ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 511.36

ОЦЕНКА МЕРЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛА $\log\frac{37}{30}$ [1]

М. Ю. Лучин (г. Брянск)

Аннотация

Оценки снизу меры иррациональности логарифмов рациональных чисел рассматривались многими зарубежными авторами: М. Вальдшмидт [1], А. Бейкер и Д. Вустольц [2], А. Хеймонен, Т. Матала-ахо, К. Ваананен [3], К. Ву [4], Д. Рин [5] и П. Тоффин [6]. В своих работах они применяли различные интегральные конструкции, дающие малые линейные формы от логарифмов и других чисел, вычисляли асимптотику интегралов и коэффициентов линейных форм с помощью метода перевала, теоремы Лапласа, оценивали знаменатель коэффициентов линейных форм с использованием различных схем "сокращения простых чисел". Обзор некоторых методов из теории диофантовых приближений логарифмов рациональных чисел того времени был представлен в 2004 году в статье В. В. Зудилина [7].

Затем В. Х. Салихов в работе [8], основываясь на тех же асимптотических методах, но использовав новый вид интегральной конструкции, обладающей свойством симметрии, значительно улучшил оценку меры иррациональности числа log 3. Впоследствии В. Х. Салихову, благодаря использованию уже комплексного симметризованного интеграла, удалось улучшить оценку меры иррациональности числа π [9]. В дальнейшем данный метод (применительно к диофантовым приближениям логарифмов рациональных чисел) получил развитие в работах его учеников: Е. С. Золотухиной [10, 11], М. Ю. Лучина [12, 13], Е. Б. Томашевской [14]. Это привело к улучшению оценок мер иррациональности целого ряда чисел:

$\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512...$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant 4.865...$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant 3.6455...$ [10], $\mu(\log(7/4)) < 8.1004$ [13].

В данной работе с помощью симметризованного вещественного интеграла получена новая оценка меры иррациональности числа

$$\tau = \log(37/30), \quad \mu(\tau) < 65.3358.$$

Впервые оценку меры иррациональности числа $\log(37/30)$ получили в 1993 году А. Хеймонен, Т. Матала-ахо и К. Ваананен [1]. В своей работе они

[1]Результаты получены при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант №12-01-00171

вывели общий критерий, позволяющий оценить меру иррациональности чисел вида $\log(1-(r/s))$, где $r/s \in [-1,\ 1)$ $(r, s \in \mathbb{N})$. В качестве примера, они привели таблицу с полученными оценками при отдельных значениях r/s. Одним из приведенных значений было число $r/s = -7/30$, которое и давало следующую оценку: $\mu(\log(37/30)) \leqslant\ 619.5803...$.

Отметим также, что для получения новой оценки оптимальные параметры интегральной конструкции вычислялись с помощью разработанной автором компьютерной программы, использующей вычисления Mathcad.

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера иррациональности, метод перевала.

THE ESTIMATE OF THE IRRATIONALITY MEASURE OF NUMBER $\log\dfrac{37}{30}$

M. Yu. Luchin (Bryansk)

Abstract

Lower estimates of the irrationality measure of logarithms of rational numbers considered by many foreign authors: M. Waldschmidt [1], A. Baker and G. Wüstholz [2], A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [3], Q. Wu [4], G. Rhin [5] and P. Toffin [6]. In their works they used various integral constructions, giving small linear forms from logarithms and other numbers, calculated asymptotic of integrals and coefficients of the linear forms using the saddle point method, Laplace theorem, evaluated the denominator coefficients of the linear forms using various schemes "reduction of prime numbers". Review of some methods from the theory of diophantine approximation of logarithms of rational numbers at that time was introduced in 2004 by V. Zudilin [7].

Then V. Kh. Salikhov in [8] considerably improved estimate of the irrationality measure of $\log 3$, based on the same asymptotic methods, but used a new type of integral construction, which has property of symmetry. Subsequently, V. Kh. Salikhov due to usage of already complex symmetrized integral improved estimate of the irrationality measures of π [9]. In the future, this method (as applied to diophantine approximation of logarithms of rational numbers) was developed by his pupils: E. S. Zolotuhina [10, 11], M. Yu. Luchin [12, 13], E. B. Tomashevskaya [14]. It led to improvement estimates of the irrationality measure following numbers: $\mu(\log(5/3)) \leqslant 5.512...$ [14], $\mu(\log(8/5)) < 5.9897...$ [12], $\mu(\log(7/5)) \leqslant\ 4.865...$ [14], $\mu(\log(9/7)) \leqslant\ 3.6455...$ [10], $\mu(\log(7/4))\ <\ 8.1004...$ [13].

