

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-292-306

Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах¹

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, Д. В. Праведников

Соколова Марина Юрьевна — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Христич Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Праведников Даниил Вячеславович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: zumastral@mail.ru

Аннотация

Для модели гипопругого анизотропного материала получены динамические уравнения распространения акустических волн, записанные относительно поля скоростей, связанного с прохождением волны. Рассматривается распространение плоской монохроматической волны в среде с однородными предварительными конечными деформациями и начальными напряжениями. Предполагается, что при распространении звуковых волн градиенты перемещений и скоростей малы, а поле начальных напряжений однородно. С использованием этих допущений записаны уравнения движения, линеаризованные в окрестности начального напряженно-деформированного состояния.

В рамках построенной модели получены обобщенные на случай гипопругой среды уравнение Кристоффеля, выражение для вектора лучевой скорости, уравнение поверхности рефракции. Эти уравнения позволяют проанализировать влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн.

Определены векторы лучевых скоростей, описывающие перенос энергии при прохождении акустических волн. Найдено выражение для угла, который характеризует отклонение направления переноса энергии от направления распространения волны. Рассмотрено влияние начальных напряжений и учета нелинейности на отклонение вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости по сравнению с классическим решением.

Решена задача об отражении плоской упругой волны от жесткой преграды. Рассмотрено влияние начальных напряжений на изменение угла отражения квазипродольных и квазипоперечных волн от жесткой преграды.

На примере анизотропного материала с симметрией свойств, присущих кубическим кристаллам, проведена оценка влияния предварительных напряжений на такие характеристики распространения волн, как фазовые скорости, направления векторов поляризации, векторы лучевых скоростей и векторы рефракции.

Ключевые слова: гипопругие анизотропные материалы, акустические волны, начальные напряжения, конечные деформации, фазовая скорость, лучевая скорость, отражение волн, вектор рефракции.

Библиография: 17 названий.

¹Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

Для цитирования:

Соколова, М.Ю., Христич, Д.В., Праведников, Д.В. Влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн в анизотропных средах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 292–306.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-292-306

The effect of initial stresses on main characteristics of elastic waves in anisotropic media

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, D. V. Pravednikov

Sokolova Marina Yurievna — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Khristich Dmitrii Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru

Pravednikov Daniil Vyacheslavovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: zumastral@mail.ru

Abstract

For a model of a hyperelastic anisotropic material, dynamic equations of acoustic wave propagation, written with respect to the velocity field associated with the passage of the wave are obtained. The propagation of a plane monochromatic wave in a medium with homogeneous preliminary finite strains and initial stresses is considered. It is assumed that during the propagation of sound waves, the gradients of displacements and velocities are small, and the field of initial stresses is homogeneous. Using these assumptions, the equations of motion, linearized in the vicinity of the initial stress-strained state are written.

Within the framework of the constructed model, the Christoffel equation, the expression for the radial velocity vector, and the equation of the refraction surface are generalized for the case of a hypoelastic medium. These equations make it possible to analyze the effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves.

The radial velocity vectors describing the energy transfer during the passage of acoustic waves are determined. An expression for the angle that characterizes the deviation of the direction of energy transfer from the direction of wave propagation is obtained. The effect of initial stresses and account of nonlinearity on the deviation of the radial velocity vector from the phase velocity vector compared with the classical solution is considered.

The problem of reflection of a plane elastic wave from a rigid barrier is solved. The influence of initial stresses on the change in the angle of reflection of quasi-longitudinal and quasi-transverse waves from a rigid barrier is considered.

For an anisotropic material with symmetry of properties inherent in cubic crystals, the influence of prestresses on wave propagation characteristics such as phase velocities, directions of polarization vectors, radial velocity vectors and refraction vectors is estimated.

Keywords: hypoelastic anisotropic materials, acoustic waves, initial stresses, finite strains, phase velocity, radial velocity, wave reflection, refraction vector.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Sokolova, M.Yu., Khristich, D.V., Pravednikov, D.V. 2024, "The effect of initial stresses on the main characteristics of elastic waves in anisotropic media", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 292–306.

