_{j=1}^{sk} \frac{2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha))2^\alpha}{m_j^\alpha} \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j} \right) \leq \\ &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_{sk}^\alpha} B^{2^l} (2(1 + \zeta(\alpha)) + (1 + 2\zeta(\alpha))2^\alpha)^{sk} \left(\prod_{j=1}^{sk} \frac{1}{m_j^\alpha} \right) \left(\prod_{j=1}^{2^l - sk} \frac{1}{n_j^\alpha} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

4. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — первый подход

Напомним, что первый подход основан на том, что для каждой размерности sk , где $k = 1, 2, \dots, n$, выбирается свой неприводимый полином

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{sk-1} a_\nu x^\nu + x^{sk}, \quad (10)$$

у которого все корни действительные. В качестве такого многочлена можно взять многочлен

$$P_k(x) = x(x-2)(x-4)\dots(x-2sk+2) - 1.$$

Действительно, согласно задаче 47 из [7] стр. 68 имеем

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — различные целые числа. Тогда многочлен

$$P_{1, \vec{a}}(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7] стр. 251.

ЛЕММА 3. Пусть $n = 2m$ — четное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\nu} + a_{2\nu+1}}{2} \right) > 1 \quad (\nu = 1, \dots, m-1),$$

тогда все корни многочлена $P_{1, \vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $n = 2m + 1$ — нечетное, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа и выполнены неравенства

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\nu-1} + a_{2\nu}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

тогда все корни многочлена $P_{1,\vec{a}}(x)$ — вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ТЕОРЕМА 3. Пусть натуральное $n > 1$, $\varepsilon = 2 \left\{ \frac{n}{2} \right\}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — различные целые числа, для которых выполнено условие

$$\prod_{\nu=1}^n \left(a_\nu - \frac{a_{2\nu-\varepsilon} + a_{2\nu+1-\varepsilon}}{2} \right) > 1 \quad (\mu = 1, \dots, m + \varepsilon - 1).$$

Тогда многочлен

$$P_{1,\vec{a}}(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n) - 1$$

неприводим над $\mathbb{Q}$ и все его корни вещественные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Если для приближенного вычисления интеграла

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_k(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O \left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{s-1} t}{t^{s\alpha}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

Обозначим через $SN_n(\vec{t})$ n -ую частичную сумму ряда Неймана

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \sum_{k=1}^n \lambda^k \iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k.$$

Положим $\rho(\vec{u}) = \prod_{j=1}^s \rho(u_j)$ для $\vec{u} = (u_1, \dots, u_s)$. Тогда частичную сумму ряда Неймана можно переписать в виде

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \iint_{K_{sn}} \sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) \prod_{j=1}^n \rho(\vec{u}_j) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_n. \quad (11)$$

Заметим, что сумму

$$\sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k)$$

можно расписать по схеме Горнера

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) = \\ & = \lambda K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) (f(\vec{u}_1) + \lambda K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) (f(\vec{u}_2) + \dots + \lambda K_s(\vec{u}_{n-1}, \vec{u}_n) f(\vec{u}_n)) \dots). \end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления одного приближенного значения частичной суммы ряда Неймана интегрального уравнения потребуется вычислить n значений ядра и $n + 1$ значений свободного члена.

Если же использовать определение частичной суммы, то объем вычислений увеличится, а именно, потребуется вычислить $n \frac{n+1}{2}$ значений ядра и $n + 1$ значений свободного члена.

Также заметим, что если использовать квадратурную формулу, соответствующую решетке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и многочлену $P_{\vec{a}}(x) = P_n(x)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{sn-1} t}{t^{sn\alpha}}\right).$$

увеличение точности можно объяснить достаточно просто. В теореме 4 в каждом интеграле используется своя квадратурная формула из сетки из $O(t^{sk})$ точек, а применение схемы Горнера и аналога леммы 2 позволяет использовать одну квадратурную формулу из сетки из $O(t^{sn})$ точек.

5. Выбор чисто-вещественного алгебраического поля — второй подход

Напомним, что второй подход связан с использованием башни полей Дирихле:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \dots, \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p_m}),$$

где p_m — m -ое простое число и $2^{m-1} < sn \leq 2^m$.