In this paper due to usage the symmetrized real integral we obtain a new estimate of the irrationality measure of

$$\tau = \log{(37/30)}, \quad \mu(\tau)\ <\ 65.3358.$$

First time estimate of the irrationality measure of $\log{(37/30)}$ was received in 1993 by A. Heimonen, T. Matala-aho, K. Väänänen [1]. In their work they received a common criterion that allows to evaluate irrationality measure of numbers of the form $\log(1-(r/s))$, where $r/s \in [-1,\ 1)$ $(r, s \in \mathbb{N})$. As an example, they led a table with the resulting estimates at some values r/s. One of these values was the number $r/s = -7/30$, which gave following estimate: $\mu(\log(37/30)) \leqslant 619.5803...$ We also note, that for obtain a new estimate the optimal parameters of integral construction were calculated using the developed by the author of a computer program, which uses the Mathcad calculations.

Keywords: diophantine approximations, irrationality measure, saddle point method.

1. Введение

Напомним, что мерой иррациональности $\mu(\tau)$ вещественного числа τ называется нижняя грань множества чисел λ, для которых, начиная с некоторого положительного $q \geqslant q_0(\lambda)$, выполняется неравенство

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geqslant q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что оценки снизу меры иррациональности логарифмов рациональных чисел рассматривались многими авторами: Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. [1], Rhin G. и Toffin P. [2], Wu Q. [3], Золотухина Е. С. [4]. А оценку меры иррациональности числа $\log\frac{37}{30}$ первоначально получили в 1993 году К. Ваананен, А. Хеймонен и Т. Матала-ахо [1]. В своей работе они вывели общий критерий, позволяющий оценить меру иррациональности чисел вида $\log(1-(r/s))$, где $r/s \in [-1, 1)$ $(r, s \in \mathbb{N})$. В качестве примера, они привели таблицу с полученными оценками при отдельных значениях r/s. Одним из приведенных значений было число $r/s = -7/30$, которое и давало следующую оценку:

$$\mu(\log(37/30)) \leqslant 619.5803...$$

Целью данной работы является получение новой оценки меры иррациональности числа $\log(37/30)$: $\mu(\log(37/30)) < 65.3358$. Отметим, что в приведенном ниже доказательстве используется метод симметризованных интегралов, впервые введенный В. Х. Салиховым [8]. Построение доказательства проводится аналогично приведенному в работе [13] при улучшении оценки меры иррациональности числа $\log(7/4)$, однако здесь мы применяем другой интеграл.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* p, $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant q_0$, *где* q_0 *– достаточно большое число. Тогда:*

[1]Результаты получены при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант №12-01-00171

$$\left|\log\frac{37}{30}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^{65.3358}}.$$

2. Доказательство теоремы 1.

Для доказательства теоремы рассмотрим следующий интеграл:

$$J=\int\limits_{99}^{110}\left(\frac{(x-99)^{a_3n}(x-100)^{a_2n}(x-105)^{a_1n}(x-110)^{a_2n}(x-111)^{a_3n}}{x^{n+1}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{(79x^2-16590x+870240)^{a_4n}}{(210-x)^{n+1}}\right)dx\equiv\int\limits_{99}^{110}R(x)dx, \tag{1}$$

где n – таково, что все $a_in\in\mathbb{N}$, $n\to+\infty$, a_1n – четно, $a_1=0.9$, $a_2=a_3=0.55$, $a_4=0.45$.

Подынтегральная функция $R(x)$ в (1) обладает свойством симметрии, а именно

$$R(210-x)=R(x).$$

Разложение рациональной функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$R(x)=P(x)+\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{c_j}{x^j}+\frac{c_j}{(210-x)^j}\right), \tag{2}$$

где все $c_j\in\mathbb{Q}$, $j=1,2,...,n+1$, $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg P(x)=(a_1+2a_2+2a_3+2a_4)n-2n-2=2n-2$.

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{2n-2}d_\nu x^\nu,\ d_\nu\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения c_j из (2):*

$$c_j=37^{j-1}\cdot11^{0.1n+j-1}\cdot7^{-0.2n+j-2}\cdot5^{2j-3}\cdot3^{2j-3}\cdot2^{2j-3}\cdot A_j, \tag{4}$$

где $A_j\in\mathbb{Z}$, $j=1,2,...,n+1$.

