

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 26. Выпуск 1.

УДК 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-5-24

**85-летие профессора
Владимира Николаевича Безверхнего**

И. В. Добрынина, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, Е. В. Манохин, Е. С. Логачева

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации (Тульский филиал) (г. Тула).

e-mail: emanfnun@mail.ru

Логачева Елена Сергеевна — кандидат физико-математических наук, Центр образования 38 (Химический лицей) (г. Тула).

e-mail: logacheva-es@mail.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается научная и педагогическая деятельность профессора, доктора физико-математических наук Владимира Николаевича Безверхнего, внесшего значительный вклад в исследования алгоритмических проблем теории групп и полугрупп. Освещаются основные периоды жизни известного ученого.

В. Н. Безверхний продолжительное время работал в Тульском государственном педагогическом университете имени Л. Н. Толстого, руководил научным семинаром по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп и аспирантурой по комбинаторной теории групп.

Продолжая дело профессора М. Д. Гриндлингера, являлся научным руководителем восьми кандидатских и научным консультантом одной докторской диссертаций.

Ключевые слова: группа, подгруппа, образующие, определяющие соотношения, алгоритмические проблемы.

Библиография: 46 названий.

Для цитирования:

Добрынина И. В., Добровольский Н. М., Реброва И. В., Манохин Е. В., Логачева Е. С. 85-летие профессора Владимира Николаевича Безверхнего // Чебышевский сборник, 2025, т. 26, вып. 1, с. 5–24.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 26. No. 1.

UDC 539.12.01

DOI 10.22405/2226-8383-2025-26-1-5-24

85-th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii

I. V. Dobrynina, N. M. Dobrovol'skii, I. Y. Rebrova, E. V. Manokhin, E. S. Logacheva

Dobrynina Irina Vasilyevna — doctor of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communications and Informatics (Moscow).

e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Dobrovol'skii Nikolay Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Manokhin Evgeny Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, professor, Financial University under the Government of the Russian Federation (Tula Branch) (Tula).

e-mail: emanfinun@mail.ru

Logacheva Elena Sergeevna — candidate of physical and mathematical sciences, Education center 38 (Chemical Lyceum) (Tula).

e-mail: logacheva-es@mail.ru

Abstract

This article examines the scientific and pedagogical activities of Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii, who made a significant contribution to the research of algorithmic problems of the theory of groups and semigroups.

The main periods of the famous scientist's life are highlighted.

V. N. Bezverkhonii worked for a long time at Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University, led a scientific seminar on algorithmic problems of the theory of groups and semigroups and a postgraduate course in combinatorial group theory.

Continuing the work of Professor M. D. Grindlinger, he was the supervisor of eight PhD and scientific advisor to one doctoral dissertation.

Keywords: group, subgroup, generators, defining relations, algorithmic problems

Bibliography: 46 titles.

For citation:

Dobrynina, I. V., Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. Y., Manokhin, E. V., Logacheva, E. S. 2025, 85-th anniversary of professor Vladimir Nikolaevich Bezverkhonii *Chebyshevskii sbornik*, vol. 26, no. 1, pp. 5–24.

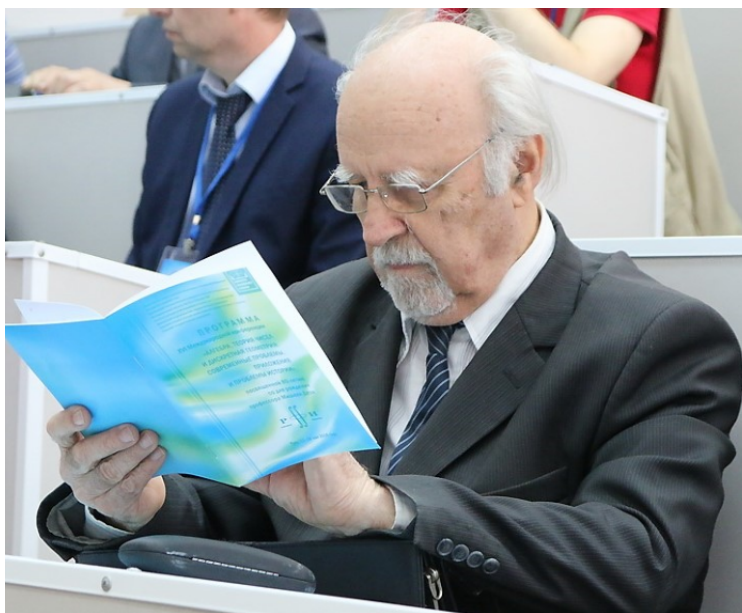


Рис. 1: В. Н. Безверхний

1. Введение

Родился Владимир Николаевич Безверхний 31 января 1940 года в г. Севастополь Крымской области в семье военнослужащего.

С 1947 по 1957 год учился в общеобразовательной школе. Еще в годы учебы проявлял математические способности, хорошо рисовал, увлекался чтением книг и любил музыку, в основном, серьёзную, неплохо знал оперные произведения. После окончания школы два года работал слесарем на судоремонтном заводе в г. Севастополь. С 1959 по 1962 годы служил в рядах Советской Армии. После окончания службы в 1962 году, поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого, где был одним из лучших студентов. Учился увлечённо, читал много математической литературы, не ограничиваясь только программным материалом. Был победителем математических олимпиад. Окончил институт в 1966 году.

2. Трудовая и научная деятельность

С сентября 1966 по январь 1968 года работал ассистентом на кафедре высшей математики Рязанского сельскохозяйственного института, после чего перешёл на ту же должность на кафедру высшей математики Тульского политехнического института.

В ноябре 1968 года поступил в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого, научный руководитель — профессор Мартин Давидович Гриндлингер.

После окончания аспирантуры, с ноября 1971 года, вернулся на кафедру высшей математики Тульского политехнического института на должность ассистента.

В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему «Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп» в Ленинградском государственном педагогическом институте им. А. И. Герцена.



