ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 512.54

ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ ТИТСА ДЛЯ ПОДГРУПП F-ГРУПП

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина (Ярославль)

Аннотация

Титсом доказано, что для любой конечно порожденной линейной группы G справедливо утверждение: *либо группа G содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга* 2, *либо группа G почти разрешима.*

Это привело к понятию ***альтернатива Титса*** для класса групп: *для класса групп C выполняется* ***альтернатива Титса****, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение: либо группа G почти разрешима, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга* 2.

Изучению классов групп, для которых справедлива ***альтернатива Титса***, посвящен ряд работ. Альтернатива Титса связана со следующим вопросом, достаточно давно и независимо изучавшимся в комбинаторной теории групп:

для каких классов групп справедливо утверждение: *для произвольной группы G из этого класса справедлива альтернатива*: *либо на группе G выполняется нетривиальное тождество, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга* 2.

Для подгрупп групп с одним определяющим соотношением последний вопрос полностью исследован в работах Д. И. Молдаванского, А. А. Чеботаря, А. Карраса и Д. Солитэра.

Для групп, удовлетворяющих условиям малого сокращения, рассматриваемый вопрос изучен в работах В. П. Классена при описании подгрупп этих групп.

В известной монографии Р. Линдона и П. Шуппа дано полное описание абелевых подгрупп произвольных F-групп.

В настоящей работе усиливается этот результат: дается описание подгрупп F-групп, на которых выполняется нетривиальное тождество и устанавливается справедливость альтернативы Титса для подгрупп F-групп. Более точно, доказывается, что для подгрупп фуксовых групп выполняется усиленный вариант ***альтернативы Титса***:

произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является разрешимой ступени $\leqslant 3$ или знакопеременной группой $A(5)$, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2, *на подгруппе H произвольной фуксовой группы G не выполняется нетривиальное тождество тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Ключевые слова: фуксовы группы, F-группы, альтернатива Титса, группы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству.

Библиография: 15 названий.

ON THE TITTS' ALTERNATIVE FOR SUBGROUPS OF F-GROUPS

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina (Yaroslavl)

Abstract

Tits proved that for any finitely generated linear group G, the following statement holds:

G is either solvable-by-finite, or it contains a subgroup isomorphic to the free group F_2 of rank 2.

This leads to the concept of the ***Tits' alternative*** for a class of groups: *For a class C of groups the **Tits' alternative** holds, if an arbitrary group G from this class is either solvable-by-finite, or it contains a subgroup isomorphic to the free group F_2 of rank* 2.

A number of works have addressed the studying of the classes of groups for which the ***Tits' alternative*** holds. The Tits' alternative is related to the following problem which has been independently studying for a long time in combinatorial group theory:

Find the class of groups possessing the following property: *for an arbitrary group G from this class, the following alternative holds: either a non-trivial identity holds on the group G, or G contains a subgroup isomorphic to the free group F_2 of rank* 2.

For subgroups of the groups with one defining relation, this problem was fully studied by D. I. Moldavanskii, A. A. Chebotar', A. Karrass and D. Solitar. For groups satisfying small cancellation conditions, this problem was studied by V. P. Klassen in describing the subgroups of such groups.

The full description of Abelian subgroups of arbitrary F-groups is given in the famous monograph by R. Lindon and P. Schupp.

In the present work, this result is strengthened: we give a description of subgroups of F-groups, on which a non-trivial identity holds and prove the Tits alternative for subgroups of F-groups. More accurately, we prove that for the subgroups of Fuchsian groups, the strengthened variant of the ***Tits' alternative*** holds:

An arbitrary subgroup H of a Fuchsian group either is solvable group of degree $\leqslant 3$ or alternating group $A(5)$, or H contains a subgroup isomorphic to the free group of rank 2, *No non-trivial identity does hold on a subgroup H of an arbitrary Fuchsian group G if and only if H contains a subgroup isomorphic to the free group F_2 of rank* 2.

Keywords: Fuchsian groups, F-groups, Tits' alternative, group satisfying a non-trivial identity.

1. Введение

Титсом [1] доказано, что для любой конечно порожденной линейной группы G справедливо утверждение:

либо группа G содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2,

либо группа G почти разрешима.