Доказательство. Обозначим $D_k\left(f(x)\right)=\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Согласно формуле дифференцирования Лейбница для любых функций u_1, u_2, ..., u_r, аналитичных в точке x=0,

$$D_k(u_1\cdot u_2\cdot...\cdot u_r)=\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_r=k,\\ k_r\geqslant0}}D_{k_1}(u_1)\cdot D_{k_2}(u_2)\cdot...\cdot D_{k_r}(u_r).$$

Следовательно из (1) имеем

$$c_j = D_{n+1-j}\left(R(x)\cdot x^{n+1}\right) =$$
$$= \sum_{\overline{k}} D_{k_1}(x-99)^{a_3n}\cdot D_{k_2}(x-100)^{a_2n}\cdot D_{k_3}(x-105)^{a_1n}\cdot D_{k_4}(x-110)^{a_2n}\cdot$$
$$\cdot D_{k_5}(x-111)^{a_3n}\cdot D_{k_6}(79x^2-16590x+870240)^{a_4n}\cdot D_{k_7}(210-x)^{-n-1},$$

где $\overline{k}=(k_1,k_2,...,k_7)$, $k_1,k_5\leqslant a_3n$, $k_2,k_4\leqslant a_2n$, $k_3\leqslant a_1n$, $k_6\leqslant 2a_4n$, $k_1+k_2+\ldots+k_7=n+1-j$.

Далее докажем, что

$$D_{k_6}(79x^2-16590x+870240)^{a_4n} = 37^{a_4n-k_6}\cdot 7^{2a_4n-k_6}\cdot 5^{a_4n-[\frac{1}{2}k_6]}\cdot 3^{a_4n-[\frac{1}{2}k_6]}\cdot$$
$$\cdot 2^{3a_4n-2k_6}\cdot V,\ \text{где } V\in\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Согласно формуле бинома Ньютона:

$$(79x^2-16590x+870240)^{a_4n} =$$
$$= \sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4n\\ s_i\geqslant 0}} \frac{(a_4n)!}{s_1!s_2!s_3!}\cdot(79x^2)^{s_1}\cdot(-16590x)^{s_2}\cdot(870240)^{s_3}\equiv$$
$$\equiv \sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4n\\ s_i\geqslant 0}} V(s_1,s_2,s_3)\cdot x^{2s_1+s_2}\cdot 37^{s_3}\cdot 7^{s_2+2s_3}\cdot 5^{s_2+s_3}\cdot 3^{s_2+s_3}\cdot 2^{s_2+3s_3}, \tag{6}$$

где $V(s_1,s_2,s_3)=\dfrac{(a_4n)!}{s_1!s_2!s_3!}\cdot 79^{s_1+s_2}\cdot(-1)^{s_2}\cdot 2^{2s_3}\in\mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{cases} 2s_1+s_2=k_6\\ s_1+s_2+s_3=a_4n\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=\dfrac{1}{2}k_6-\dfrac{1}{2}s_2\\ s_3=a_4n-\dfrac{1}{2}k_6-\dfrac{1}{2}s_2\geqslant a_4n-k_6.\end{cases}$$

Из (6) получим

$$D_{k_6}(79x^2-16590x+870240)^{a_4n} =$$
$$= \sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4n\\ s_i\geqslant 0}} V(s_1,s_2,s_3)\cdot 37^{s_3}\cdot 7^{s_2+2s_3}\cdot 5^{s_2+s_3}\cdot 3^{s_2+s_3}\cdot 2^{s_2+3s_3}. \tag{7}$$

Далее:

$$s_2+2s_3=2a_4n-k_6. \tag{8}$$

$$s_2+s_3=a_4n-\frac{1}{2}k_6+\frac{1}{2}s_2\geqslant a_4n-\left[\frac{1}{2}k_6\right]. \tag{9}$$

$$s_2+3s_3=a_4n-\frac{1}{2}k_6+\frac{1}{2}s_2+2a_4n-k_6-s_2\geqslant 3a_4n-2k_6. \tag{10}$$

Таким образом из (7), (8), (9) и (10) следует утверждение (5).

