

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 517.5

О НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М. С. Саидусайнов (г. Душанбе)

Аннотация

В статье вычислены точные значения различных поперечников в пространстве $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ с весом γ классов $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$. Эти классы состоят из функций f , аналитических в круге $U_R := \{z : |z| \leq R\}$ ($0 < R \leq 1$), у которых производные r -го порядка по аргументу $f_a^{(r)}$ принадлежат пространству $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < R \leq 1$), и имеют усреднённые модули гладкости второго порядка, мажорируемые заданной функцией Φ , причём всюду далее предполагается, что $\Phi(t), t \geq 0$ есть произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$.

Доказаны точные неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями аналитических в единичном круге функций и интегралами, содержащими усреднённое значение модуля гладкости второго порядка производной r -го порядка функции с конкретным весом, вытекающей из содержательного смысла постановки самой задачи. Полученный результат гарантирует вычисление точных значений бернштейнских и колмогоровских поперечников. Метод приближения, полученный при оценке сверху n -поперечника Колмогорова, опирается на оценке модуля гладкости комплексных полиномов, ранее доказанной Л. В. Тайковым.

Особый интерес представляет задача построения наилучших линейных методов приближения классов функций $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ и связанные с этой задачей вычисления точных значений линейных и гильбертовских n -поперечников. Найденные наилучшие линейные методы зависят от заданного числа $\mu \geq 1$ и, в частности, при $\mu = 1$ содержат ранее известные результаты. Также указаны в явном виде оптимальные подпространства заданной размерности, реализующие значения поперечников.

Ключевые слова: наилучший линейный метод, n -поперечники, модуль гладкость.

Библиография: 18 названий.

ON THE BEST LINEAR METHOD OF APPROXIMATION OF SOME CLASSES ANALYTIC FUNCTIONS IN THE WEIGHTED BERGMAN SPACE

M. S. Saidusaynov (Dushanbe)

Abstract

In this paper the exact values of different widths in the space $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ with the weight γ for classes $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ were calculated. These classes consist from functions f , which are analytic in a circle $U_R := \{z : |z| \leq R\}$ ($0 < R \leq 1$) whose n -th derivatives by argument $f_a^{(r)}$ is belong to the space $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < R \leq 1$) and have an averaged modulus of smoothness of second order majorized by function Φ , and everywhere further assumed that the function $\Phi(t), t > 0$ is an arbitrary function that $\Phi(0) = 0$.

The exact inequalities between the best polynomial approximation of analytic functions in a unit disk and integrals consisted from averaged modulus of smoothness of second order functions with r -th derivatives order and concrete weight which is flow out from substantial meaning of

problem statement. The obtained result is guarantee to calculate the exact values of Bernshtein and Kolmogorov's widths. Method of approximation which is used for obtaining the estimation from above the Kolmogorov n -width is learn on L. V. Taykov work which earlier is proved for modulus of smoothness of complex polynomials.

The special interest is offer the problem about constructing the best linear methods of approximation of classes functions $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ and connected to it the problem in calculating the exact values of Linear and Gelfand n -widths. The founded best linear methods is depend on given number $\mu \geq 1$ and in particular when $\mu = 1$ is contain the previous proved results. Also showed the explicit form an optimal subspaces given dimension which are implement the values of widths.

Keywords: the best linear method, n -widths, module of smoothness.

Bibliography: 18 titles.

1. Введение

Пусть X — произвольное банахово пространство; $L_n \subset X$ — подпространство размерности n ; $\mathcal{L}(f, L_n)$ — линейный непрерывный оператор, переводящий X в L_n . Наилучшее приближение функции $f \in X$ элементами $\varphi \in L_n$ определим равенством

$$E(f, L_n)_X := \inf \{ \|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n \},$$

а уклонение функции $f \in X$ от линейного непрерывного оператора $\mathcal{L}(f, L_n)$ в метрике пространства X обозначим

$$\mathcal{E}(f, \mathcal{L}(f, L_n))_X = \|f - \mathcal{L}(f, L_n)\|_X.$$

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \in X$ полагаем

$$E(\mathfrak{M}, L_n)_X := \sup \{ E(f, L_n)_X : f \in \mathfrak{M} \},$$

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}, L_n)_X := \sup \{ \mathcal{E}(f, \mathcal{L}(f, L_n))_X : f \in \mathfrak{M} \}.$$

Пусть S — единичный шар в X , а L^n — линейное подпространство коразмерности n из X . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : L_{n+1} \subset X \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \sup \{ \|f\|_X : f \in \mathfrak{M} \cap L^n \} : L^n \subset X \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ E(\mathfrak{M}, L_n)_X : L_n \subset X \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \inf \{ \inf \{ \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}, L_n)_X : \mathcal{L} : X \rightarrow L_n \} : L_n \subset X \},$$

соответственно называют бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным n -поперечниками.