Введение

Анизотропные материалы широко применяются в современных приборах и устройствах. Особенности распространения упругих волн в таких материалах, главным образом в кристаллах, делают их незаменимыми в акустооптической технике. Обычно распространение акустических (звуковых) волн в кристаллах рассматривается в рамках линейной теории упругости [1, 2, 3, 4, 5, 6]. В работах [1, 2] подробно рассмотрены основные законы и характеристики упругих волн в кристаллах, определены понятия фазовых и лучевых (групповых) скоростей, векторов рефракции (медленностей). В работе [2] приведены сечения поверхностей фазовых и лучевых скоростей, поверхностей медленностей различными кристаллографическими плоскостями для кристаллов, относящихся к разным кристаллографическим системам (сингониям). Вид этих сечений демонстрирует анизотропию акустических свойств рассматриваемых кристаллов. В работах [4, 5, 6] подробно изучается анизотропия упругих волн в кристалле теллура, отражение и преломление упругих волн в акустооптических кристаллах, обладающих сильной анизотропией. Рассмотрены некоторые особенности поведения упругих волн на границе раздела, в том числе связанные с перераспределением потоков энергии в отраженных волнах.

Развитие технологий получения композиционных материалов позволяет создавать анизотропные материалы с заданными свойствами. Изделия из таких материалов при эксплуатации подвергаются механическому нагружению, которое может сопровождаться конечными деформациями. При этом возникающие напряжения могут существенно изменить степень анизотропии свойств материала. Если акустические волны распространяются в анизотропной среде с конечными деформациями и начальными напряжениями, то использование линейной теории упругости становится некорректным. Наибольшее число работ, посвященных распространению волн в нелинейно упругой среде, использует модели гиперупругих изотропных и анизотропных материалов [3, 7, 8]. Другой подход связан с использованием моделей гипопругих материалов, в которых постулируется квазилинейная связь между скоростью изменения напряжений и тензором деформации скорости. Распространению волн в гипопругих изотропных материалах посвящены работы [9, 10, 11, 12]. Волны в гипопругих анизотропных материалах рассмотрены в работах [13, 14]. В работе [13] исследовалось влияние предварительных конечных деформаций на вид поверхностей фазовых скоростей кубических кристаллов, а в работе [14] проведен анализ изменения фазовых скоростей распространения волн в кубических кристаллах при действии начальных напряжений.

Учет начальных напряжений и предварительных конечных деформаций требует преобразования основных динамических уравнений. Динамические уравнения распространения волн для гиперупругих и гипопругих материалов получены в работах [13, 15, 16]. В данной статье уравнения распространения акустических волн в гипопругих материалах будет записано относительно поля скоростей, связанного с прохождением волны в среде с однородными конечными деформациями и начальными напряжениями. На примере анизотропного материала, по типу симметрии относящегося к кристаллам кубической сингонии, будет рассмотрено влияние напряжений одноосного сжатия на основные характеристики распространения волн: фазовые скорости, векторы поляризации, векторы лучевых скоростей, а также на изменение углов отражения в средах с начальными напряжениями.

1. Основные уравнения модели

Будем рассматривать конечные деформации анизотропных материалов в рамках модели гипотупругости. В этом случае постулируется квазилинейная связь между объективной производной обобщенного тензора истинных напряжений Σ с тензором деформации скорости $\mathbf{W}$. Обобщенный тензор истинных напряжений связан с тензором напряжений Коши $\mathbf{S}$ выражением [17]:

$$\Sigma = J\mathbf{S}, \quad J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (1.1)$$

где J — относительное изменение объема, ρ_0, ρ — плотность материала в естественном и текущем состояниях соответственно.

Тензор деформации скорости представляет собой симметричную часть градиента поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla), \quad (1.2)$$

где $\nabla(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{x}}$ — набла-оператор текущего состояния с радиус-вектором $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

В качестве объективной производной тензора напряжений используем производную Яуманна [17]:

$$\Sigma^\nabla = \dot{\Sigma} + \boldsymbol{\omega} \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.3)$$

где $\dot{\Sigma} = \frac{d\Sigma}{dt}$ — полная производная тензора Σ по времени, точкой обозначено скалярное произведение.

В определение (1.3) входит тензор вихря $\boldsymbol{\omega}$, определяемый по полю скоростей выражением [17]:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla). \quad (1.4)$$

Определяющие соотношения гипотупругого анизотропного материала записываются в виде

$$\Sigma^\nabla = \mathbf{N} \cdot \cdot \mathbf{W}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{N}$ — тензор четвертого ранга, определяемый свойствами среды.