Рис. 2: М. Д. Гриндлингер

В 1975 году по конкурсу избран на должность старшего преподавателя на кафедру высшей математики Тульского высшего артиллерийского инженерного училища. С 1979 года — доцент этой кафедры, а с 1985 по июнь 1988 года — заведующий кафедрой.

Владимир Николаевич вёл все виды занятий по курсу высшей математики: аналитическую геометрию и линейную алгебру, математический анализ, теорию вероятностей и др.

В. Н. Безверхний активно поддерживал и всячески содействовал изданию в ТГПИ им. Л. Н. Толстого математических сборников научных трудов, тесно сотрудничая с их главным редактором М. Д. Гриндлингером, причем с 1983 года был его заместителем, а в 1994-2001 годах — главным редактором.

Под руководством М. Д. Гриндлингера и В. Н. Безверхнего выпущены:

- Ученые записки математических кафедр (под общей редакцией М. Д. Гриндлингера, 1970 год, 310 стр.);
- Вопросы теории групп и полугрупп (1972 год, 200 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (Межвузовский сборник научных трудов, 1981 год, 133 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложения (1983 год, 120 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1986 год, 124 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1990 год, 183 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1991 год, 162 стр.);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (1994 год, 132 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний);
- Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп (2001 год, 200 стр., отв. редактор — проф. В. Н. Безверхний).

С 24 ноября 1988 г. доцент кафедры математического анализа ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

2 сентября 1991 г. переведен на должность доцента кафедры алгебры, 25 июня 1992 г. избран на должность профессора этой же кафедры. В 1993 году В. Н. Безверхний стал руководителем аспирантуры по специальности 01.01.06. – математическая логика, алгебра и теория чисел. По его инициативе на факультете появилась традиция приглашать в комиссию по приёму кандидатских экзаменов у аспирантов профессора МГУ А. Л. Шмелькина, что существенно поднимало планку требовательности и качество знаний аспирантов.

Владимир Николаевич установил тесные научные контакты с алгебраистами МГУ им. М. В. Ломоносова, Московского педагогического государственного университета, Ленинградского педагогического университета им. А. И. Герцена, Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова, Ивановского государственного университета.

Благодаря В. Н. Безверхнему (и декану факультета математики и информатики А. Е. Устьяну), к чтению лекций для студентов и аспирантов на математический факультет приглашали известных учёных, докторов наук и профессоров, таких как А. Л. Шмелькин, В. Н. Латышев, В. Н. Чубариков, М. М. Глухов и других.

С 27 июня 1995 г. В. Н. Безверхний был переведён на должность старшего научного сотрудника для завершения докторской диссертации. Основанием служило письмо профессора кафедры высшей алгебры МГУ А. Л. Шмелькина, который считал, что полученные и опубликованные в центральных математических журналах результаты В. Н. Безверхнего по решению проблем вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп составляют не менее 70% докторской диссертации.



Рис. 3: В. Н. Безверхний и А. Л. Шмелькин

Срок пребывания на должности старшего научного сотрудника — с 1 июля 1996 г. по 31 августа 1997 г.

За период творческого отпуска Владимир Николаевич подготовил докторскую диссертацию. Она состоит из шести глав и содержит 400 страниц. Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории групп под руководством профессоров А. Л. Шмелькина и А. Ю. Ольшанского, на научно-исследовательском семинаре по алгебре в МГУ, а также на международных конференциях в Новосибирске (1989), Туле (1996), Санкт-Петербурге (1997).



Рис. 4: А. Е. Устьян (слева), В. Н. Безверхний (в центре) и А. Ю. Ольшанский (справа) на XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза

В 1999 году В. Н. Безверхний защитил докторскую диссертацию на тему «Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп» в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Степень доктора физико-математических наук присвоена в 1999 году.

С 1 февраля 2001 года по июль 2002 года Владимир Николаевич заведовал кафедрой алгебры и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

В. Н. Безверхний на посту заведующего кафедрой показал себя исключительным руководителем кафедрой. Он создал на кафедре доброжелательную, отличную рабочую обстановку для работы и творческого роста членов кафедры. Под его руководством кафедра динамично развивалась.

С 8 апреля 2002 года до 2022 года — профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России. Вел курсы по высшей математике, дифференциальным уравнениям, теории вероятностей и математической статистике, до 2024 года продолжал руководить аспирантурой в Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого.

В 2004 году В. Н. Безверхнему присуждено ученое звание профессора.

В настоящее время работает профессором кафедры мировой экономики и таможенной статистики в Российской таможенной академии.

Следует отметить талант В. Н. Безверхнего не только как ученого, но и как педагога. Его лекции интересны, содержательны и одновременно построены с большим педагогическим тактом. Удивительна его способность находить талантливых молодых людей и ставить им математические задачи, соответствующие их наклонностям и возможностям.

Интеллигентность, доброжелательность и требовательность, душевные и профессиональные качества снискали уважение не только студентов и преподавателей, но и всех тех, кому довелось сотрудничать с Владимиром Николаевичем.

Награжден грамотой Министерства образования. Отличник народного просвещения.

Руководил проектами № 00-01-00767-а, № 03-01-00198-а, №15-41-03222 р_а, №19-41-710002

р_а, поддержанными РФФИ, а также проектом РД № 02-1.1-209, поддержанным Министерством образования России.

3. Основные научные результаты

Основными алгоритмическими проблемами, поставленными М. Дэном в одной из его работ в 1911 г., являются проблемы равенства и сопряженности слов в конечно определенных группах, а также сформулированная Х. Титце проблема изоморфизма групп.

Исследование этих проблем стимулировало развитие комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения одного из самых активно развивающихся направлений современной математики — комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг, посвященных данной теме; среди них достаточно назвать монографии А. Карраса, В. Магнуса и Д. Солитэра, а также Р. Линдона и П. Шуппа.

Среди работ, связанных с исследованием алгоритмических проблем, наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость проблемы равенства слов в конечно определенных группах, им же доказана неразрешимость проблемы изоморфизма групп.