Перечисленные выше n -поперечники монотонно убывают по n и удовлетворяют соотношения [1, 2]:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq \frac{d_n(\mathfrak{M}, X)}{d^n(\mathfrak{M}, X)} \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X). \quad (1)$$

Если существует подпространство $L_{n+1}^0 \subset X$, для которого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup \{ \varepsilon > 0 : (\varepsilon S \cap L_{n+1}^0) \subset \mathfrak{M} \},$$

то оно является экстремальным для бернштейновского n -поперечника. Аналогично, если существуют подпространства $L_n \subset X$, на которых достигаются внешние нижние грани в определении остальных n -поперечников, то указанные подпространства называются экстремальными. Если существует линейный оператор $\mathcal{L}^* : X \rightarrow L_n^*$, для которого

$$\delta_n(\mathfrak{M}, X) = \mathcal{E}(\mathfrak{M}, \mathcal{L}^*, L_n^*),$$

то его называют наилучшим линейным методом приближения множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X .

2. Вычисление значения n -поперечников

Вопросы вычисления точных значений n -поперечников некоторых классов аналитических в круге функций и построения наилучших линейных методов приближения в весовых пространствах Бергмана рассматривались, например, в работах [3]–[12]. В данной работе мы продолжим исследование в этом направлении и вычислим точные значения линейных и гильбертовских n -поперечников. С этой целью построены наилучшие линейные методы приближения рассматриваемых классов функций.

Приведём обозначения и определения, нужные нам в дальнейшем. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{C}$ — множество натуральных, положительных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $U_R \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ — круг радиуса $R \in (0, 1]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; $U_1 := U$; $\mathcal{A}(U_R)$ — множество аналитических в U_R функций. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$ символом $B_{q,\gamma}$ обозначим банахово пространство Бергмана с нормой

$$\|f\|_{q,\gamma} := \|f\|_{B_{q,\gamma}} = \left(\frac{1}{2\pi} \iint_{(U)} \gamma(|z|) |f(z)|^q d\sigma \right)^{1/q} < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (2)$$

где $\gamma(|z|)$ — положительная весовая суммируемая функция, $d\sigma$ — элемент площади и интеграл в (2) понимается в смысле Лебега. Очевидно, что норму (2) также можно записать в виде

$$\|f\|_{q,\gamma} = \left(\int_0^1 \rho \gamma(\rho) M_q^q(f, \rho) d\rho \right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$M_q^q(f, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

В случае $q = \infty$ дополнительно будем предполагать функцию $f(z)$ непрерывной в замкнутом круге $\bar{U} := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$. Структурные свойства функции $f(z) \in B_{q,\gamma}, 1 \leq q \leq \infty$ охарактеризуем скоростью убывания к нулю модуля гладкости

$$\begin{aligned} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} &= \sup \left\{ \left\| f_a^{(r)}(\cdot e^{i(\cdot+h)}) - 2f_a^{(r)}(\cdot e^{ih}) + f_a^{(r)}(\cdot e^{i(\cdot-h)}) \right\|_{q,\gamma} : |h| \leq t \right\} := \\ &= \sup_{|h| \leq t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \gamma(\rho) \left| f_a^{(r)}(\rho e^{i(\tau+h)}) - 2f_a^{(r)}(\rho e^{ih}) + f_a^{(r)}(\rho e^{i(\tau-h)}) \right|^q d\rho d\tau \right)^{1/q} \end{aligned} \quad (3)$$

производных функций $f_a^{(r)}(z)$ ($f_a^{(0)} \equiv f(z)$, $r \in \mathbb{Z}_+$) при $t \rightarrow 0$, задавая эту скорость убывания посредством мажоранты некоторой усреднённой с заданным весом величины, содержащей $\omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)$. При этом указанные производные последовательно определяются равенствами

$$f'_a(z) = f'(z) \cdot z'_x = f'(z) \cdot zi \text{ и } f_a^{(r)}(z) = \left\{ f_a^{(r-1)}(z) \right\}'_a, \quad (r \geq 2).$$

