

УДК 519.4

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ  
ПАЛИНДРОМИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ  
СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

А. И. Некрицухин (г. Тула)

**Аннотация**

Пусть  $F_n$ ,  $n \geq 2$  есть свободная группа, порожденная  $n$  буквами  $x_1, \dots, \dots, x_n$  и  $Aut(F_n)$  — группа автоморфизмов  $F_n$ . Рассматриваются некоторые подгруппы группы  $Aut(F_n)$ .

Сначала исследуется группа палиндромических автоморфизмов  $ПА(F_n)$ . Эта группа впервые была определена Коллинзом в [1] и связана с конгруэнц-подгруппами в  $SL(n, \mathbb{Z})$  и группой симметрических автоморфизмов свободной группы. Вычисляется центр группы палиндромических автоморфизмов. Для этого используется комбинаторика слов группы  $F_n$ .

Вторая тема статьи связана с точностью линейного представления группы элементарных палиндромических автоморфизмов  $ЕПА(F_n)$ . Показывается, что некоторое конкретное представление нелинейно. Для этого используется подгруппа  $IA(F_n)$  группы  $Aut(F_n)$  [15].

*Ключевые слова:* свободная группа, палиндромический автоморфизм.

ON SOME PROPERTIES PALINDROMES OF  
AUTOMORPHISMS OF A FREE GROUP

A. I. Nekritsuhin (Tula)

**Abstract**

Let  $F_n$ ,  $n \geq 2$  denote the free group generated by  $n$  letters  $x_1, \dots, \dots, x_n$  and  $Aut(F_n)$  be the automorphism group of  $F_n$ . Certain subgroup of the group  $Aut(F_n)$  are considered.

First of all examine the palindromic automorphism group  $ПА(F_n)$ . This group first defined Collins in [1], which is related to congruence subgroups of  $SL(n, \mathbb{Z})$ , and symmetric automorphism group of the free group. It is calculate the center of the palindromic automorphism group. For this used combinatorics on words of the group  $F_n$ .

Second theme of this paper connect with faithfulness of a linear representation of the group elementary palindromic automorphisms  $ЕПА(F_n)$ . It is show that some concrete representation are not linear. For this use the subgroup  $IA(F_n)$  of group  $Aut(F_n)$  [15].

*Keywords:* free group, palindromes automorphism.

## 1. Введение

Рассматривается свободная группа  $F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ ,  $n \geq 2$  и ее группа автоморфизмов  $Aut(F_n)$ . Редуцированное слово  $a_1^{\alpha_1} \dots a_s^{\alpha_s}$ ,  $a_i \in \{x_1, \dots, x_s\}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$  называется палиндромом, если оно равно своему противоположному  $a_s^{\alpha_s} \dots a_1^{\alpha_1}$ , то есть записанному в обратном порядке. В [1] определена группа палиндромических автоморфизмов  $ПА(F_n)$ , как подгруппа  $Aut(F_n)$ , состоящая из всех автоморфизмов  $\alpha$ , для которых  $(x_i)\alpha$  (правое действие  $\alpha$ ) есть палиндром для всех  $i = 1, \dots, n$ . Эта группа порождается тремя типами автоморфизмов, которые определяются следующими отображениями порождающих:

1.  $(x_i || x_j)$ ,  $i \neq j$ , отображающих  $x_i \rightarrow x_j x_i x_j$  и фиксирующие другие порождающие  $x_k$ ;
2.  $\sigma_i$ , отображающих  $x_i \rightarrow x_i^{-1}$  и фиксирующих другие  $x_j$ ;
3. автоморфизмы, соответствующие элементам симметрической группы  $S_n$ , которые переставляют  $x_1, \dots, x_n$  между собой.

Часть группы  $ПА(F_n)$ , порожденная автоморфизмами первого типа, называется группой элементарных палиндромических автоморфизмов  $F_n$  и обозначается  $ЕПА(F_n)$ .  $ПА(F_n)$  есть полупрямое произведение  $ЕПА(F_n)$  и группы, порожденной автоморфизмами второго и третьего типов.