С. И. Адяном определено понятие наследственного нетривиального свойства группы и доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для произвольной группы с конечным числом образующих и определяющих соотношений распознать выполнимость свойства β , представляющего собой объединение нетривиального наследственного и инвариантного свойства, если только существуют группы, обладающие свойством β .

Из этого результата следует, что практически все проблемы, относящиеся к конечно определенным группам, в общем случае неразрешимы. Сюда относятся, в частности, такие проблемы, как распознавание нильпотентности, конечности, простоты, свободы или единичности группы, включая основные проблемы теории групп.

Отрицательное решение проблемы равенства слов явилось причиной изучения алгоритмических проблем в определенных классах групп.

3.1. Групповые конструкции

Для групп с разрешимой проблемой равенства слов возникает более общая проблема — проблема вхождения, впервые решенная Я. Нильсеном в свободных группах и В. Магнусом в группах с одним определяющим соотношением для так называемых магнусовых подгрупп.

Известно, что проблема вхождения в классе всех конечно определенных групп неразрешима, это непосредственно следует из связи между проблемой вхождения и проблемой равенства слов. Поэтому естественно возникает интерес к изучению рассматриваемой проблемы для каких-то фиксированных классов групп. Как отмечено выше, положительное решение проблемы вхождения в свободных группах следует из результата Нильсена.

К. А. Михайловой этот результат был обобщен на свободное произведение групп, доказано, что если в группах A и B разрешима проблема вхождения, то она разрешима в их свободном произведении.

В отличие от свободного произведения, прямое произведение групп, как доказала К. А. Михайлова, не наследует свойства сомножителей иметь разрешимой проблему вхождения, а именно: в прямом произведении двух свободных групп ранга 2 проблема вхождения неразрешима.

Г. Г. Щепиным, рассмотревшим данную проблему для нильпотентного произведения групп, установлено, что нильпотентное произведение групп в общем случае не наследует свойство сожителей «иметь разрешимой проблему вхождения».

Обозначим через A класс амальгамных групп. В. Н. Безверхним [1], [2] выделен подкласс A_0 групп вида $F_m *_H F_n$, где F_m, F_n — свободные группы, соответственно, рангов m, n , объеди-

ненных по конечно порожденной подгруппе H ; было доказано, что в группах $G = F_m *_C F_n$, где C — бесконечная циклическая подгруппа, проблема вхождения разрешима [1], тем не менее, во всем подклассе A_0 — неразрешима [2]. Указав пример группы вида $F_2 *_H F_2^*$, где $H < F_2$ — конечно порожденная подгруппа ранга 4, ϕ — изоморфизм сомножителей, проблема вхождения в которой неразрешима.

Для свободных произведений групп В. Н. Безверхним [3] была доказана разрешимость проблемы сопряженности подгрупп при условии, что в сомножителях разрешимы проблема вхождения и сопряженности подгрупп.

В. Н. Безверхним [4] доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с циклическим объединением и ее неразрешимость в свободном произведении свободных групп рангов 2, объединенных по подгруппе ранга 4 [5].

А. И. Мальцевым была поставлена проблема о нахождении образующих пересечения конечно порожденных подалгебр данной алгебры. С данной проблемой тесно связано свойство Хаусона подалгебр данной алгебры, а именно, алгебра обладает свойством Хаусона, если пересечение конечно порожденных подалгебр есть конечно порожденная подалгебра.

Для свободных групп проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп решена В. Н. Безверхним [6].

Конструктивное доказательство теоремы Б. Баумслага, данное в статье [7], позволило решить указанную проблему А. И. Мальцева для свободного произведения групп. Доказано, что если сомножители $G_i, i = 1, 2$, обладают свойством Хаусона и в них разрешимы: (1) проблема А. И. Мальцева о пересечении подгрупп; (2) существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечно порожденных подгрупп H_1, H_2 и элемента w_i установить, пусто или непусто $wH_1 \cap H_2$, то в группе $G = G_1 * G_2$ разрешимы проблема Мальцева и проблема (2).

В статье [8] данные результаты были обобщены на свободное произведение групп с объединением и на HNN -расширения групп. Рассмотрим группу

$$G^* = \langle G, t; \text{rel } G, t^{-1}U_1t = \phi(U_1) \rangle,$$

являющуюся HNN -расширением группы G с помощью конечных изоморфных подгрупп U_1, U_{-1} и фиксированного изоморфизма $\phi: \phi(U_1) = U_{-1}$; t — не принадлежащая G правильная проходная буква; группа G называется основой группы G^* , изоморфные подгруппы U_1, U_{-1} группы называются ассоциированными подгруппами G^* .

В. Н. Безверхним введено понятие специального множества [9]. Приведем его ниже.

Конечное множество слов $W = w_{i=1, \overline{N}}$ группы G^* назовем специальным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) закрытая левая половина слова $w_i \in W$, являющегося нетрансформой, изолирована в W ; если w_i — нетрансформа четной длины, то ее закрытые левая и правая половина изолированы в W ;

2) длину слова $w_j \in W$, являющегося нетрансформой, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{\{w_i\}_{i=1, \overline{N}} w_j\}$; длину произвольного элемента $w_j \in W$ нельзя уменьшить, умножая на слово $v \in \langle \{w_i\}_{i=1, \overline{N}} \rangle$, $L(v) < L(w_j)$;

3) пусть

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} t^{\epsilon_s} K_{w_j} t^{s's} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$ — нетрансформа из W , имеющая четное число слогов, либо

$$w^\epsilon = t^\alpha l_{1w_j} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^\beta,$$

где $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \epsilon = \pm 1, w_j$ — нетрансформа из W , имеющая нечетное число слогов и

$$\{w_\gamma^{\nu_\gamma} = t_\gamma^{\alpha_\gamma} l_{1w_\gamma} t^{\epsilon_1} \dots l_{sw_j} h t^{\epsilon_s} r_{sw_j} t^{\epsilon'_{s-1}} \dots r_{i+1}, w_\gamma t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}\},$$