Через $B_{q,\gamma,R}$ ($1 \leq q \leq \infty, 0 < R \leq 1$) обозначим пространство Бергмана функций $f \in \mathcal{A}(U_R)$, для которых $\|f\|_{B_{q,\gamma,R}} = \|f(R \cdot)\|_{q,\gamma} < \infty$. Полагаем

$$\mathfrak{B}_{q,\gamma,a}^{(r)} = \left\{ f \in B_{q,\gamma} : \|f_a^{(r)}\|_{q,\gamma} < \infty \right\} \quad (r \in \mathbb{N}, 1 \leq q \leq \infty).$$

Множество алгебраических комплексных полиномов

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{n-k}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

степени n обозначим $\mathcal{P}_n$ и равенством

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{q,\gamma} : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$. Имеет место следующее утверждение

ТЕОРЕМА 1. *Для любой функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любом $0 < u \leq \pi/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < R \leq 1$ справедливо неулучшаемое неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt, \quad (4)$$

и знак равенства в (4) реализует функция $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий линейный оператор

$$\mathfrak{F}(f, z) = \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \{ f(ze^{it}) + f(ze^{-it}) \} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt, \quad z \in U, \quad (5)$$

который используем в качестве промежуточного приближения функции $f(z)$. Приняв обозначение $F(\rho, x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\rho e^{ix})$, перепишем оператор (5) в виде

$$\mathfrak{F}(f, \rho e^{ix}) = \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \{ F(\rho, x+t) + F(\rho, x-t) \} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt.$$

Воспользуясь хорошо известным неравенством для наилучших приближений

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma} \leq E_{n-1}(f - \mathfrak{F}(f))_{q,\gamma} + E_{n-1}(\mathfrak{F}(f))_{q,\gamma}, \quad (6)$$

оценим каждое слагаемое в правой части (6). Применяя обобщённое неравенство Минковского [13, с.395] и учитывая определение модуля гладкости, получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f - \mathfrak{F}(f))_{q,\gamma} &\leq \|f - \mathfrak{F}(f)\|_{q,\gamma} \leq \\ &= \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \|F(\rho, x+t) - 2F(\rho, x) + F(\rho, x-t)\|_{q,\gamma} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt \leq \\ &\leq \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Приступая к оценке второго слагаемого $E_{n-1}(\mathfrak{F}(f))_{q,\gamma}$ в неравенстве (6), используя схему рассуждений, приведённую в [14], можно считать функцию $f(z)$ (и, следовательно, $\mathfrak{F}(f, z)$) произвольным алгебраическим полиномом некоторой степени n , поскольку множество всех алгебраических полиномов всюду плотно в метрике $B_{q,\gamma}$ и тогда можно одновременно осуществить приближение в $B_{q,\gamma}$, как функцию $f(z)$, так и её последовательные производные по

аргументу $f_a^{(r)}(z)$. При этих соглашениях очевидно производные $\mathfrak{F}_a^{(r)}(f, z)$, $r \in \mathbb{N}$ принадлежат $B_{q,\gamma}$, и мы вправе применить неравенство

$$E_{n-1}(\mathfrak{F})_{q,\gamma} \leq n^{-r} E_{n-1}(\mathfrak{F}_a^{(r)})_{q,\gamma}, \quad (8)$$

доказанное в работе [11] при $r = 2$. Имея ввиду, что $E_{n-1}(\mathfrak{F}_a'')_{q,\gamma} \leq \|\mathfrak{F}_a''\|_{q,\gamma}$, воспользуемся определением оператора $\mathfrak{F}(f, x)$, выполним дважды интегрирование по частям, и применив упомянутое неравенство, Минковского получим

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{F}_a''\|_{q,\gamma} &= \frac{\pi}{2(\pi-2)u} \left\| \int_0^u \left\{ F_a''(\rho, x+t) + F_a''(\rho, x-t) \right\} \left(1 - \sin \frac{\pi t}{2u} \right) dt \right\|_{q,\gamma} = \\ &= \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^2 \left\| \int_0^u \left\{ F_a'(\rho, x+t) - F_a'(\rho, x-t) \right\} \cos \frac{\pi t}{2u} dt \right\|_{q,\gamma} = \\ &= \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^3 \left\| \int_0^u \left\{ F(\rho, x+t) - 2F(\rho, x) + F(\rho, x-t) \right\} \sin \frac{\pi t}{2u} dt \right\|_{q,\gamma} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi-2} \left(\frac{\pi}{2u} \right)^3 \int_0^u \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \sin \frac{\pi t}{2u} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Собирая неравенства (6)-(9) с учётом соотношения

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq R^n E_{n-1}(f)_{q,\gamma}, \quad 0 < R \leq 1, \quad (10)$$

доказанного в [11], получаем требуемое неравенства (4). Точность неравенство (4) на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, $1 \leq q \leq \infty$ проверяется непосредственным вычислением, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Из доказанной теоремы вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для произвольной $r \in \mathbb{N}$ производная $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$, то при любом $u \in (0, \pi/(2n)]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)un^r} \int_0^u \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} \left\{ 1 + \left[\left(\frac{\pi}{2un} \right)^2 - 1 \right] \sin \frac{\pi t}{2u} \right\} dt \end{aligned} \quad (11)$$

и равенство достигается на функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$.