Будем считать, что в некоторый момент времени t_0 в среде отсутствуют деформации и напряжения (среда находится в естественном состоянии). Также предположим, что в процессе деформаций компоненты тензора $\mathbf{N}$ в главных осях анизотропии, определяемых векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$, не изменяются. Результатом интегрирования соотношений (1.5) на бесконечно-малом временном интервале $[t_0, t_0 + \Delta t]$ является обобщенный закон Гука, поэтому в естественном состоянии тензор $\mathbf{N}$ совпадает с тензором упругости материала, компоненты которого выражаются через константы упругости. Для анизотропных материалов с различным типом симметрии свойств тензор $\mathbf{N}$ имеет различное число ненулевых компонент [1, 2, 17].

Пусть к моменту времени t_1 в среде создано однородное напряженно-деформированное состояние, которое назовем начальным. Полагаем, что переход от естественного состояния в начальное состояние сопровождается конечными деформациями, поэтому конфигурации начального и естественного состояний различны ($\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$). В начальном состоянии поле напряжений определяется тензором $\Sigma_1 = J_1 \mathbf{S}_1$, удовлетворяющим условиям равновесия, записанным при отсутствии массовых сил:

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{S}_1 = \nabla_1 \cdot \Sigma_1 = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

так как $\nabla_1 J_1 = 0$ для однородного состояния. Здесь $\nabla_1(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{x}_1}$ — набла-оператор начального состояния с радиус-вектором $\mathbf{x}_1(\mathbf{x}_0, t)$.

В момент времени t_1 в среде возбуждается звуковая волна, что приводит к изменению полей деформаций и напряжений. В любой момент времени $t > t_1$ напряжения в среде определяются тензором $\mathbf{S}$, удовлетворяющим уравнениям движения:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (1.7)$$

При использовании модели гипопругого материала удобно записать уравнения (1.7) через скорость изменения напряжений. Результатом дифференцирования (1.7) по времени являются уравнения [17]:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{S} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = J^{-1} \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{v} \right) \right). \quad (1.8)$$

Полагая, что при распространения звуковых волн градиенты перемещений и скоростей малы, в правой части (1.8) конвективными слагаемыми можно пренебречь. Учитывая также однородность начального состояния и уравнения (1.6), получим линеаризованные в окрестности начального состояния уравнения в виде

$$\nabla_1 \cdot J_1 \dot{\mathbf{S}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.9), записанные через обобщенный тензор истинных напряжений (1.1), принимают вид

$$\nabla_1 \cdot \dot{\Sigma} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

Подставляя в (1.10) определяющие соотношения (1.5), после преобразований получим:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \mathbf{W} - \Sigma_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \Sigma_1 \cdot \nabla_1 \boldsymbol{\omega} - \Sigma_1 \cdot \nabla_1 (\nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \quad (1.11)$$

Подставим в уравнения (1.11) выражения (1.2) и (1.4) для тензоров $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей:

$$\mathbf{N} \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} + \frac{1}{2} (\Sigma_1 \cdot \nabla_1 \nabla_1 \mathbf{v} - \nabla_1 \mathbf{v} \nabla_1 \cdot \Sigma_1) - \frac{1}{2} \Sigma_1 \cdot (\nabla_1 \cdot \nabla_1 \mathbf{v} + \nabla_1 \nabla_1 \cdot \mathbf{v}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.12) записаны относительно поля скоростей частиц среды, связанного с прохождением звуковой волны в анизотропной гипопругой среде с начальными напряжениями Σ_1 .

2. Плоская монохроматическая волна

Пусть в анизотропной гипопругой среде с начальными напряжениями Σ_1 распространяется плоская монохроматическая волна, которая задана полем скоростей

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_1, \tau) = A \mathbf{p} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)), \quad (2.1)$$

где A — амплитуда скорости, $\mathbf{p}$ — вектор поляризации ($\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 1$), $\mathbf{k} = k \mathbf{n}$ — волновой вектор, k — волновое число, $\mathbf{n}$ — вектор волновой нормали ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$), ω — круговая частота, $\tau = t - t_1 > 0$ — время.