С учетом (5) получим

$$c_j = \sum_{\overline{k}} \lambda_{\overline{k}} \cdot 99^{a_3 n - k_1} \cdot 100^{a_2 n - k_2} \cdot 105^{a_1 n - k_3} \cdot 110^{a_2 n - k_4} \cdot 111^{a_3 n - k_5} \cdot 37^{a_4 n - k_6} \cdot$$
$$\cdot 7^{2a_4 n - k_6} \cdot 5^{a_4 n - [\frac{1}{2} k_6]} \cdot 3^{a_4 n - [\frac{1}{2} k_6]} \cdot 2^{3a_4 n - 2k_6} \cdot 210^{-n-1-k_7} \cdot V,$$

где

$$\lambda_{\overline{k}} = (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_5} \cdot \prod_{i=1}^{5} \left(\frac{a_i n (a_i n - 1) \cdot \ldots \cdot (a_i n - k_i - 1)}{k_i!} \right) \cdot$$
$$\cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k_7)}{k_7!}, \quad \lambda_{\overline{k}} \in \mathbb{Z}.$$

В итоге получим

$$c_j = \sum_{\overline{k}} \lambda_{\overline{k}} \cdot 37^{N_1} \cdot 11^{N_2} \cdot 7^{N_3} \cdot 5^{N_4} \cdot 3^{N_5} \cdot 2^{N_6} \cdot V \ . \tag{11}$$

Причем:

$N_1 = a_3 n - k_5 + a_4 n - k_6 = n - (k_5 + k_6) \geqslant n - (n + 1 - j) = j - 1.$

$N_2 = a_3 n - k_1 + a_2 n - k_4 = 1.1n - (k_1 + k_4) \geqslant 1.1n - (n + 1 - j) = 0.1n + j - 1.$

$$N_3 = a_1 n - k_3 + 2a_4 n - k_6 - n - 1 - k_7 =$$
$$= 0.8n - 1 - (k_3 + k_6 + k_7) \geqslant 0.8n - 1 - (n + 1 - j) = -0.2n + j - 2.$$

$$N_4 = 2a_2 n - 2k_2 + a_1 n - k_3 + a_2 n - k_4 + a_4 n - \left[\frac{1}{2} k_6\right] - n - 1 - k_7 =$$
$$= 2n - 1 - (2k_2 + k_3 + k_4 + \left[\frac{1}{2} k_6\right] + k_7) \geqslant 2n - 1 - 2(n + 1 - j) = 2j - 3.$$

$$N_5 = 2a_3 n - 2k_1 + a_1 n - k_3 + a_3 n - k_5 + a_4 n - \left[\frac{1}{2} k_6\right] - n - 1 - k_7 =$$
$$= 2n - 1 - (2k_1 + k_3 + k_5 + \left[\frac{1}{2} k_6\right] + k_7) \geqslant 2n - 1 - 2(n + 1 - j) = 2j - 3.$$

$$N_6 = 2a_2 n - 2k_2 + a_2 n - k_4 + 3a_4 n - 2k_6 - n - 1 - k_7 =$$
$$= 2n - 1 - (2k_2 + k_4 + 2k_6 + k_7) \geqslant 2n - 1 - 2(n + 1 - j) = 2j - 3.$$

Но тогда из (11) следует (4), и лемма доказана. □

Далее установим некоторые арифметические свойства коэффициентов b_ν в разложении

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{2n-2} b_\nu (x - 99)^\nu, \ \text{все } b_\nu \in \mathbb{Z}. \tag{12}$$

Следующая лемма аналогична лемме 2.10, доказанной Е. С. Золотухиной [10]. Отметим также, что подобная конструкция была применена В. Х. Салиховым при улучшении оценки меры иррациональности числа π [9].

Лемма 2. *Для коэффициентов b_ν из (12) справедливо представление вида:*

$$b_\nu = 11^{0.1n-\nu-1} M_\nu, \text{ где } M_\nu \in \mathbb{Z}, \ \ \nu \leqslant 0.1n - 1.$$

Доказательство. Очевидно, что для подынтегральной функции $R(x)$ справедливо разложение вида:

$$R(x) = \sum_{\nu=a_3 n}^{\infty} B_\nu (x-99)^\nu, B_\nu \in \mathbb{Q}, \tag{13}$$

где x принадлежит некоторой окрестности с центром в точке 99. Далее при $j = 1, ..., n+1$ имеем

$$\frac{1}{x^j} = 99^{-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot d_{\nu,j}}{99^\nu} \cdot (x-99)^\nu,$$

$$\frac{1}{(210-x)^j} = 111^{-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j}}{111^\nu} \cdot (x-99)^\nu,$$

где $d_{\nu,j} = \dfrac{j(j+1)...(j+\nu-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$.