Это привело к понятию ***альтернатива Титса*** для класса групп:

для класса групп C выполняется ***альтернатива Титса****, если для произвольной группы G из этого класса справедливо утверждение*

либо группа G почти разрешима, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Изучению классов групп, для которых справедлива ***альтернатива Титса***, посвящен ряд работ, например, [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

Альтернатива Титса связана со следующим вопросом, достаточно давно и независимо изучавшимся в комбинаторной теории групп:

для каких классов групп C справедливо утверждение:

для произвольной группы G из этого класса справедлива альтернатива:

либо на группе G выполняется нетривиальное тождество, либо она содержит подгруппу, изоморфную свободной группе F_2 ранга 2.

Для подгрупп групп с одним определяющим соотношением последний вопрос полностью исследован в работах Д.И. Молдаванского [10], А.А. Чеботаря [11] и А. Карраса и Д. Солитэра [12]. Кроме того, в работе А. Карраса и Д. Солитэра [12] доказано, что если H – подгруппа группы G с одним определяющим соотношением, то либо H содержит свободную подгруппу ранга 2, либо H разрешима, а значит, как доказано Д.И. Молдаванским [10], метабелева. Таким образом для подгрупп групп с одним определяющим соотношением выполнен усиленный вариант ***альтернативы Титса***. Для групп, удовлетворяющих условиям малого сокращения, рассматриваемый вопрос изучен в работах В.П. Классена при описании подгрупп этих групп.

В то же время Брин и Сквайер построили группу

$$G(2) \;=\; \langle\langle a, b \,|\, [a, b^2a^{-1}b^{-1}] = 1, [a, b^4a^{-1}b^2] = 1\rangle\rangle,$$

на которой не выполняется никакое нетривиальное тождество, однако в нее не вложима свободная группа F_2 ранга 2.

В соответствии с определением из монографии Р. Линдона и П. Шуппа [9] F-группой мы называем группу с заданием вида

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

где $p, n \geqslant 0$, все $m_i > 1$ и либо

$$Q \;=\; [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}], \quad \text{где } 2t = n \text{ и } [a, b] \text{ -- коммутатор элементов } a \text{ и } b,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Как отмечается в указаной монографии, F-группы – это фуксовы группы с ориентируемым или неориентируемым факторпространством, исключая те из них, которые разлагаются в свободное произведение циклических. Точнее, F-группы – это конечно порожденныые фуксовы группы, а бесконечно порожденные фуксовы группы раскладываются в свободное произведение циклических групп.

В монографии Р. Линдона и П. Шуппа [9] дано полное описание абелевых подгрупп произвольных F-групп. В работе [3] дано описание подгрупп, на которых выполняется нетривиальное тождество, произвольных фуксовых групп. В настоящем сообщении уточняются некоторые результаты из этой работы.

Теорема 1. *Для подгрупп фуксовых групп выполняется усиленный вариант* ***альтернативы Титса****:*

произвольная подгруппа H фуксовой группы либо является разрешимой ступени $\leqslant 3$ или знакопеременной группой $A(5)$, либо H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.

Следствие 1. *На подгруппе H произвольной фуксовой группы G не выполняется нетривиальное тождество тогда и только тогда, когда H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2.*

Следствие 2. *Если на подгруппе H произвольной фуксовой группы G выполняется нетривиальное тождество, то H либо разрешимая группа ступени $\leqslant 3$, либо знакопеременная группа $A(5)$.*

2. Доказательство теоремы

Доказательство. Пусть G – произвольная фуксова группа. Если она не является конечно порожденной, то раскладывается в свободное произведение циклических групп [9]. Тогда по теореме А.Г. Куроша [13] произвольная ее нециклическая подгруппа H сама является свободным произведением циклических групп. Пусть $H = A * B$, где A и B – нетривиальные группы. Если хотя бы одна из них содержит не менее трех элементов, то H содержит подгруппу, изоморфную свободной группе ранга 2 [14]. Если же A и B – группы второго порядка, то H – метабелева группа.

Если группа G является конечно порожденной фуксовой группой, то G – F-группа, поэтому произвольная ее нециклическая подгруппа H или раскладывается в свободное произведение циклических групп, либо является F-группой [9]. Поэтому остается доказать, что если H является F-группой и в нее не вложима свободная группа ранга 2, то H является разрешимой ступени $\leqslant 3$ или знакопеременной группой $A(5)$.