где $\nu_\gamma = \pm 1, \alpha_\gamma = 0, \pm 1$ есть подмножество нетрансформ из $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j\} \cup \{\{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \setminus w_j^{-1}\}$, закрытая правая половина которых оканчивается на $t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta_j}$; тогда если подгруппа

$$H = \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap t^{-\beta} r_{1w_j}^{-1} t^{-\epsilon'_1} \dots t^{-\epsilon'_i} G t^{\epsilon'_i} r_{iw_j} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_j} t^{\beta} \neq E$$

(E - единичная подгруппа), то $\forall u \in HL(w_j u) \geq L(w_j), L(w_j u w_\gamma^{-\nu_\gamma}) \geq L(w_j)$;

4) пусть

$$w_i^\epsilon = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p} \dots l_{nw_i} t^{\epsilon_n} \dots t^{\epsilon'_i} r_{iw_i} \dots t^{\epsilon'_1} r_{1w_i} t^{\beta_1}$$

$$w_j^\nu = t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p} \dots l_{nw_j} t^{\nu_n} \dots t^{\nu'_i} r_{iw_j} \dots t^{\nu'_1} r_{1w_j} t^{\beta_2}$$

где $\epsilon = \pm 1, \nu = \pm 1, \alpha_t = 0, \pm 1, \beta_t = 0, \pm 1, t = 1, 2$ - слова из $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \cup \{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}}\}$, не обязательно различные, $t^{\alpha_1} l_{1w_i} \dots l_{pw_i} t^{\epsilon_p}$ — начальное подслово закрытой левой половины w_i^ϵ , $t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots l_{pw_j} t^{\nu_p}$ — начальное подслово закрытой левой половины w_j^ν . Если

$$t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} \neq t^{\alpha_2} l_{1w_j} t^{\nu_1} \dots t^{\nu_{p-1}} l_{pw_j},$$

то не существует слов $w \neq 1, w \in \langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle, L(w) < 2p$, такого что

$$w \cdot w_j^\nu = t^{\alpha_1} l_{1w_i} t^{\epsilon_1} \dots t^{\epsilon_{p-1}} l_{pw_i} t^{\nu_p} l'_{p+1,w_j} \dots r_{1w_j} t^{\beta_2}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Если в группе G^* ее основа G обладает свойством Хаусона, то и G^* обладает свойством Хаусона.*

Из теоремы Мюллера-Шуппа следует, что группа $G = \langle G_1 * G_2; rel G_i, i = 1, 2, U_i = \phi(U_1) \rangle$, где $U_1 < G_1, U_{-1} = \phi(U_1) < G_2$, изоморфно вкладывается в группу $G^* = \langle G_1 * G_2, t; rel G_i, i = 1, 2, t^{-1} U_1 t = \phi(U_1) \rangle$ с помощью отображения $\psi : \forall g_1 \in G_1, \psi_{g_1} = t^{-1} g_1 t; \forall g_2 \in G \psi(g_2) = g_2$.

Отсюда получается, что понятие специального множества является общим для свободных групповых конструкций и, будучи обобщением нильсеновского множества свободной группы, может быть успешно применено к исследованию различных алгоритмических проблем и различных свойств подгрупп в свободных групповых конструкциях.

Пусть A, B — группы с одним определяющим соотношением и с кручением, и группа $G = A *_C B$ является свободным произведением групп A, B с циклическим объединением C .

ТЕОРЕМА 2. *В группе $G = A *_C B$, являющейся свободным произведением групп A, B с циклическим объединением, где сомножители A, B есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

В процессе доказательства данной теоремы, В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость проблемы сопряженности слов и проблема степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением и с кручением, а также

ТЕОРЕМА 3. *В группе $G = A *_C B$, являющейся свободным произведением групп A, B с циклическим объединением, где сомножители A, B есть группы с одним определяющим соотношением и с кручением, разрешима проблема сопряженности слов.*

При доказательстве данных теорем для групп с одним определяющим соотношением и с кручением В. Н. Безверхним была доказана алгоритмическая разрешимость ряда других проблем, представляющих самостоятельный интерес, например: пересечение произвольной циклической подгруппы $\langle g \rangle$ и магнусовой подгруппы M ; проблемы пересечения циклических подгрупп; доказано, что для любого $w \in G$ и любой магнусовой подгруппы $M < G$ можно эффективно установить, существует ли $n \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ - множество натуральных чисел) и $z \in G$ такие, что $z^{-1}w^n z \in M$ и другие проблемы.

Обозначим через $\bar{A}$ класс групп вида

$$G = \langle G_1 * G_2; \text{rel} G_i, i = 1, 2; H_1 = \phi(H_1) \rangle,$$

являющихся свободным произведением групп $G_i, i = 1, 2$, с объединением по изоморфным свободным конечно порожденным подгруппам $H_1, H_2 = \phi(H_1), H_i < G_i, i = 1, 2, G_i$ - группы с одним определяющим соотношением и с кручением.

ТЕОРЕМА 4. *В классе групп $\bar{A}$ проблема сопряженности слов алгоритмически неразрешима.*

Тем не менее, В. Н. Безверхним было доказано, что если в качестве объединяемых подгрупп $H_i < G_i, i = 1, 2$, взять изоморфные магнусовы подгруппы, объединенные с помощью конструктивного изоморфизма ϕ , то получим группу G с разрешимой проблемой сопряженности и степенной сопряженности слов.

В работе [10] положительно решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с ассоциированными циклическими подгруппами. Представленный результат является обобщением известного результата С. Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. При решении основной проблемы доказывается разрешимость проблемы пересечения конечно порожденной подгруппы данного класса групп с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю основной группы, а так же проблема пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю. В [11] решена проблема степенной сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением.

В работе [12] была установлена разрешимость проблемы сопряженности подгрупп в свободном произведении двух циклических групп с объединением по циклической подгруппе.

3.2. Группы Артина и $C(p) \& T(q)$ -группы

Группа кос задается образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ и определяющими соотношениями: $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, i, j = 1, \dots, n, |i-j| > 1$.