Значит, согласно (2), (12) и (13) получим

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{2n-2} b_\nu (x-99)^\nu + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{99^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot d_{\nu,j}}{99^\nu} (x-99)^\nu +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{111^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j}}{111^\nu} (x-99)^\nu. \tag{14}$$

Из (13) и (14) для $\nu = 0, ..., 0.1n - 1$ следует, что

$$b_\nu = -\sum_{j=1}^{n+1} c_j d_{\nu,j} \left(\frac{(-1)^\nu}{99^{\nu+j}} + \frac{1}{111^{\nu+j}} \right). \tag{15}$$

Согласно (4) имеем

$$c_j = 11^{0.1n+j-1} \cdot \frac{M_j}{N_j}, \text{ где } M_j \in \mathbb{Z}, N_j \in \mathbb{N}, (N_j, 11) = 1. \tag{16}$$

Таким образом, учитывая, что $b_\nu \in \mathbb{Z}$, имеем из (15) и (16) требуемое в лемме 2 представление для коэффициентов b_ν.

Лемма 3. *Справедливо следующее представление интеграла (1) в виде линейной формы:*

$$I = J \cdot 210 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n} \cdot q_{2n} = A \cdot \log \frac{37}{30} + B,$$

где $q_m = НОК(1, 2, ..., m)$ для $m \in \mathbb{N}, A = q_{2n} \cdot 210 \cdot c_1 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n}, A, B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из (3) и (12) получим

$$\Lambda_0 = \int\limits_{99}^{110} P(x)dx = \int\limits_{99}^{110} \left(\sum_{\nu=0}^{2n-2} b_\nu (x-99)^\nu \right) dx = \sum_{\nu=0}^{0.1n-1} b_\nu \cdot \frac{11^{\nu+1}}{\nu+1} + \sum_{\nu=0.1n}^{2n-2} b_\nu \cdot \frac{11^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Из леммы 2 следует, что $11^{-0.1n} \cdot b_\nu \cdot 11^{\nu+1} \in \mathbb{Z}$, $\nu = 0, ..., 0.1n-1$. При $\nu \geqslant 0.1n$:

$$11^{-0.1n} \cdot b_\nu \cdot 11^{\nu+1} \in \mathbb{Z}, \text{ так как } b_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Далее $q_{2n} \cdot \dfrac{1}{\nu+1} \in \mathbb{N}$, так как $\nu + 1 < 2n$. Поэтому $11^{-0.1n} \cdot q_{2n} \cdot \Lambda_0 \in \mathbb{Z}$.

При $j = 1$

$$\Lambda_1 = c_1 \int\limits_{99}^{110} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(210-x)} \right) = c_1 \log \left(\frac{x}{210-x} \right) \Big|_{99}^{110} = c_1 \log \frac{37}{30}.$$

Из (4) имеем, что $c_1 \cdot 210 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n} \in \mathbb{Z}$.

При $j \geqslant 2$

$$\Lambda_j = c_j \int\limits_{99}^{110} \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(210-x)^j} \right) = -\frac{c_j}{j-1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(210-x)^{j-1}} \right) \Big|_{99}^{110} =$$

$$= -\frac{c_j}{j-1} \left(\frac{1}{2^{j-1} \cdot 5^{j-1} \cdot 11^{j-1}} - \frac{1}{2^{2j-2} \cdot 5^{2j-2}} - \frac{1}{3^{2j-2} \cdot 11^{j-1}} + \frac{1}{3^{j-1} \cdot 37^{j-1}} \right).$$

Поскольку $\dfrac{q_{2n}}{j-1} \in \mathbb{N}$, так как $j - 1 \in \{1, 2, ..., n\}$, то используя (4) получим, что $\Lambda_j \cdot 210 \cdot$
$\cdot\, 11^{-0.1n} \cdot q_{2n} \in \mathbb{Z}$.

В итоге из (1) и (2) окончательно получим

$$J = 210 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n} \cdot q_{2n} \cdot \Lambda_0 +$$

$$+ 210 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n} \cdot q_{2n} \cdot \sum_{j=2}^{n+1} \Lambda_j + 210 \cdot 11^{-0.1n} \cdot 7^{0.2n} \cdot q_{2n} \cdot c_1 \cdot \log \frac{37}{30},$$

где $j \in \mathbb{Z}$, и лемма 3 доказана.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующая лемма, доказанная М. Хата [15].