Пусть нециклическая группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_n \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

где $p, n \geqslant 0$, все $m_i > 1$ и либо

$$Q \;=\; [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}], \quad \text{где } 2t = n \text{ и } [a, b] \text{ – коммутатор элементов } a \text{ и } b,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Если $p = 0$, то H имеет задание

$$\langle\langle\, b_1, \ldots, b_n \,|\, Q = 1 \,\rangle\rangle,$$

и либо

$$Q \;=\; [b_1, b_2] \ldots [b_{2t-1}, b_{2t}], \quad \text{где } 2t = n,$$

либо

$$Q \;=\; b_1^2 \ldots b_t^2, \quad \text{где } t = n.$$

Так как H – нециклическая группа, то $n \geqslant 2$.

При $n = 2$ задание принимает вид

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, [b_1, b_2] \;=\; 1 \,\rangle\rangle$$

или

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, b_1^2 b_2^2 \;=\; 1 \,\rangle\rangle.$$

В первом случае H – свободная абелева группа ранга 2. А во втором случае прямые вычисления показывают, что коммутант группы H – бесконечная циклическая группа, поэтому H – метабелева группа. Заметим, что в рассматриваемом случае группа H содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2 [9].

Случай $n > 2$ не возможен, так как тогда группа H была бы свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, b_1, b_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_3, \ldots, b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по некоторым бесконечным циклическим подгруппам и в нее была бы вложима свободная группа ранга 2, что противоречит сделанному выше предположению.

При $p = 1$ задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, b_1, \ldots, b_n \,|\, Q^m = 1 \,\rangle\rangle, \quad \text{где} \quad m > 1.$$

Так как по предположению H не содержит свободную подгруппу ранга 2 и нециклическая, а кроме того H имеет кручение, так как $m > 1$, то в силу результата А. Карраса и Д. Солитэра [12] H – бесконечная диэдральная группа, т.е. имеет задание

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2 = 1, c_2^2 = 1 \,\rangle\rangle,$$

что, как легко понять, невозможно.

Пусть $p \geqslant 2$.

Если $n \geqslant 1$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, b_1, \ldots, b_n \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соотетственно элементами $a_1 \ldots a_p$ и Q.

Так как по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $n = 1$.

Так как при $p \geqslant 3$ и при $p = 2$, но $m_1 \geqslant 3$ или $m_2 \geqslant 3$, группа

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

содержит свободную подгруппу ранга 2, то остаетсяя рассмотреть два случая:

1) $n = 0$, $p \geqslant 2$;

2) $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

В первом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, \ldots, a_p \,|\, a_1^{m_1} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1, a_1 \ldots a_p = 1 \,\rangle\rangle.$$

Если $p \geqslant 4$, то H – свободное произведение групп

$$\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1 \,\rangle\rangle,$$
$$\langle\langle\, a_3, \ldots a_p \,|\, a_3^{m_3} = 1, \ldots, a_p^{m_p} = 1 \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденным соответственно элементами $a_1 a_2$ и $a_3 \ldots a_p$.

Так как в случаях, когда $p \geqslant 5$, либо $p = 4$, но по крайней мере одно из чисел m_1, m_2, m_3 или m_4 не меньше 3, одна из этих групп содержит свободную подгруппу ранга 2, а по предположению в группу H не вложима свободная подгруппа ранга 2, то $p = 4$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$.

В этом случае группа H имеет задание

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_3^2 = 1, (a_1 a_2 a_3)^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом a_1a_2. Из равенств

$$\begin{gathered}(a_1a_2a_3)^2 = 1, \quad a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1,\\ a_1^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_1^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},\\ a_2^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_2^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},\\ a_3^{\varepsilon} \cdot a_2a_3 \cdot a_3^{-\varepsilon} = a_3a_2 = (a_2a_3)^{-1},\end{gathered}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, следует, что N – нормальная подгруппа. При этом

$$H \diagup N \;=\; \langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1 \,\rangle\rangle -$$

бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H – разрешимая ступени 3.

Рассмотрим оставшийся подслучай $p = 3$ рассматриваемого первого случая, когда $n = 0$. В этом случае задание группы H принимает вид

$$\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^{m_1} = 1, a_2^{m_2} = 1, a_3^{m_3} = 1, a_1a_2a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

т.е. H – группа многогранника (m_1, m_2, m_3) [15]. Можно считать, что $m_1 \leqslant m_2 \leqslant m_3$. Для завершения доказательства воспользуемся тем, что в любой F-группе есть подгруппа конечного ранга без кручения [9]. Но это потребует отдельно рассмотреть случай, когда группа многогранника (m_1, m_2, m_3) конечна.