Выразим входящие в (1.11) тензоры $\mathbf{W}$ и $\boldsymbol{\omega}$ через поле скоростей (2.1), воспользовавшись выражениями (1.2) и (1.4):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} i k A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)) (\mathbf{n} \mathbf{p} + \mathbf{p} \mathbf{n}), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} i k A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega \tau)) (\mathbf{n} \mathbf{p} - \mathbf{p} \mathbf{n})$$

и вычислим также

$$\nabla_1 \cdot \mathbf{v} = ikA \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega\tau)) \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\omega^2 A \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_1 - \omega\tau)) \mathbf{p}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнения (1.11), получим аналог уравнений Кристоффеля [1, 2]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \Sigma_1) \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \Sigma_1)$ — акустический тензор, $c = \frac{\omega}{k}$ — фазовая скорость распространения волны.

Входящий в уравнения (2.2) акустический тензор имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \Sigma_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{E} - \Sigma_1) - \frac{1}{2} (\Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \Sigma_1), \quad (2.3)$$

где $\mathbf{E} = \delta_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$ — единичный тензор.

Уравнения (2.2) отличаются от классических уравнений Кристоффеля [1, 2]

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

тем, что в них вместо тензора Кристоффеля $\mathbf{M}$ используется акустический тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \Sigma_1)$, зависящий не только от свойств среды и направления распространения волны, но и от начальных напряжений в среде. В соответствии с (2.2) фазовые скорости распространения волн и векторы поляризации находятся как результат решения задачи на нахождение собственных значений и собственных векторов акустического тензора. Из уравнений (2.4) следует, что в классическом случае фазовые скорости c и векторы поляризации $\mathbf{p}$ определяются через тензор Кристоффеля. Таким образом, фазовые скорости и векторы поляризации, определенные по уравнениям (2.2), зависят от действующих в среде начальных напряжений.

Будем характеризовать изменение фазовой скорости распространения волны $c_{\mathbf{n}}$ в направлении вектора $\mathbf{n}$, вызванное действием начальных напряжений, относительной величиной

$$\Delta = \frac{c_{\mathbf{n}} - c_{\mathbf{n}0}}{c_{\mathbf{n}0}}, \quad (2.5)$$

где $c_{\mathbf{n}0}$ — фазовая скорость распространения волны в среде при отсутствии начальных напряжений.

В изотропной среде без начальных напряжений распространяются продольная волна, у которой вектор поляризации $\mathbf{p} = \mathbf{n}$, и множество поперечных волн с векторами поляризации, перпендикулярными вектору $\mathbf{n}$. В анизотропной среде наряду с продольными волнами могут распространяться квазипродольные волны, у которых вектор поляризации отклоняется от вектора волновой нормали. Такие волны можно характеризовать углом поляризации χ , косинус которого определяется выражением

$$\cos \chi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

В рассматриваемой модели угол χ также зависит от действующих в среде начальных напряжений.

3. Определение лучевой скорости в гипоупругих материалах

Известно [1, 2], что распространение акустических волн не сопровождается переносом вещества, а сопровождается переносом энергии. В изотропных средах без начальных напряжений энергия переносится в направлении вектора фазовой скорости $\mathbf{c} = c\mathbf{n}$, нормального к

фронту волны. В анизотропных средах в общем случае направление потока энергии не совпадает с вектором $\mathbf{c}$. Скорость и направление потока энергии характеризуется вектором лучевой (групповой) скорости

$$\mathbf{w} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (3.1)$$

В определении вектора лучевой скорости (3.1) удобно перейти от дифференцирования по волновому вектору $\mathbf{k}$ к дифференцированию по вектору волновой нормали $\mathbf{n}$, учитывая связь между ними $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, а также связь угловой частоты с фазовой скоростью $\omega = kc$. Тогда вектор лучевой скорости

$$\mathbf{w} = \mathbf{c} + (\mathbf{E} - \mathbf{nn}) \cdot \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.2)$$