Отметим, что неравенство (11) вытекает из соотношения (10) и (8).

СЛЕДСТВИЕ 2. При выполнении условий теоремы 1 для произвольной функции $f(z) \in B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ при любой $\mu \geq 1/2$ выполняется неухудшаемое неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \frac{\mu n R^n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f, 2t)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \quad (12)$$

и если $f_a^{(r)}(z) \in B_{q,\gamma}$, то имеет место также неуклучшаемое неравенство

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \frac{\mu n R^n}{(\pi - 2)n^r} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt. \quad (13)$$

Легко проверить, что неравенства (12) и (13) обращаются в равенства для функции $f_0(z) = az^n \in B_{q,\gamma}$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, полагая в (4) $\pi/(2\mu n) = \mu$, откуда $\mu n = \pi/(2\mu)$ ($\mu \geq 1/2$), неравенство (4) примет вид (12), а неравенство (13) вытекает из (11).

Пусть $\Phi(u)$, $u \geq 0$ — произвольная возрастающая непрерывная функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. Приняв $\Phi(u)$ в качестве мажоранты, для любого значения параметра $\mu \geq 1/2$ и $r \in \mathbb{N}$ определим класс аналитических функций

$$W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) := \left\{ f(z) \in B_{q,\gamma} : \frac{1}{h} \int_0^h \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \times \right. \\ \left. \times \left[1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right] dt \leq \Phi(h), 0 < h \leq \pi/2 \right\}.$$

Введём обозначение

$$(1 - \cos nt)_* := \{1 - \cos nt, \text{ если } nt \leq \pi; 2 \text{ если } nt > \pi\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если при некотором $\mu \geq 1/2$ и любых $h \in (0, \pi/2]$, $n \in \mathbb{N}$ мажоранта $\Phi(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/2\mu n)} \geq \frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt, \quad (14)$$

то при любых $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$ справедливы равенства

$$d_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) = b_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) = \\ = E_{n-1}(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu))_{B_{q,\gamma,R}} = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \quad (15)$$

Множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (14), не пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (13) для произвольной функции $f \in W_{q,a}^{(r)}$ получаем оценку сверху

$$E_{n-1}(f)_{q,\gamma,R} \leq \\ \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2 \left(f_a^{(r)}, 2t \right)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \right) \leq \\ \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right), \quad 0 < R \leq 1,$$

откуда сразу следует, что

$$E_{n-1} \left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) \right)_{q,\gamma,R} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \quad (16)$$

Учитывая соотношения (1) между n -поперечниками и неравенство (16), запишем оценку сверху

$$\begin{aligned} b_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) &\leq d_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) \leq \\ &\leq E_{n-1}\left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)\right)_{q,\gamma,R} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

С целью получения оценки снизу указанных n -поперечников, в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_{q,\gamma,R}$ введём в рассмотрение $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\mathcal{S}_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma,R}} \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \right\}$$

и докажем, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$. В [11] доказано, что при любых $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ и $1 \leq q \leq \infty$ для произвольной $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\|(p_n)_a^{(r)}(ze^{it}) - 2p_n^{(r)}(z) + (p_n)_a^{(r)}(ze^{-it})\|_{q,\gamma} \leq 2(1 - \cos nt)_* n^r \|p_n\|_{q,\gamma},$$

откуда немедленно получаем неравенство

$$\omega_2\left((p_n)_a^{(r)}, 2t\right)_{q,\gamma} \leq 2(1 - \cos nt)_* n^r \|p_n\|_{q,\gamma}. \quad (18)$$

Учитывая, что для любой $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ также имеет место неравенство [11]

$$\|p_n\|_{q,\gamma} \leq R^{-n} \|p_n\|_{q,\gamma,R}, \quad 0 < R \leq 1,$$

запишем (18) в следующем виде

$$\omega_2\left((p_n)_a^{(r)}, 2t\right)_{q,\gamma} \leq 2n^r R^{-n} \|p_n\|_{q,\gamma,R} (1 - \cos nt)_*. \quad (19)$$