Обобщением групп кос являются группы Артина.

Группа Артина — это группа G , заданная копредставлением с системой образующих $a_i, i \in J$, и соотношениями $\langle a_i a_j \rangle^{m_{ij}} = \langle a_i a_j \rangle^{m_{ji}}, i \neq j, i, j \in J$, где слова, стоящие слева и справа, состоят каждое из m_{ij} чередующихся букв a_i, a_j, m_{ij} — элементы матрицы Кокстера $M = (m_{ij})_{i,j \in J}$, соответствующий данной группе G , причем $\forall i \in J, m_{ij} = 1, \forall i, j \in J, i \neq j, m_{ij} \geq 2, m_{ij} = m_{ji}$.

Добавляя к определяющим соотношениям группы Артина G соотношения: $\forall i \in J, a_i^2 = 1$, получим копредставление группы Кокстера $\bar{G}$.

Группа Артина G называется группой Артина конечного типа, если соответствующая ей группа Кокстера $\bar{G}$ конечна. Известно, что группа кос A_n (с n образующими) принадлежит классу групп Артина конечного типа.

Группа Артина G называется неприводимой, если множество ее образующих X нельзя разбить на два непустых множества $X_1, X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset, X = X_1 \cup X_2$, таких, что каждый элемент из X_1 коммутирует с каждым элементом из X_2 .

Каждой неприводимой группе Артина G соответствует связный граф Кокстера Γ , вершины которого соответствуют образующим G . Любые две вершины a и b графа Γ соединены ребром, если $m_{ab} \geq 3$, m_{ab} - элемент матрицы Кокстера, соответствующий данной группе; если вершины c и d соединены путем, состоящим более, чем из одного ребра, то $m_{cd} = 2$.

Неприводимыми группами Артина конечного типа являются следующие группы: группа кос $A_n, n \geq 1; B_n, n \geq 2; D_n, n \geq 4; E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$ или $p \geq 7$.

Известно, что каждая группа Артина конечного типа является либо одной из групп $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4; J_2(p), p = 5$ или $p \geq 7$, либо прямым произведением неприводимых групп.

В. Н. Безверхним была доказана теорема.

ТЕОРЕМА 5. *В группах Артина конечного типа $B_n, n \geq 4; D_n, n \geq 4; F_4, H_4, E_6, E_7, E_8$ проблема вхождения неразрешима.*

В группах Артина конечного типа $A_2, A_3, B_2, B_3, H_3, G_2, J_2(p)$ проблема вхождения разрешима.

В. Н. Безверхним совместно с В. А. Гринблатом было введено понятие крашеной подгруппы группы Артина конечного типа. Была доказана разрешимость обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа [13].

В статье [14] доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 .

Совместно с И. В. Добрыниной проведено изучение нормализаторов некоторых классов подгрупп группы кос B_{n+1} [15].

Если $m_{ij} \geq 3$ для всех $i \neq j \in J$, то группа Артина называется группой Артина большого типа. Если $m_{ij} > 3$ для всех $i \neq j \in J$, то группа Артина называется группой Артина экстрабольшого типа.

Для групп Артина большого типа с помощью геометрического метода доказана разрешимость проблемы сопряженности слов [16].

В. Н. Безверхний решил обобщенную проблему сопряженности слов в группах Артина большого типа [17].

Для групп Кокстера большого типа решена проблема обобщенной сопряженности слов, доказано, что централизатор конечно порожденной подгруппы конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие. Показано, что в общем случае централизатор конечно порожденной группы не является циклическим. Построен пример группы данного класса, не являющейся гиперболической группой [18].

Для групп Кокстера экстрабольшого типа предложен алгоритм, который по двум элементам находит порождающий элемент пересечения их циклических подгрупп [19].

Известно, что группы Кокстера являются группами, порожденными отражениями евклидова пространства. Кроме того, группы Артина, а в частности группы кос, непосредственно используются в криптографии.

Совместно с О. В. Инченко в работе [20] дано описание централизатора элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой.

В. Н. Безверхним и О. Ю. Карповой была решена проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой [21].

В работе [22] было рассмотрено решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа.

С О. Ю. Платоновой была описана структура централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой [23].

В работе [24] была доказана теорема о свободных подгруппах для групп Артина с древесной структурой: пусть H — конечно порожденная подгруппа группы Артина G с древесной

структурой, причем для любого $g \in G$ и любой подгруппы $G_{ij}, i \neq j$, выполнено равенство $gHg^{-1} \cap G_{ij} = E$, то H является свободной. В доказательстве основной теоремы использованы идеи В. Н. Безверхнего о приведении множества образующих подгруппы к специальному.

В работе [26] решена проблема вхождения в группе Артина с древесной структурой.

В работе [25] доказано, что в крашенных подгруппах групп Артина с древесной структурой разрешима проблемы сопряженности слов.

В статье [27] В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя, И. В. Добрынина, О. В. Инченко, А. Е. Устьян провели анализ результатов по решению алгоритмических проблем в группах Кокстера, полученных членами Тульской алгебраической школы “Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп” под руководством В. Н. Безверхнего. Дан обзор утверждений и теорем, доказанных авторами статьи для различных классов групп Кокстера: групп Кокстера большого и экстрабольшого типов, групп Кокстера с древесной структурой, групп Кокстера с n -угольной структурой. Приводятся основные подходы и методы доказательства, среди которых метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним, в части, введения R -сокращений, специальных R -сокращений, специальных кольцевых сокращений, а также метод графов, метод типов, введенный В. Н. Безверхним, метод специального множества слов, разработанный В. Н. Безверхним на основе обобщения метода Нильсена на свободные конструкции групп. Рассмотренные в статье классы групп включают все группы Кокстера, которые либо принадлежат данным классам групп, либо могут быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n -угольной структурой.