В статьях автора [2,3] вычислены копредставление  $ПА(F_2)$ , центр  $ПА(F_2)$ , доказано, что  $ПА(F_2)$  нильпотентно аппроксимируема, а  $ПА(F_n)$ ,  $n \geq 3$  не нильпотентно аппроксимируема.

В работах [6–14] изучались различные свойства, связанные с палиндромическими словами в свободной группе  $F_n$ ,  $n \geq 2$  и автоморфизмами из  $Aut(F_n)$ , линейной представимостью подгрупп из  $Aut(F_n)$ .

Далее будет вычислен центр группы  $ПА(F_n)$  и показано, что пересечение группы  $ЕПА(F_n)$  и  $IA(F_n)$  нетривиально.  $IA(F_n)$  — группа автоморфизмов  $F_n$ , индуцирующих тождественное отображение в  $F_n/F'_n$ ,  $F'_n$  — коммутант группы  $F_n$ .

## 2. Вычисление центра

**ТЕОРЕМА 1.** *Центр группы палиндромических автоморфизмов  $ПА(F_n)$  порождается автоморфизмом, отображающим каждый порождающий элемент  $F_n$  в обратный.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Введем автоморфизм

$$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n.$$

Тривиальная проверка через действие  $\sigma$  на порождающих группы  $F_n$  показывает, что  $\sigma$  коммутирует со всеми порождающими группы  $ПА(F_n)$  типов 1) — 3). Значит,  $\sigma$  принадлежит центру группы  $ПА(F_n)$ . Обозначим через  $\varphi$  произвольный автоморфизм из центра  $ПА(F_n)$  и рассмотрим равенство  $\varphi\sigma_i = \sigma_i\varphi$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Из определения  $\sigma_i$  имеем

$$\sigma_i : x_i \rightarrow x_i^{-1}, x_j \rightarrow x_j, i \neq j.$$

Пусть

$$(x_j)\varphi = V_1 x_i^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_s} V_{s+1},$$

где  $V_k$  ( $k = 1, \dots, s+1$ ) не содержит  $x_i$ . Тогда

$$(x_j)\varphi\sigma_i = V_1 x_i^{-\alpha_1} \dots x_i^{-\alpha_s} V_{s+1},$$

$$(x_j)\sigma_i\varphi = (x_j)\varphi = V_1 x_i^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_s} V_{s+1}.$$

Отсюда следует, что  $\alpha_t = -\alpha_t$  для  $t = 1, \dots, s$  и поэтому  $\alpha_t = 0$ . Значит, для всех  $i$  и всех  $j \neq i$   $(x_j)\varphi$  не содержит  $x_i$ . Поэтому  $(x_j)\varphi = x_j^{\pm 1}$ . Если некоторые  $j : j_1, \dots, j_t = -1$ ,  $t < n$ , а остальные  $+1$ , то выполняется равенство  $\psi\varphi = \varphi\psi$  для любого автоморфизма  $\psi$  из  $ПА(F_n)$ . При гомоморфизме абелизации  $F_n \rightarrow F_n/F'_n$  группа  $Aut(F_n)$  отображается на  $GL_n(\mathbb{Z})$ . Поэтому равенство  $\psi\varphi = \varphi\psi$  переходит в равенство для матриц  $\overline{\psi\varphi} = \overline{\varphi\psi}$  ( $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$  — матрицы). Но в  $\overline{\psi\varphi}$  тогда умножается на  $-1$  столбцы  $j_1, \dots, j_t$ , а в  $\overline{\varphi\psi}$  строки с этими номерами. Значит,  $\overline{\psi\varphi} \neq \overline{\varphi\psi}$ , а поэтому  $\psi\varphi \neq \varphi\psi$ . Отсюда следует, что  $(x_j)\varphi = x_j$  или  $(x_j)\varphi = x_j^{-1}$  для всех  $j = 1, \dots, n$ . В первом случае  $\varphi$  — тождественный автоморфизм, во втором  $\varphi = \sigma$ . Таким образом, центр группы  $ПА(F_n)$  есть  $\{1, \sigma\}$ . Отметим, что  $\sigma^2 = 1$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

Известен вопрос о нахождении в  $Aut(F_n)$ ,  $n \geq 3$  подгрупп, имеющих точное линейное представление, см., например, [4]. В связи с этим возможным кандидатом такого представления была подгруппа  $ЕПА(F_3)$  и гомоморфизм  $Aut(F_3) \rightarrow GL_3(\mathbb{Z})$ , соответствующий абелизации  $F_3 \rightarrow F_3/F'_3$ .