Воспользовавшись определением класса $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ и ограничением (14), из неравенства (19) для произвольного полинома $p_n(z) \in \mathcal{S}_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_0^h \omega_2((p_n)_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt \leq \\ &\leq 2n^r R^{-n} \|p_n\|_{q,\gamma,R} \cdot \frac{1}{h} \int_0^h (1 - \cos nt)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2h} \right\} dt = \\ &= \frac{\pi}{\pi - 2} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt \leq \Phi(h), \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathcal{S}_{n+1} \subset W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$. Учитывая определение бернштейновского n -поперечника, получаем оценки снизу указанных величин

$$\begin{aligned} d_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) &\geq b_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) \geq \\ &\geq b_n(\mathcal{S}_{n+1}, B_{q,\gamma,R}) \geq \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая оценки сверху (17) и оценки снизу (20), получаем требуемое равенства (15). Необходимо отметить, что непосредственными вычислениями легко убедиться в том, что условие

(14) является необходимым и достаточным для того, чтобы при любом $\mu \geq 1/2$ и $r, n \in \mathbb{N}$ совокупность функций

$$\left\{ \frac{\pi}{4\mu(in)^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{q,\gamma}} \right\}$$

принадлежала классу $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$. Анализируя условие (14) теоремы 2, выясним значения α , при которых функция $\Phi_*(u) = u^\alpha$ удовлетворяет указанному условию. Конкретизируя функцию $\Phi_*(u)$ в (14), приходим к неравенству

$$\left(\frac{2\mu nh}{\pi}\right)^\alpha \geq \frac{\pi}{\pi-2} \int_0^1 (1 - \cos nht)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} dt. \quad (21)$$

В работе [15] доказано, что если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любых значениях $t, \tau \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi-2} \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi x h}{2\mu \tau}\right)_* \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi x}{2} \right\} dx \leq \frac{\Phi(h)}{\Phi(\tau)}, \quad (22)$$

то неравенство (22) выполняется, например, для степенной функции, имеющей вид $\Phi_*(u) = u^\alpha$, где

$$\alpha := \alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi-2)\mu} \int_0^1 t \left\{ 1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi t}{2} \right\} \sin \frac{\pi t}{2\mu} dt, \quad (23)$$

причём $\alpha(1) = 2/(\pi-2)$, $\lim\{\alpha(\mu) : \mu \rightarrow \infty\} = 2$ и для всех $\mu \in [1/2, +\infty)$ имеет место неравенство $2/(\pi-2) \leq \alpha(\mu) \leq 2$. Если в неравенстве (22) полагать $\tau = \pi/(2\mu n)$, то мы приходим к неравенству (14) и, полагая $\Phi_*(u) = u^\alpha$, получаем (21). Это означает, что неравенства (21) и (22) для функции $\Phi_*(u)$ эквивалентны. Следовательно, неравенство (21) выполняется для функции (23), чем и завершаем доказательство теоремы 2.

3. Наилучший линейный метод приближения

В этом пункте рассмотрим наилучший линейный метод приближения функций класса $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ и, следуя схеме рассуждений, приведённой в [16], распространим полученные в теореме 2 результаты для гильбертовских и линейных n -поперечников.

Для произвольной функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \in \mathcal{A}(U)$ запишем линейный полиномиальный оператор $(n-1)$ -й степени следующего вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) &= \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \left[\gamma_{k,n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) - 1 \right] \right\} c_k z^k, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\gamma_{k,n} := \frac{2\mu n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kx (1 - \sin \mu n x) dx. \quad (25)$$

ТЕОРЕМА 3. Если при заданном $\mu \geq 1/2, n \in \mathbb{N}$ и любых $h \in (0, \pi/2]$ функция $\Phi(h)$ удовлетворяет ограничению (14), то для произвольных $r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$, $1 \leq q \leq \infty$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n \left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) &= \mathcal{E} \left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right) = \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} : f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) \right\} = \frac{\pi R^n}{2(\pi-2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z)$ определён равенством (24) При этом:

а) $L_{n+1}^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^n\}$ является оптимальным подпространством для бернштейновского n -поперечника $b_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R})$;

б) $L_n^* = \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$ является оптимальным подпространством для колмогоровского n -поперечника $d_n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R})$;

в) $L_n^* := \{f : f \in B_{q,\gamma,R}, f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1\}$ является оптимальным подпространством коразмерности для гельфандовского n -поперечника $d^n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R})$;

д) линейный полиномиальный оператор (24) является наилучшим линейным методом приближения класса $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$