Вектор $\mathbf{s} = \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}}$ характеризует отклонение вектора лучевой скорости $\mathbf{w}$ от вектора фазовой скорости $\mathbf{c}$. Волны, для которых $\mathbf{s} = 0$, называют обыкновенными волнами [2]. Для отыскания вектора $\mathbf{s}$ в рамках рассматриваемой модели гипотетического материала умножим скалярно обе части уравнений (2.2) на вектор поляризации $\mathbf{p}$ и продифференцируем получившееся выражение по вектору $\mathbf{n}$:

$$2\rho_0 c \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{p},$$

откуда с учетом выражения для акустического тензора (2.3) после преобразований получим

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{4} ((I_1 \mathbf{E} - 2\mathbf{\Sigma}_1) \cdot \mathbf{pp} - \mathbf{pp} \cdot \mathbf{\Sigma}_1) \right) \cdot \mathbf{n}, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{p}$ — второй тензор Кристоффеля [2], $I_1 = \mathbf{\Sigma}_1 \cdot \mathbf{E}$ — первый инвариант тензора напряжений $\mathbf{\Sigma}_1$.

В линейной теории упругости вектор $\mathbf{s}$ определяется выражением

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.4)$$

поэтому второе слагаемое в (3.3) определяет влияние начальных напряжений на отклонение вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости.

Обозначим через γ угол между векторами $\mathbf{w}$ и $\mathbf{c}$, который характеризует отклонение направления переноса энергии $\mathbf{w}$ от направления распространения волны $\mathbf{n}$. Косинус угла γ можно найти по формуле

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n})^2}}, \quad (3.5)$$

где $s = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}}$ — длина вектора $\mathbf{s}$.

Если соотношения (3.3) переписать в виде

$$\mathbf{s} = \frac{1}{c} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{A}_p = \frac{1}{\rho_0} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{4} ((I_1 \mathbf{E} - 2\mathbf{\Sigma}_1) \cdot \mathbf{pp} - \mathbf{pp} \cdot \mathbf{\Sigma}_1) \right),$$

то $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_p^T \cdot \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{n}$.

Пусть начальные напряжения являются гидростатическими $\mathbf{\Sigma}_1 = I_1 \mathbf{E}$, тогда выражение (3.3) для вектора $\mathbf{s}$ принимает вид:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{N} - \frac{1}{2} I_1 \mathbf{E} \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{p} \right) \cdot \mathbf{n}, \quad (3.6)$$

Из выражения (3.6) следует, что начальные гидростатические напряжения влияют только на длину вектора $\mathbf{s}$ и не влияют на его направление по сравнению с классическим решением (3.4).

4. Отражение волн в средах с начальными напряжениями

Для решения задачи об отражении (преломлении) упругих волн в монографиях [1, 2] вводят в рассмотрение так называемый вектор рефракции $\mathbf{m} = \frac{1}{c}\mathbf{n}$, имеющий направление вектора волновой нормали и длину, обратную величине фазовой скорости. Обычно полагают, что для падающей волны вектор рефракции $\mathbf{m}_* = \frac{1}{c_*}\mathbf{n}_*$ известен, а для отраженных волн векторы $\mathbf{m}_i$ требуется найти. Для этого используют общий закон отражения (преломления) волн, в соответствии с которым проекции векторов рефракции падающей и отраженных (преломленных) волн на поверхность раздела равны между собой [1], а также уравнение поверхности рефракции, которое в классическом случае линейной упругости имеет вид:

$$\det(\mathbf{A}_\mathbf{m} - \mathbf{E}) = 0, \quad (4.1)$$

где $\mathbf{A}_\mathbf{m} = \frac{1}{\rho_0}\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{m} = \frac{1}{\rho_0 c^2}\mathbf{M}$ — тензор рефракции.

Запишем уравнение поверхности рефракции для гипотупругой среды с начальными напряжениями. Для этого представим акустический тензор (2.3) через вектор $\mathbf{m}$ и введем тензор

$$\mathbf{A}_\mathbf{m}(\mathbf{m}, \Sigma_1) = \frac{1}{\rho_0} \left[\mathbf{m} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{m} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{m} \cdot \Sigma_1 \cdot \mathbf{m} \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \Sigma_1 \right) - \frac{1}{2} (\Sigma_1 \cdot \mathbf{m} \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{m} \cdot \Sigma_1) \right]. \quad (4.2)$$

Уравнения (2.2) через тензор (4.2) записываются в виде

$$(\mathbf{A}_\mathbf{m} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Характеристическое уравнение системы (4.3) имеет вид

$$\det(\mathbf{A}_\mathbf{m} - \mathbf{E}) = 0. \quad (4.4)$$

Сравнивая (4.4) и (4.1), назовем тензор $\mathbf{A}_\mathbf{m}$ тензором рефракции для гипотупругого материала. Уравнение (4.4) является уравнением поверхности рефракции для анизотропной гипотупругой среды с начальными напряжениями.