Пусть натуральное l_k выбрано из условия $2^{l-1} < sk \leq 2^l$. Рассмотрим чисто-вещественное кольцо целых алгебраических чисел

$$\mathbb{Z}_l = \mathbb{Z}[\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}]$$

и соответствующее чисто-вещественное алгебраическое поле степени 2^l

$$\mathbb{Q}_l = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{p_l}).$$

Через $\Lambda_l(t)$ обозначим алгебраическую решётку

$$\Lambda_l(t) = \{\vec{x} = (t\Theta_1, \dots, t\Theta_{2^l}) \mid \Theta = \Theta_1 \in \mathbb{Z}_l\},$$

где $\Theta_1, \dots, \Theta_{2^l}$ — алгебраически сопряженные числа.

ТЕОРЕМА 5. *Если для приближенного вычисления интеграла*

$$\iint_{G_{sk}} K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) K_s(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \dots K_s(\vec{u}_{k-1}, \vec{u}_k) f(\vec{u}_k) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_k$$

использовать квадратурные формулы, соответствующие решетке $\Lambda_l(t)$, то погрешность приближенного решения уравнения Фредгольма второго рода будет

$$\|f(\vec{t})\|_{E_s^\alpha} \cdot O\left(\frac{q^{n+1}}{1-q} + \frac{\ln^{2^m-1} t}{t^{2^m\alpha}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

Для экономного вычисления частичной суммы ряда Неймана при втором подходе формулу (11) необходимо видоизменить в соответствии с леммой 2 следующим образом:

$$SN_n(\vec{t}) = f(\vec{t}) + \iint_{K_{2^m}} \sum_{k=1}^n \lambda^k K_s(\vec{t}, \vec{u}_1) \left(\prod_{j=1}^{k-1} K_s(\vec{u}_j, \vec{u}_{j+1}) \right) f(\vec{u}_k) \prod_{j=1}^n \rho(\vec{u}_j) \prod_{j=1}^{2^m-sn} \rho(\vec{y}_j) d\vec{u}_1 \dots d\vec{u}_n dy_1 \dots dy_{2^m-sn}.$$

6. Заключение

При обоих способах выбора чисто-вещественного алгебраического поля нам удалось использовать алгебраическую сетку большой размерности для интегрирования функции меньшего числа переменных. Важную роль при этом сыграла весовая функция, которая позволяет заменить интеграл от функции из класса E_s^α по кубу G_s на интеграл от функции из класса $E_s^{\alpha,0}[-1,1]$ по кубу K_s . При этом важно отметить, что новая функция обращается в ноль на границе этого куба.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич, "О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул", Чебышевский сб., 10:2 (2009), 10–54.
2. Н. М. Добровольский, А. С. Подолян. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Чебышевский сборник, 2022, т. 23, вып. 4, с. 162–169.
3. Коробов Н. М. О приближенном решении интегральных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, N 2. С. 235–238.
4. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.
5. Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток с бесконечно дифференцируемыми весами // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22, вып. 3, С. 166–178.
6. Ребров Е. Д., Селиванов С. В. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма II рода // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 2. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2012. С. 83 - 92.
7. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1987. 310 с.

8. Лямин М.И. Алгебраические сетки и их приложение к численному решению линейных интегральных уравнений // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тула, 25–30 мая 2015 года / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, 2015. – С. 351-354.

REFERENCES

1. Gertsog, A.S., Rebrov, E.D., Trikolich, E.V., 2009, “On the method of K.K. Frolov in the theory of quadrature formulas”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 10, no. 2, pp. 10-54.
2. Dobrovolskii, N.M., Podolyan, A.S., 2022, “Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 162-169.
3. Korobov, N.M., 1959, “On the approximate solution of integral equations”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 128, no. 2, pp. 235-238 [in Russian].
4. Korobov, N.M., 2004, *Number-theoretic methods in approximate analysis*, 2nd ed., Moscow: ICNMO [in Russian].
5. Rarova, E.M., Dobrovolskii, N.N., Rebrova, I.Yu., Dobrovolskii, N.M., 2021, “Trigonometric sums of grids of algebraic lattices with infinitely differentiable weights”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 166-178.
6. Rebrov, E.D., Selivanov, S.V., 2012, “On the approximate solution of the Fredholm integral equation of the II kind”, *Izvestiya Tula State University. Natural sciences*, no. 2, pp. 83-92 [in Russian].
7. Sadovnichy, V.A., Grigoryan, A.A., Konyagin, S.V., 1987, *Problems of student mathematical Olympiads*, Moscow: Moscow University Press, 310 p. [in Russian].
8. Lyamin, M.I., 2015, “Algebraic grids and their application to the numerical solution of linear integral equations”, in *Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications: Proceedings of the XIII International Conference*, Tula: Tula State Pedagogical University, pp. 351-354 [in Russian].

Получено: 25.12.2024

Принято в печать: 10.03.2025