($1 \leq q \leq \infty$, $0 < R \leq 1$) и реализует линейный n -поперечник $d^n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) и б) следуют из предыдущей теоремы 2, а потому приведём доказательство остальных утверждений сформулированной теоремы. Для произвольной функций $f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ непосредственным вычислением получаем равенство

$$\begin{aligned} f(Rz) - \Lambda_{n-1,r,R}(f, Rz) &= \\ &= \frac{R^n}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} f_a^{(r)}(ze^{-it}) e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt, \quad z \in U, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{n-1,r,R}(f, z) &:= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k, \\ G_{n-1,r}(R, t) &:= \frac{1}{n^r} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R^k \frac{\cos kt}{(n+k)^r}. \end{aligned} \quad (28)$$

Легко проверить, что числовая последовательность $\{R^k(n+k)^{-r}\}$ является выпуклой и, согласно лемме 2.2 из [2, с.251], при всех $n, r \in \mathbb{N}$, $0 < R \leq 1$ и $t \in [0, 2\pi]$ функция $G_{n-1,r}(R, t) \geq 0$, а потому из (28) получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_{n-1,r}(R, t)| dt = \frac{1}{n^r}. \quad (29)$$

Далее, полагая в правой части функции (5) $u = \pi/(2\mu n)$ ($\mu \geq 1/2$), приходим к следующему равенству

$$\mathfrak{F}(f, z) = \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \{f(ze^{it}) + f(ze^{-it})\} (1 - \sin \mu nt) dt, \quad z \in U. \quad (30)$$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, запишем (30) в виде

$$\mathfrak{F}(f, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,n} c_k(f) z^k, \quad (31)$$

где коэффициенты $\gamma_{k,n}$ определены равенством (25). Из (31) сразу следует, что

$$\mathfrak{F}(f_a^{(r)}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,n} (ik)^r c_k(f) z^k.$$

Представим линейный полиномиальный оператор (24) в следующем виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z) &:= c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r R^{2(n-k)} \right\} c_k z^k + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} R^{2(n-k)} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right\} \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r \gamma_{k,n} c_k(f) z^k := \\ &:= \Lambda_{n-1,r,R}(f, z) + \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, z). \end{aligned} \quad (32)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что

$$\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, Rz) = \frac{R^n}{2\pi i r} \int_0^{2\pi} \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), ze^{it}) e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt. \quad (33)$$

Тогда из (27), (32) и (33) вытекает, что

$$\begin{aligned} f(Rz) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, Rz) &= \\ &= \frac{R^n}{2\pi i r} \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r)}(ze^{-it}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), ze^{-it}) \right\} e^{int} G_{n-1,r}(R, t) dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Учитывая определение нормы в $B_{q,\gamma}$, $1 \leq q \leq \infty$ и применив обобщённое неравенство Минковского с учётом равенства (29) из (34) получим

$$\begin{aligned} \|f(R\cdot) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, R\cdot)\| &\leq \\ &\leq \frac{R^n}{n^r} \left\| f_a^{(r)} - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)})) \right\|_{B_{q,\gamma}}, \quad 0 < R \leq 1. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \|f(R\cdot) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f, R\cdot)\| &\leq \\ &\leq \frac{R^n}{n^r} \left\{ \left\| f_a^{(r)} - \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right\|_{B_{q,\gamma}} + \left\| \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)})) \right\|_{B_{q,\gamma}} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Заменяя в неравенстве (7) функцию f на $f_a^{(r)}$, полагая в нём $u = \pi/(2\mu n)$, сразу получаем

$$\|f_a^{(r)} - \mathfrak{F}(f_a^{(r)})\|_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} (1 - \sin \mu n t) dt. \quad (36)$$

Воспользовавшись легко проверяемым равенством

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}_a''(f_a^{(r)}, ze^{-it}) G_{n-1,2}(1, t) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{F}(f_a^{(r+2)}, ze^{-it}) G_{n-1,2}(1, t) dt, \end{aligned} \quad (37)$$

применив обобщённое неравенство Минковского и используя равенство (28) при $R = 1$ и $r = 2$ с учётом (29), получаем

$$\left\| \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)})) \right\|_{B_{q,\gamma}} \leq n^{-2} \left\| \mathfrak{F}_a''(f_a^{(r)}) \right\|_{B_{q,\gamma}}. \quad (38)$$

Учитывая определение функции $\mathfrak{F}$ в равенстве (30) и дважды интегрируя по частям на основании неравенства Минковского, приходим к следующему продолжению оценки неравенства (38)