В статье [28] рассмотрены обобщенные древесные структуры групп Кокстера, представляющие собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой. Обобщенные древесные структуры групп Кокстера, также как группы Кокстера экстрабольшого типа и группы Кокстера с древесной структурой, относятся к гиперболическим группам, поэтому в них решено большинство алгоритмических проблем, в частности, алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов. Предлагается оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный метод использует подход Г. С. Маканина, примененный им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Кокстера конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

В статье [29] определяются группы Артина с m -угольной структурой.

Группа Артина (Кокстера) называется группой с m -угольной структурой, если соответствующий граф состоит из m -угольников, $m \geq 3$; элементы соответствующей матрицы Кокстера удовлетворяют условиям $m_{ij} \geq 2, i \neq j, m_{ii} = 1$. Доказаны следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 6. *В группе Артина с m -угольной структурой, $m > 3$, разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

В [30] рассматривалась ширина вербальных подгрупп в классе групп Артина с двумя порождающими.

В статье [31] В. Н. Безверхним и А. Е. Устьяном вводится понятие полугруппы Артина большого (экстрабольшого) типа. Доказывается инъективное вложение этих полугрупп в соответствующие им группы Артина большого (экстрабольшого) типа и разрешимость проблемы сопряженности слов в данном классе полугрупп.

Конечно определенную группу G , множество определяющих соотношений которой образует симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(p)$ и $T(q)$, является $C(p) \& T(q)$ -

группой.

В зависимости от того, какие значения принимают p и q , получается соответствующий класс групп.

ТЕОРЕМА 7. [32] Пусть H — конечно порожденная подгруппа конечно определенной группы G , принадлежащей классу $C(p)&T(q)$ -групп. Тогда централизатор $C_G(H)$ подгруппы H конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

ТЕОРЕМА 8. В конечно определенной группе, принадлежащей классу $C(p)&T(q)$ -групп разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

ТЕОРЕМА 9. Существует алгоритм, позволяющий для любого конечно множества слов из конечно определенной групп G класса $C(p)&T(q)$ выписать образующие их нормализатора.

ТЕОРЕМА 10. Для того, чтобы нормализатор циклически несократимого в свободной группе слова $w \in G$, где G есть $C(p)&T(q)$ -группа, была расширением циклической группы $\langle w \rangle$ с помощью конечной, необходимо и достаточно существование такого натурального числа $n(w)$, которого не превосходит ширина любой кольцевой неприводимой R -диаграммы сопряженности w с w .

В работе [33] приведено доказательство проблемы степенной сопряженности слов для групп $C(4)&T(4)$.

Под шириной кольцевой диаграммы понимается число ее слоев.

Совместно с А. Е. Устьяном получено обобщение известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением на группы $C(3)&T(6)$. Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением [34]. В работе [35] получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием $C'(\frac{1}{6})$ на группы $C(6)$ и $C(4)&T(4)$ и $C(3)&T(6)$. Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением.

4. Научная школа В. Н. Безверхнего

Фундаментальные результаты по теории групп и полугрупп Владимира Николаевича Безверхнего во многом определили дальнейшее развитие этих областей математики.

В. Н. Безверхний руководил научным семинаром и научной школой «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп», основанной М. Д. Гриндлингером.

Под руководством В. Н. Безверхнего защищены докторская диссертация [36]:

- Добрынина Ирина Васильевна «Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера» (ЯрГУ, 2010);

кандидатские диссертации [37] - [45]:

- Добрынина Ирина Васильевна «О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа» (МПГУ, 1997),
- Паршикова Елена Владиславовна «Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)&T(4)$ » (МПГУ, 2001),
- Новикова Ольга Александровна «Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами» (МПГУ, 2002),



Рис. 5: Научный семинар В. Н. Безверхнего

- Безверхняя Наталия Борисовна «Гиперболичность, SQ -универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением» (МПУ, 2002),
- Инченко Оксана Владимировна «Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой» (МПУ, 2010),
- Кузнецова Анна Николаевна «Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа» (МПУ, 2010),
- Платонова Оксана Юрьевна «Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой» (ЯрГУ, 2013),
- Логачева Елена Сергеевна «Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп» (ЯрГУ, 2015).

5. Заключение

В настоящее время Владимир Николаевич плодотворно занимается научной деятельностью. Так, он опубликовал работу [33], выступил с пленарным докладом «О пересечении циклических подгрупп в группах $C(4)&T(4)$ » на XXIII Международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященной 80-летию профессора Александра Ивановича Галочкина и 75-летию профессора Владимира Григорьевича Чирского (Тула, ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 29-31 октября 2024 года).

Авторы статьи, коллеги и ученики желают Владимиру Николаевичу здоровья и творческих успехов.

В данной работе авторами использовались материалы из публикации [46].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп - Тула: Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3-86.
2. Безверхний В. Н. О неразрешимости проблемы вхождения для некоторого класса групп // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Из-во ТулПИ, 1974. С. 51-54.
3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения групп // IX Всесоюз. алгебр. коллоквиум. Резюме сообщений и докладов. 1971. С. 9-10.
4. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп // Современная алгебра. 1977. Вып. 6. С. 16-23, 24-32.
5. Безверхний В. Н. Неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула, 1975. С. 90-94.
6. Безверхний В. Н. О пересечении конечно порожденных подгрупп свободной группы // Сб. науч. тр. каф. высш. матем. - Тула: Изд-во ТулПИ, 1974., С. 51-56.
7. Безверхний В. Н., Роллов Э. В. О подгруппах свободного произведения групп // Современная алгебра. 1974. Вып. 1. С. 16-31.
8. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в HNN -группах // Фундаментальная и прикладная математика, 1998. Т. 4. №1 С. 199-222
9. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе HNN -групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1981. С. 20-62.
10. Безверхний В. Н., Логачева Е. С., Проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Дискретная математика. 2016. Т.28. №1. С. 3-18.
11. Безверхний В. Н., Логачева Е.С. Проблема степенной сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением // Фундаментальная и прикладная математика. 2019. Т. 22. Вып. 4. С. 29-37.
12. Безверхний В. Н., Логачева Е. С. Проблема сопряженности подгрупп в свободном произведении циклических групп с объединением // Чебышевский сборник. Т. 13. Вып. 1. 2012. С. 20-45.
13. Безверхний В. Н., Гринблат В. А. Решение обобщенной проблемы сопряженности слов в крашенных подгруппах групп Артина конечного типа // Математические заметки. 2006. Т. 79. №5. С. 653-661.
14. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О неразрешимости проблемы сопряженности подгрупп в группе крашенных кос R_5 // Математические заметки. 1999. Т. 65. №1. С. 5-22.
15. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О нормализаторах некоторых классов подгрупп в группах кос // Математические заметки. 2003. Т. 74. №1. С. 19-31.
16. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа // Алгоритмические проблемы групп и полугрупп: Мужвуз. сб. науч. тр. - Тула, 1986. С. 26-61.

17. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // *Фундаментальная и прикладная математика*. 1999. Т. 5. №1. С. 1-38.
18. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // *Дискретная математика*. 2005. Т. 17. №3. С. 123–145.
19. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // *Дискретная математика*. 2008. Т.20. №3. С. 101–110.
20. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Централизатор элементов конечного порядка конечно порожденной группы Кокстера с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып.1. С. 17–27.
21. Безверхний В. Н., Карпова О. Ю. Проблема вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып. 1 С. 30–49.
22. Безверхний В. Н., Кузнецова А. Н. Разрешимость проблемы степенной сопряженности слов в группах Артина экстрабольшого типа // *Чебышевский сборник*. 2008. Т. 9. Вып. 1. С. 50–68.
23. Платонова О. Ю., Безверхний В. Н. О структуре централизатора элементов в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2013. Т. 14. Вып. 3. С. 100–120.
24. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О свободных подгруппах в группах Артина с древесной структурой // *Чебышевский сборник*. 2014. Т. 15. Вып. 1. С. 32–42.
25. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. О проблеме сопряженности слов в некотором классе подгрупп групп Артина // *Чебышевский сборник*. 2021. Т. 22. Вып. 4. С. 88–99.
26. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. О разрешимости проблемы вхождения в некотором классе групп Артина” // *Чебышевский сборник*. 2023. Т. 24. Вып. 1. С. 213–218.
27. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устьян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // *Чебышевский сборник*. 2016. Т. 17. Вып. 4. С. 23–50.
28. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // *Чебышевский сборник*. 2018. Т. 19. Вып. 3. С. 135–147.
29. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б. Решение проблемы равенства и сопряженности слов в некотором классе групп Артина // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2019. Т. 22. № 4. С. 9–27.
30. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы конечной ширины в группах Артина с двумя образующими // *Чебышевский сборник*. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 11–16.
31. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. О подгруппах Артина // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2019. Т. 22. Вып. 4. С. 39–49.
32. Безверхний В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p) - T(q)$ -группах // *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп*. Межвуз. сб. научных тр. - Тула, 1991. С. 4-58.
33. Безверхний, Х.Н., Безверхняя, Н.Б. О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением // *Чебышевский сборник*. 2024. Т. 25, № 5. С. 32–44.

34. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщение одной теоремы Магнуса // Чебышевский сб., 11:3 - 2010. С. 57–62
35. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сб. 14:3 - 2013. С. 20–33
36. Добрынина И. В. Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера: дисс. . . . д. физ.-мат. наук. Ярославль. 2010
37. Добрынина И. В. О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 1997.
38. Паршикова Е. В. Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями $C(4)&T(4)$: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2001.
39. Новикова О. А. Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
40. Безверхняя Н. Б. Гиперболичность, SQ-универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением: дис. . . . канд. физ.-мат. наук.. Тула. 2002.
41. Инченко О. В. Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
42. Кузнецова А. Н. Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
43. Платонова О. Ю. Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Тула. 2013.
44. Логачева Е. С. Проблемы сопряженности слов и подгрупп в свободных конструкциях групп: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Ярославль. 2015.
45. Трубицын Ю. Э. Алгоритмические проблемы и тождества в полугруппах со свойством Черча-Россера: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Москва. 1996.
46. Устьян А. Е., Добрынина И. В., Трубицын Ю. Э., Угаров А. С., Добровольский Н. М., Реброва И. Ю. 80-летие профессора Безверхнего Владимира Николаевича // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21. Вып. 3. С. 317–335.

REFERENCES

1. Bezverkhniĭ, V. N. 1972, "Solution of the entry problem for one class of groups", *Questions of the theory of groups and semigroups*, pp. 3-86.
2. Bezverkhniĭ, V. N. 1974, "On the undecidability of the entry problem for a certain class of groups", *Collection of scientific works of the department of higher math*, pp. 51-54.
3. Bezverkhniĭ, V. N. 1971, "Solution of the conjugacy problem of subgroups for a free product of groups", *IX All-Union. algebras. colloquium. Summary of communications and reports*, pp. 9-10.
4. Bezverkhniĭ, V. N. 1977, "Solution of the conjugacy problem of subgroups for one class of groups", *Modern Algebra*. Vol. 6, pp. 16-23, 24-32.