**ТЕОРЕМА 2.** *Линейное представление  $ЕПА(F_3)$  в группу  $GL_3(\mathbb{Z})$  при гомоморфизме*

$$\xi : Aut(F_3) \rightarrow Aut(F_3/F'_3) = GL_3(\mathbb{Z})$$

*не является точным.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ядро рассматриваемого гомоморфизма есть подгруппа  $IA(F_3) \subset Aut(F_3)$  [15]. Вычисления показывают, что неединичный элемент группы  $ЕПА(F_3)$ :

$$[(x_2||x_1)(x_3||x_1), (x_1||x_2)(x_1||x_3)^{-1}]((x_3||x_2)(x_2||x_3)^{-1})^2$$

$[a, b]$  — коммутатор элементов  $a, b$ ) является также элементом  $IA(F_3)$ . Значит, при гомоморфизме  $\xi$  он отображается в единичный элемент группы  $GL_3(\mathbb{Z})$  и данное представление неточное. Теорема 2 доказана.  $\square$

### 3. Заключение

Теорема 2 не снимает вопрос о возможности точного представления для  $EPA(F_3)$ .

Другой интересный вопрос — это изучение того каким является пересечение подгруппы  $PA(F_2)$  и подгруппы автоморфизмов из  $Aut(F_2)$ , фиксирующих коммутатор порождающих элементов  $F_2$  [6].

### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Collins D. J. Palindromic automorphisms of free groups // Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993) London Math. Soc. Lecture Note Ser., 204, Cambridge University Press Cambridge (1995). P. 63-72.
2. Некрицухин А. И. Палиндромические автоморфизмы свободной группы // Чебышевский сборник, 2008, Т. 9, Вып. 1. с. 148-152.
3. Некрицухин А. И. Нильпотентная аппроксимируемость группы палиндромических автоморфизмов свободной группы // Чебышевский сборник, 2010, Т. 11, Вып. 1, с. 199-201.
4. Cohen F. R., Metaftsis V., Prassidis S. On the linearity of the holomorph group of a free group on two generators // arXiv: 0905.0295v1 [math.GR] 3 May 2009.
5. Glover H. H., Jensen C. A. Geometry for palindromic automorphism groups of free groups // arXiv: math.GR/0112190 V1 18 Dec 2001.
6. Helling H. A note on the automorphism group of the rank two free group // J. Algebra, 223(2000), №2. P. 610–614.
7. Piggott A. Palindromic primitives and palindromic bases in the free group of rank two // J. Algebra, 3043(2006), №1. P. 359–366.
8. Gilman J., Keen L. Cutting sequences and palindromes // arXiv:math.GR/0803 0234.v1.3Mar2008.
9. Gilman J., Keen L. Enumerating palindromes in rank two free groups // arXiv: math.GR/0802 2731.v1.19Feb2008.
10. Kassel C., Reutenauer C. A palindromization map for the free group // arXiv: math.GR/0802 4359.v1.29Feb2008.

11. Bardakov V., Mikhailov R. On certain questions of the free group automorphisms theory // arXiv:math.GR/0701441.v1.16Jan2007.
12. Bardakov V., Shpilrain V., Tolstykh V. On palindromic and primitives widths of a free group // J. Algebra, 285(2005), №2. P. 574–585.
13. Бардаков В. Г. Линейные представления групп сопрягающих автоморфизмов и групп кос некоторых многообразий // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, №1. С. 17–31.
14. Formanek E., Procesi C. The automorphism groups of a free group is not linear // J. Algebra, 149(1992), №2. P. 494–499.
15. Lyndon R., Schupp P. Combinatorial group theory. Springer-Verlag 1977.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого  
Поступило 27.02.2014