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{F}(f_a^{(r)}) - \Lambda_{n-1,2,1} \left(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}) \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} &\leq n^{-2} \left\| \mathfrak{F} \left(f_a^{(r+2)} \right) \right\|_{B_{q,\gamma}} \leq \\ &\leq \frac{\mu^3 n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \sin \mu n t dt. \end{aligned} \quad (39)$$

Из неравенств (35)–(39) для любой функции $f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ имеем

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)\|_{B_{q,\gamma,R}} &\leq \\ &\leq \frac{\mu n R^n}{(\pi - 2)n^r} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt = \\ &= \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \left(\frac{2\mu n}{\pi} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2t)_{q,\gamma} \{1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n t\} dt \right) \leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Теперь докажем, что существует функция $g_0 \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$, удовлетворяющая ограничению (14), для которой неравенство (40) обращается в равенство. Рассмотрим функцию

$$g_0(z) := \frac{\pi}{2(\pi - 2)(in)^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right) \cdot \frac{z^n}{\|z^n\|_{q,\gamma}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При доказательстве теоремы 2 было установлено, что $(n+1)$ -мерный шар полиномов радиуса, равный правой части (40), принадлежит классу $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ и так как

$$\|g_0(z)\|_{q,\gamma,R} := \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

то g_0 принадлежит шару $\mathcal{S}_{n+1}$, и следовательно, g_0 удовлетворяет ограничению (14) и принадлежит классу $W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$. Так как, кроме того, из представления (24) следует, что $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0, z) \equiv 0$, то имеет место равенство

$$\|g_0(z) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0)\|_{q,\gamma,R} := \|g_0(z)\|_{q,\gamma,R} = \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right),$$

а потому

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu); \mathcal{L}_{n-1,r,R}, \mathcal{P}_{n-1} \right)_{q,\gamma,R} &:= \\ &= \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0)\|_{q,\gamma,R} : f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) \right\} = \\ &= \|g_0(z) - \mathcal{L}_{n-1,r,R}(g_0)\|_{q,\gamma,R} := \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Полученное равенство означает, что линейный полиномиальный оператор $\mathcal{L}_{n-1,r,R}(f)$, определённый равенством (24), является наилучшим линейным методом приближения класса

$W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu)$ в метрике пространства $B_{q,\gamma,R}$. Из (41) сразу следует оценка сверху для линейного n -поперечника

$$\delta_n \left(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R} \right) \leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \quad (42)$$

Точно такую же оценку получим для гельфандовского n -поперечника. В самом деле, для произвольной функции $f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) \cap L_*^n$ в силу (34) и соотношений

$$c_k(f) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

запишем равенство

$$\begin{aligned} f(R\rho e^{it}) &= \\ &= \frac{R^n}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} \left\{ f_a^{(r)}(\rho e^{-i\theta}) - \Lambda_{n-1,2,1}(\mathfrak{F}(f_a^{(r)}), \rho e^{-i\theta}) \right\} e^{-in\theta} G_{n-1,r}(R, t - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (43)$$

Из (1), (40), (43) и определения гельфандовского n -поперечника получаем

$$\begin{aligned} d^n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}) &\leq \sup \left\{ \|f\|_{q,\gamma,R} : f \in W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu) \cup L_*^n \right\} \leq \\ &\leq \frac{\pi R^n}{2(\pi - 2)n^r} \cdot \Phi \left(\frac{\pi}{2\mu n} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Сравнивая неравенства (42), (44) с неравенствами снизу (20), в силу соотношения (1) получаем требуемые равенства (26), причём подпространство

$$L_*^n := \left\{ f : f \in B_{q,\gamma}, f^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

коразмерности n является экстремальным для гельфандовского n -поперечника

$$d^n(W_{q,a}^{(r)}(\Phi, \mu), B_{q,\gamma,R}).$$

Теорема 3 полностью доказана.

4. Заключение

Работа посвящена нахождению точных значений n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций, у которых усреднённый с весом модуль гладкости мажорируется заданной функцией. Для вычисления линейных и гельфандовских n -поперечников построены наилучшие линейные методы приближения указанного класса функции.

Автор признателен профессору В. И. Иванову за сделанные им ценные замечания в процессе подготовки статьи к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ. 1976. 324 с.
2. A. Pinkus. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo. 1985. 252 p.
3. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Киев: Наукова думка. 1983. С. 62–73.

4. Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из C^n // УМН. 1990. Т. 45. В.5(275). С. 197–198.
5. Farkov, Yu. A. The N-Widths of Hardy-Sobolev Spaces of Several Complex Variables // Journal of Approximation Theory. 1993. V. 75. P. 183–197.
6. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // ДАН России. 2002. Т. 383. №2. С. 171–174.
7. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем.заметки. 1995. Т. 57. В.1. С. 30–39.
8. Вакарчук С. Б. О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // Укр.мат. журнал. 2004. Т. 56. В.9. С. 1155–1171.
9. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. О наилучшем приближение и точные значения поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_p , $1 \leq p \leq \infty$ // ДАН России. 2006. Т. 410. №4. С. 461–464.
10. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем.сб. 2010. Т. 201. В.8. С. 3–22.
11. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение некоторых классов функций в весовом пространстве Бергмана // Изв.АН РТ. Отд. физ.-мат. , хим., геол. и техн. н. 2009. 136:3. С. 7–23.
12. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. О наилучших линейных методах и значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Докл.РАН. 2013. 450:5. С. 518–521.
13. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближений. М.: Наука. 1987. 424 с.
14. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем.заметки. 1977. Т. 22. В.2. С. 285–295.
15. Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // Геометрические вопросы теории функций и множеств. 1986. С. 91–101.
16. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М. С. Значение n -поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. В. 3. С. 40–57.
17. Фарков Ю. А. О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. Т. 19. №5, С. 185–212.
18. Саидусайнов М. С. О значении поперечников и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. В. 3. С. 91–104.

REFERENCES

1. Tikhomirov V. M. 1976, “Some problems of theory of approximation”, *Moscow: MSU*, 324 p.
2. Pinkus A. “ n -Widths in Approximation Theory”, *Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg. New York. Tokyo*, 252 p.

3. Dveyrin M. Z., Chebanenko I. V. 1983, "On polynomial approximation in the weighted Banach spaces of analytic functions", *Mapping theory and approximation of functions. Kiev: Nukova dumka*, pp. 62–73.
4. Farkov Yu. A. 1990, "Widths of Hardy classes and Bergman classes on the ball in $\mathbb{C}^n$ ", *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 45., no 5(275), pp. 197–198.
5. Farkov Yu. A. 1993, "The N-Widths of Hardy-Sobolev Spaces of Several Complex Variables", *Journal of Approximation Theory*, vol.75, pp. 183–197.
6. Shabozov M. Sh. 2002, "Widths of some class of functions in the Bergman space" *Dokl.RAN*, vol. 383., no2, pp. 171–174.
7. Vakarchuk S. B. 1995, "Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk" *Mat. Zametki*, vol. 57. no 1. pp. 30–39.
8. Vakarchuk S. B. 2004, "On some extremal problems of approximation theory in the complex plane" *Ukr. Matem. Journal*, vol. 56. no 9. pp. 1155–1171.
9. Shabozov M. Sh, Shabozov O. Sh. 2006, "On best approximation and exact values of widths of some classes functions in the Bergman space $B_p, 1 \leq p \leq \infty$ ", *Dokl.Acad.Nauk*, vol.410, no 4., pp 461–464.
10. Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh. 2010, "The widths of classes of analytic functions in a disc" *Mat. Sb.*, vol. 201. no 8. pp. 3–22.
11. Shabozov M. Sh., Langarshoev M.R. 2009, "The best approximation of some classes of functions in the weighted Bergman space", *Izv. Acad. Nauk, Rep.Taj*, vol. 136. no 3. pp. 7–23.
12. Shabozov M. Sh., Langarshoev M.R. 2013, "On the best linear methods and widths values of some classes of analytic functions in the weighted Bergman space", *Dokl.RAN*, vol. 450. no 5. pp. 518–521.
13. Korneichuk N. P. "Exact constant in the theory of approximation", *Moscow. Nauka*, 424 p.
14. Taykov L. V. 1977, "Diameters of certain classes of analytic functions", *Mat. Zametki*, vol. 22. no 2. pp. 285–295.
15. Aynulloev N. 1986, "Widths of classes of analytic functions in the unit disk", *Geometric problems of function theory and sets*, pp. 91–101.
16. Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S. 2014, "The values of n-widths and the best linear method of approximation of some classes of functions in the weighted Bergman space", *Izv. TSU. Natural Science*, no 3. pp. 40–57.
17. Farkov Yu. A. 2014, "On the best linear approximation of holomorphic functions", *Fundam.Prikl.Mat.*, no5, pp. 185–212.
18. Saidusaynov M. S. 2015, "On the values of widths and the best linear methods of approximation in the weighted Bergman space", *Izv. TSU. Natural Science*, no 3. pp. 91–104.

Таджикский национальный университет.

Получено 22.12.2015 г.

Принято в печать 11.03.2016 г.