Лемма 4. *Пусть* $\Theta \in \mathbb{R}$, Θ — *иррационально,* $\varepsilon_n = q_n\Theta - p_n$, q_n, $p_n \in \mathbb{Z}$;

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log |\varepsilon_n| \leqslant -\tau, \ \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \log |q_n| = \sigma.$$

Тогда $\mu(\Theta) \leqslant 1 + \dfrac{\sigma}{\tau}$.

Применим лемму 4 для чисел: $\Theta = \log\dfrac{37}{30}$, $\varepsilon_n = J$, $q_n = A$, $p_n = B$. Асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{99}^{110} R(x)dx$ несложно вычислить с помощью теоремы Лапласа, а асимптотику q_n с помощью метода перевала.

Рассмотрим следующую функцию (см. (1)):

$$f(x) =$$
$$= \left(\frac{(x-99)^{a_3}(x-100)^{a_2}(x-105)^{a_1}(x-110)^{a_2}(x-111)^{a_3}(79x^2-16590x+870240)^{a_4}}{x(210-x)}\right).$$

Пусть $t = (x-105)^2$. Тогда:

$$f(x) \equiv g(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}a_1}(t-25)^{a_2}(t-36)^{a_3}(79t-735)^{a_4}}{11025-t}.$$

Найдем нули $g'(t)$, отличные от нулей $g(t)$. В результате получим, что $t_1 \approx 3.670692$, $t_2 \approx 16.3451$, $t_3 \approx 31.428361$, $t_4 \approx 22031.122936$. Тогда:
$\tau = -2 + 0.1\cdot\log 11 - 0.2\cdot\log 7 - \log(\max(|g(t_1)|, |g(t_2)|, |g(t_3)|)) \approx 0.23017$.
$\sigma = 2 - 0.1\cdot\log 11 + 0.2\cdot\log 7 + \log(|g(t_4)|) \approx 14.808146$.
По лемме 4 $\mu(\Theta) \leqslant 1 + \dfrac{\sigma}{\tau} \approx 65.3357$. Следовательно $\mu\left(\log\dfrac{37}{30}\right) < 65.3358$ и теорема 1 доказана.

3. Заключение

В данной работе было доказано, что мера иррациональности числа $\log(37/30)$ составляет: $\mu(\log(37/30)) < 65.3358$. Отметим также, что подбор оптимальных степеней a_1, a_2, a_3 и a_4 в интеграле (1) осуществлялся специально разработанной автором компьютерной программой, использующей вычисления Mathcad.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В. Х. Салихову за многочисленные советы и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Waldschmidt M. Minorations de combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques // *Can. J. Math.* 1993. Vol. 45. № 1. P. 176–224.

2. Baker A., Wüstholz G. Logarithmic forms and group varieties // *J. Reine Angew. Math.* 1993. Vol. 442. P. 19–62.

3. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // *Manuscripta Math.* 1993. Vol. 81. № 1. P. 183–202.

4. Wu Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // *Math. Comput.* 2002. Vol. 72. № 242. P. 901 – 911.

5. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité, Séminaire de Théorie des Nombres (Paris 1985-86) // *Progress in Math.* 1987. Vol. 71 P. 155 – 164.

6. Rhin G., Toffin P. Approximants de Padé simultanés de logarithmes // *J. Number Theory.* 1986. Vol. 24. P. 284 – 297.

7. Зудилин В. В. Эссе о мерах иррациональности π и других логарифмов // *Чебышевский сборник.* 2004. Т. 5. № 2. С. 49 – 65.

8. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // *ДАН РФ.* 2007. Т. 417, № 6. С. 753 – 755.

9. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // *Математические заметки.* 2010. Т. 88, № 4. С. 583 – 593.

10. Золотухина Е.С. Диофантовы приближения некоторых логарифмов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 100 с.

11. Сальникова Е.С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ // *Фундам. и прикл. математика.* 2010. Т. 16, № 6. С. 139 – 155.

12. Лучин М.Ю. О диофантовых приближениях некоторых логарифмов // *Вестник Брянского государственного университета.* 2012. № 4 (2). С. 22 – 28.

13. Лучин М.Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln\frac{7}{4}$ // *Чебышевский сборник.* 2013. Т. 14. № 2. С. 123 – 131.

14. Томашевская Е.Б. О диофантовых приближениях значений функции log x // *Фундам. и прикл. математика.* 2010. Т. 16 № 6. С. 157 – 166.

15. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // *Acta Arith.* 1993. Vol. 63. № 4. P. 335 – 349.

Брянский государственный технический университет
Поступило 16.02.2014