Рассмотрим отражение плоской волны от жесткой преграды, перпендикулярной оси анизотропии $\mathbf{a}_1$. Будем считать, что вектор волновой нормали падающей волны $\mathbf{n}_* = \cos \alpha \mathbf{a}_1 + \sin \alpha \mathbf{a}_2$. Тогда α — угол падения волны, а плоскость с базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ является плоскостью падения (рис. 1).

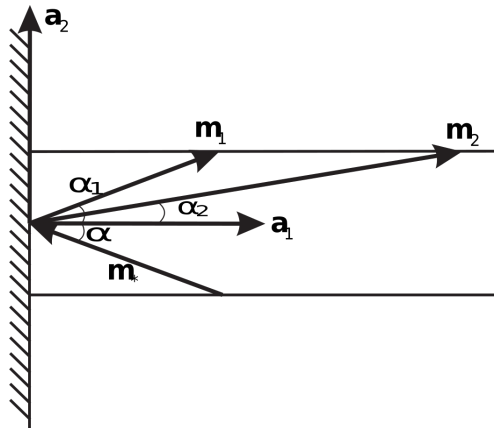


Рис. 1: Отражение упругой волны от жесткой преграды

Отраженные от жесткой преграды поляризованные в плоскости падения волны имеют векторы рефракции $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{c_1} \mathbf{n}_1$ и $\mathbf{m}_2 = \frac{1}{c_2} \mathbf{n}_2$. В соответствии с общим законом отражения

$$\mathbf{m}_* \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \quad \text{или} \quad \frac{\sin \alpha}{c_*} = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}.$$

Для отраженных волн представим векторы рефракции в виде

$$\mathbf{m}_1 = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \frac{\sin \alpha}{c_*} \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{m}_2 = \xi_2 \mathbf{a}_1 + \frac{\sin \alpha}{c_*} \mathbf{a}_2. \quad (4.5)$$

Коэффициенты ξ_1, ξ_2 являются корнями уравнения (4.4) и для отраженных волн принимают положительные значения. Поскольку тензор $\mathbf{A}_m$ зависит от начальных напряжений Σ_1 , корни уравнения (4.4) также зависят от Σ_1 . Углы отражения α_1 и α_2 определяются через коэффициенты ξ_1, ξ_2 в соответствии с выражениями

$$\cos \alpha_1 = \xi_1 c_1, \quad \cos \alpha_2 = \xi_2 c_2. \quad (4.6)$$

Отметим, что уравнение (4.4) после подстановки в него выражений (4.2) и (4.5) оказывается уравнением шестой степени относительно неизвестных коэффициентов ξ_i , решение которого в общем случае затруднительно. В работе [1] предложен графический метод определения векторов рефракции $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, основывающийся на построении поверхностей рефракции.

5. Особенности распространения волн в анизотропных материалах при действии начальных напряжений

Рассмотрим анизотропную среду, обладающую симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии. Для таких сред тензор упругости $\mathbf{N}$ может быть представлен разложением по собственным базисным тензорам [14, 16]:

$$\mathbf{N} = N_1 \Omega^{(1)} + N_2 \Omega^{(2)} + N_3 \Omega^{(3)}, \quad (5.1)$$

где N_1, N_2, N_3 связаны с упругими константами кубических кристаллов C_{11}, C_{12}, C_{44} [2] соотношениями

$$N_1 = C_{11} + 2C_{12}, \quad N_2 = C_{11} - C_{12}, \quad N_3 = 2C_{44}.$$

Собственные тензоры рассматриваемого анизотропного материала выражаются через тензоры обобщенного канонического базиса А.А. Ильюшина $\mathbf{I}^\alpha$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в виде [14, 16]:

$$\Omega^{(1)} = \mathbf{I}^0 \mathbf{I}^0, \quad \Omega^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^1 \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 \mathbf{I}^2), \quad \Omega^{(3)} = \frac{1}{3} (\mathbf{I}^3 \mathbf{I}^3 + \mathbf{I}^4 \mathbf{I}^4 + \mathbf{I}^5 \mathbf{I}^5), \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3), & \mathbf{I}^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1), & \mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3). \end{aligned}$$