Известно [15], что группа многогранника (m_1, m_2, m_3) конечна лишь в следующих четырех случаях:

1) $m_1 = m_2 = 2$. В этом случае H – группа диэдра порядка $2m_3$, метабелева.

2) $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 3$. В этом случае H – знакопеременная группа $A(4)$, метабелева.

3) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 4$. В этом случае H – симметрическая группа $S(4)$ степени 4, разрешимая группа ступени 3.

4) $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$. В этом случае H – знакопеременная группа $A(5)$.

Пусть группа H бесконечна. В любой F-группе H есть нормальная подгруппа N конечного индекса без кручения [9], которая тоже является F-группой. Значит N имеет задание вида

$$\langle\langle\, t_1, s_1, \ldots, t_m, s_m \,|\, \prod_{i=1}^{m} [t_i, s_i] \;=\; 1 \,\rangle\rangle$$

или вида

$$\langle\langle\, c_1, \ldots, c_k \,|\, c_1^2 \ldots c_k^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Покажем, что в рассматриваемом случае в группе H есть нормальная подгруппа конечного индекса, являющаяся свободной абелевой группой ранга 2, значит H почти абелева.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание первого типа.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $m = 1$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, t_1, s_1 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, t_2, s_2, \ldots, t_m, s_m \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденымм соответственно элементами

$$[t_1, s_1] \quad \text{и} \quad \prod_{i=2}^{m} [t_i, s_i].$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N – свободная абелева группа ранга 2.

Предположим, что рассматриваемая подгруппа N имеет задание второго типа. Так как подгруппа N без кручения, то $k \geqslant 2$.

Так как по предположению в H не вложима свободная группа ранга 2, то $k = 2$, ибо в противном случае группа N является свободным произведением свободных групп

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,\rangle\rangle \quad \text{и} \quad \langle\langle\, c_3, \ldots, c_k \,\rangle\rangle$$

с объединением по бесконечным циклическим подгруппам, порожденымм соответственно элементами

$$c_1^2 c_2^2 \quad \text{и} \quad c_3^2 \ldots c_k^2.$$

Поэтому в N, а значит и в H, вложима свободная группа ранга 2.

Итак в этом случае N имеет задание вида

$$\langle\langle\, c_1, c_2 \,|\, c_1^2 c_2^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

В этом случае N содержит в качестве нормальной подгруппы индекса 2 свободную абелеву группу ранга 2.

Итак, N содержит в качестве нормальной подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2. Значит в рассматриваемом сучае H содержит в качестве подгруппы конечного индекса свободную абелеву группу ранга 2.

Тогда [9] для H имеются лишь следующие возможности:

1) $p = 4$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2$;

2) $p = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 6$;

3) $p = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $m_3 = 4$;

4) $p = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = 3$.

Так как мы рассматриваем случай, когда $p = 3$, то случай 1) отпадает.

В случае 2)

$$H \;=\; \langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^3 = 1, a_3^6 = 1, a_1 a_2 a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Прямые вычисления с использованием метода Райдемайстера – Шрайера [14] показывают, что коммутант $H^{(1)}$ группы H – свободная абелева группа ранга 2, значит сама группа H – метабелева.

В случае 3)

$$H = \langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^4 = 1, a_3^4 = 1, a_1a_2a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$H^{(1)} = \langle\langle\, c, d \,|\, c^2 = d^2 \,\rangle\rangle,$$

а второй коммутант $H^{(2)}$ – бесконечная циклическая группа, значит $H^{(1)}$ – метабелева группа, поэтому H – разрешимая группа ступени 3.

В случае 4)

$$H = \langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^3 = 1, a_2^3 = 1, a_3^3 = 1, a_1a_2a_3 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Прямыми вычислениями убеждаемся, что коммутант $H^{(1)}$ группы H – бесконечная циклическая группа, значит сама группа H – метабелева.

Этим завершается рассмотрение случая $n = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда $n = 1$, $p = 2$, $m_1 = m_2 = 2$.

$$H = \langle\langle\, a_1, a_2, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_1a_2b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle.$$

Обозначим через N циклическую подгруппу, порожденную элементом b_1^2. Легко проверить, что N – нормальная подгруппа и

$$H/N = \langle\langle\, a_1, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle -$$

бесконечная диэдральная группа, метабелева. Значит сама группа H – разрешимая ступени 3. $\square$

В ходе доказательства теоремы были доказаны и оба следствия.