5. Bezverkhniĭ, V. N. 1975, "Unsolvability of the conjugacy problem of subgroups for the free product of free groups with union", *Collection of scientific works of the department of higher matet*, pp. 90-94.
6. Bezverkhniĭ, V. N. 1974, "On the intersection of finitely generated subgroups of a free group", *Collection of scientific works of the department of higher matet.*, pp. 51-56.
7. Bezverkhniĭ, V. N., Rollov E.V. 1974, "On subgroups of a free product of groups", *Modern Algebra*, no. 1., pp. 16-31.
8. Bezverkhniĭ, V. N. 1998, "On the intersection of subgroups in HNN -groups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 4, no. 1, pp. 199–222
9. Bezverkhniĭ, V. N. 1981, "Solution of the problem of occurrence in the class of HNN -groups", *Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups*, pp. 20-62.
10. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2016, "The problem of conjugation of words in the tree product of free groups with cyclic union", *Diskr. Mat.*, Vol. 28, no. 1, pp. 3–18
11. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2019, "The problem of the power conjugacy words in a tree product of free groups with cyclic amalgamation", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*. Vol. 22. no. 4. pp. 29–37
12. Bezverkhniĭ, V. N., Logacheva, E. S. 2012, "The problem of conjugacy of subgroups in the free product of cyclic groups with a union", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 13, no. 1, pp. 20–45.
13. Bezverkhniĭ, V. N., Grinblat, V. A. 2006, "Solution of the generalized conjugation problem for words in colored subgroups of Artin groups of finite type", *Matem. Notes*, Vol. 79, no. 5, pp. 653–661.
14. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 1999, "On the unsolvability of the conjugacy problem for subgroups in the group of colored braids R_5 ", *Mat. notes*, Vol. 65, No. 1, pp. 15-22.
15. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2003, "On the normalizers of certain classes of subgroups in braid groups", *Mat. Notes*, Vol. 74, no. 1, pp. 19–31.
16. Bezverkhniĭ, V. N. 1986, "Solution of the word conjugacy problem in large Artin and Coxeter groups", *Algorithmic problems of groups and semigroups*, pp. 26-61.
17. Bezverkhniĭ, V. N. 1999, "Solution of the generalized conjugacy problem in Artin groups of large type", *Fundamental and Applied Mathematics*, Vol. 5, no. 1, pp. 1-38.
18. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2005, "Solving the problem of generalized conjugacy of words in large Coxeter groups", *Diskr. Mat.*, Vol. 17, no. 3, pp. 123–145.
19. Bezverkhniĭ, V. N., Dobrynina, I. V. 2008, "Solving the problem of power conjugacy of words in extra-large Coxeter groups", *Diskr. Mat.*, Vol. 20, no. 3, pp. 101–110.
20. Bezverkhniĭ, V. N., Inchenko, O. V. 2008, "Centralizer of finite order elements of a finitely generated Coxeter group with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 17–27.
21. Bezverkhniĭ, V.N., Karpova, O. Yu. 2008, "The problem of joining a cyclic subgroup in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 30–49.
22. Bezverkhniĭ, V. N., Kuznetsova, A. N. 2008, "Solvability of the power conjugacy problem for words in extra-large type Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 9, no. 1, pp. 50–68.

23. Platonova, O. Yu., Bezverkhniy, V. N. 2013, "On the structure of the centralizer of elements in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 14, no. 3, pp. 100–120
24. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2014, "On free subgroups in Artin groups with a tree structure", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 15, no. 1, pp. 32–42.
25. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2021, "On the problem of conjugacy of words in a certain class of subgroups of Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 22, no. 4, pp. 88–99.
26. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2023, "On the solvability of the occurrence problem in a certain class of Artin groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 24, no. 1, pp. 213–218.
27. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko, O. V., Ustyan, A. E. 2016, "On algorithmic problems in Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 17, no. 4, pp. 23–50.
28. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2018, "On the problem of generalized conjugacy of words in generalized tree structures of Coxeter groups", *Chebyshevskii Sbornik*, Vol. 19, no. 3, pp. 135–147.
29. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2019, "Solving the problem of equality and conjugacy of words in a certain class of Artin groups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 22, no. 4, pp. 9–27.
30. Bezverkhniy, V. N., Dobrynina, I. V. 2002, "Solution of a finite width problem in Artin groups with two generators", *Chebyshevsky Collection*. Vol. 3, no. 1, pp. 11–16.
31. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2019, "On Artin semigroups", *Fundam. and adj. Mat.*, Vol. 22, no. 4, pp. 39–49.
32. Bezverkhniy, V. N. 1991, "On normalizers in $C(p)&T(q)$ - groups", *Algorithmic problems in the theory of groups and semigroups*, pp. 4–58.
33. Bezverkhniy, V. N., Bezverkhnyaya, N. B. 2024, "On the degree conjugacy of words in groups with small reduction", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 32–44.
34. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2010, "A generalization of a Magnus theorem", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 11, no. 3, pp. 57–62
35. Bezverkhniy, V. N., Ustyan, A. E. 2013, "Generalizations of the theorems of V. Magnus and M. D. Grindlinger", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 14, no. 3, pp. 20–33
36. Dobrynina, I. V. 2010, "Solution of algorithmic problems in Coxeter groups": diss. D. Phys.-Math. sciences. Yaroslavl.
37. Dobrynina, I. V. 1997, "On subgroups in colored braid groups and Artin groups of finite type": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
38. Parshikova, E. V. 2001, "Problems of degree and power conjugacy in groups with conditions $C(4)&T(4)$ ": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
39. Novikova, O. A. 2002 "Solution of algorithmic problems for free product with commuting subgroups": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
40. Bezverkhnyaya, N. B. 2002, "Hyperbolicity, SQ-universality, and some other properties of groups with one defining relation": dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.

- 41. Inchenko, O. V. 2010, “Some algorithmic problems in finitely generated Coxeter groups with a tree structure”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 42. Kuznetsova, A. N. 2010, “Some algorithmic problems in Artin groups of large and extra large type”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 43. Platonova, O. Yu. 2013, “Solution of some algorithmic problems in Artin groups with a tree structure”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Tula.
- 44. Logacheva, E. S. 2015, “Problems of conjugacy of words and subgroups in free group constructions”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Yaroslavl.
- 45. Trubitsyn, Yu. E. 1996, “Algorithmic problems and identities in semigroups with the Church-Rosser property”: dis. Cand. Phys.-Math. sciences. Moscow.
- 46. Ustyan, A. E., Dobrynina, I. V., Trubitsyn, Y. E., Ugarov, A. S., Dobrovolskii, N. M., Rebrova, I. Yu. 2020, “The 80-th anniversary of professor V. N. Bezverkhniĭ”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 317–335.

Получено: 14.11.2024

Принято в печать: 10.03.2025