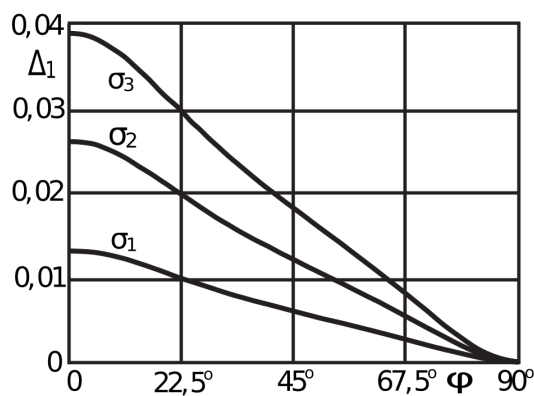
При рассмотрении анизотропных материалов важно, что тензоры $\mathbf{I}^\alpha$ определяются в базисе главных осей анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

Степень упругой анизотропии кубического кристалла характеризуется отношением $A = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} = \frac{N_3}{N_2}$. Если $A = 1$, то среда с тензором упругости (5.1) является изотропной,

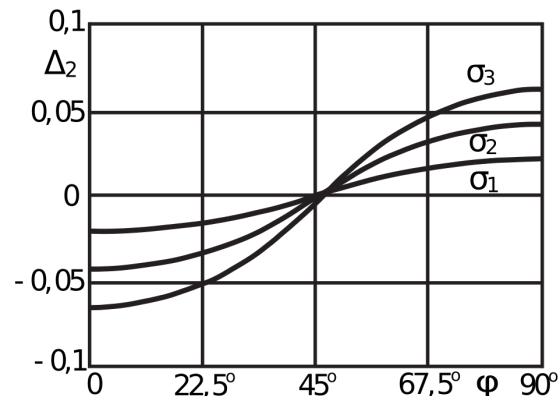
если $0 < A < 1$, то среда обладает отрицательной анизотропией, если $A > 1$, то среда обладает положительной анизотропией. У сред с положительной и отрицательной анизотропией различными являются формы фазовых поверхностей, определяемых годографом вектора фазовой скорости $\mathbf{c}$ [2].

Пусть в рассматриваемой анизотропной среде создано однородное напряженно-деформированное состояние с тензором напряжений $\Sigma_1 = \sigma \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$. При $\sigma > 0$ это одноосное растяжение, при $\sigma < 0$ — одноосное сжатие. Рассмотрим распространение в такой среде упругих волн с вектором волновой нормали, лежащим в плоскости с базисными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ так, что $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{a}_1 + \sin \varphi \mathbf{a}_2$. Угол φ характеризует направление распространения волны в рассматриваемой плоскости.

Подставляя (5.1) и (5.2) в выражение для акустического тензора (2.3), из обобщенного уравнения Кристоффеля можно найти фазовые скорости и векторы поляризации продольных (квазипродольных) и поперечных (квазипоперечных) волн как функции угла φ и величины начальных напряжений σ . По соотношениям (2.5) и (2.6) определяем относительные изменения фазовых скоростей распространения квазипродольной (c_1) и квазипоперечной (c_2) волн, поляризованных в плоскости осей анизотропии $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, а также угол поляризации квазипродольной волны χ_1 . Соответствующие графики представлены на рис. 2 и 3 для анизотропной среды со степенью анизотропии $A = 1,73$. Графики построены для значений начальных напряжений $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = -200 \text{ МПа}, \sigma_2 = -400 \text{ МПа}, \sigma_3 = -600 \text{ МПа}$.