3. Заключение

Из доказательства теоремы получаем полный список подгрупп с нетривиальными тождествами F-групп:

1) циклические подгруппы конечных и бесконечных порядков;

2) конечные подгруппы:

2.1) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, (a_1a_2)^{2n} = 1 \,\rangle\rangle$ – группа диэдра порядка $2n$, метабелева;

2.2) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^3 = 1, (a_1a_2)^3 = 1 \,\rangle\rangle$ – знакопеременная группа $A(4)$ степени 4, метабелева;

2.3) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^3 = 1, (a_1a_2)^4 = 1 \,\rangle\rangle$ – симметрическая группа $S(4)$ степени 4, разрешимая ступени 3;

2.4) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^3 = 1, (a_1a_2)^5 = 1 \,\rangle\rangle$ – знакопеременная группа $A(5)$ степени 5.

3) Бесконечные подгруппы с нетривиальными тождествами F-групп:

3.1) $\langle\langle\, a_1, a_2, a_3 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_3^2 = 1, (a_1a_2a_3)^2 = 1 \,\rangle\rangle$ – разрешимая группа ступени 3 с бесконечным циклическим вторым коммутантом;

3.2) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^3 = 1, (a_1a_2)^6 = 1 \,\rangle\rangle$ – метабелева группа, ее коммутант имеет индекс 6 и является свободной абелевой группой ранга 2;

3.3) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^4 = 1, (a_1a_2)^4 = 1 \,\rangle\rangle$ – разрешимая группа ступени 3 с бесконечным циклическим вторым коммутантом;

3.4) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^3 = 1, a_2^3 = 1, (a_1a_2)^3 = 1 \,\rangle\rangle$ – метабелева группа, ее коммутант – бесконечная циклическая группа;

3.5) $\langle\langle\, a_1, a_2, b_1 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1, a_1a_2b_1^2 = 1 \,\rangle\rangle$ – разрешимая группа ступени 3;

3.6) $\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, b_1^2b_2^2 = 1 \rangle\rangle$ – метабелева группа с бесконечным циклическим коммутантом;

3.7) $\langle\langle\, b_1, b_2 \,|\, [b_1, b_2] = 1 \,\rangle\rangle$ – свободная абелева группа ранга 2;

3.8) $\langle\langle\, a_1, a_2 \,|\, a_1^2 = 1, a_2^2 = 1 \,\rangle\rangle$ – метабелева группа с бесконечным циклическим коммутантом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tits J. Free subgroups in linear groups // J. Algebra. 1972. Vol. 20. P. 250–270.

2. Majeed A., Mason A.W. // Glasgow Math. J. 1989. Vol. 19. P. 45 – 48.

3. Дурнев В. Г. О некоторых подгруппах фуксовых групп // Вопросы теории групп и гомологической алгебры: межвуз. темат. сб. Ярославль. ЯрГУ. 1998. С. 69 – 77.

4. Rosenberger G. On free subgroups of generalized triangle groups // Алгебра и логика. 1989. Т. 28. №2. С. 227 – 240.

5. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrite groups: a path to combinatorial group theory through one-relator products. New York: Marcel Dekker. 1999.

6. Беняш-Кривец В. В. Об альтернативе Титса для некоторых конечно порожденных групп // Доклады НАН Беларуси. 2003. Том 47. №2. С. 29 – 32.

7. Беняш-Кривец В. В. О свободных подгруппах некоторых треугольных групп // Доклады НАН Беларуси. 2003. Том 47. №3. С. 14 – 17.

8. Баркович О. А, Беняш-Кривец В. В. Об альтернативе Титса для некоторых обобщенных треугольных групп типа (3, 4, 2) // Доклады НАН Беларуси. 2004. Том 48. №3. С. 28 – 33.

9. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

10. Молдаванский Д. И. О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журнал. 1967. Том 8. С. 1370 – 1384.

11. Чеботарь А. Подгруппы групп с одним определяющим соотношением, не содержащие свободных подгрупп ранга 2 // Алгебра и логика. 1971. Том 10. С. 570 – 586.

12. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Canad. J. Math. 1971. V. 23. P. 627 – 643.

13. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.

14. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

15. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
Поступило 21.01.2014