а) продольные (квазипродольные) волны



б) поперечные (квазипоперечные) волны

Рис. 2: Относительные изменения фазовых скоростей распространения волн

Из графиков, приведенных на рис. 2, следует, что с ростом величины начальных напряжений изменение фазовых скоростей как квазипродольных, так и квазипоперечных волн возрастает, хотя в рассмотренном примере не превышает 4% для квазипродольных волн и 6% для квазипоперечных волн. Из графиков, приведенных на рис. 3, следует, что с ростом величины начальных напряжений изменение угла поляризации относительно естественного состояния, когда начальные напряжения не действуют, может достигать 50%. Если в естественном состоянии рассматриваемые волны оказываются продольными при $\varphi|_{\sigma_0} = 0, \varphi|_{\sigma_0} = 45^\circ$ и $\varphi|_{\sigma_0} = 90^\circ$, то при действии сжимающих напряжений продольными оказываются волны при $\varphi|_{\sigma_3} = 0, \varphi|_{\sigma_3} = 36,4^\circ$ и $\varphi|_{\sigma_3} = 90^\circ$, то есть положение одной из продольных волн меняется с изменением величины напряжений.

Вычисляя по тензору упругости (5.1) второй тензор Кристоффеля и по формулам (3.2), (3.3) вектор лучевой скорости, находим по соотношениям (3.4) зависимость угла γ отклонения вектора лучевой скорости от вектора фазовой скорости как функцию угла φ и величины напряжений σ . Для значений $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ строим соответствующие графики, представленные на рис. 4.

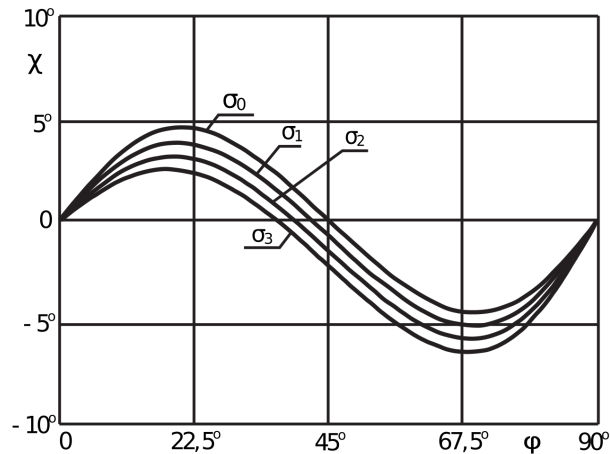
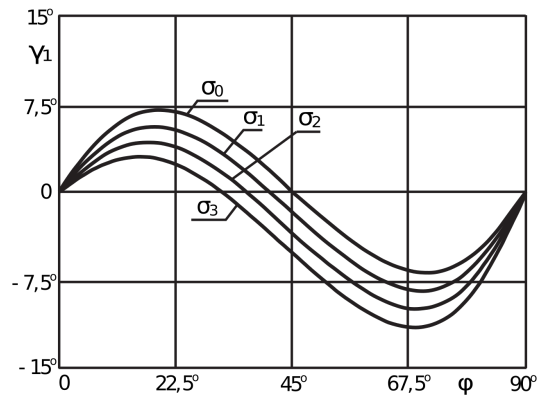
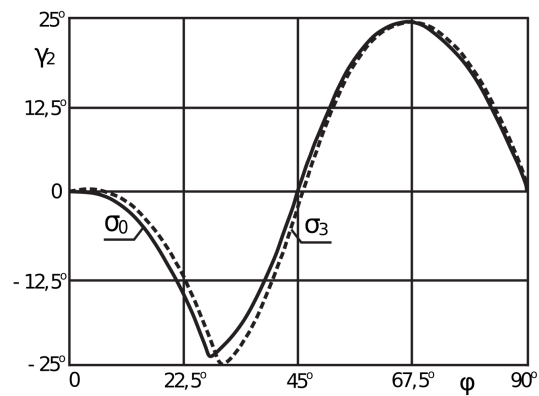


Рис. 3: Углы поляризации квазипродольных волн



а) продольные (квазипродольные) волны



б) поперечные (квазипоперечные) волны

Рис. 4: Углы между векторами лучевой скорости и фазовой скорости

Из построенных графиков следует, что отклонение направления переноса энергии от направления распространения волны по абсолютной величине больше углов поляризации и достигает в естественном состоянии для квазипродольных волн максимально 10° , а для квазипоперечных волн максимально 25° . Изменение угла γ вследствие действия начальных напряжений более существенно для квазипродольных волн, чем для квазипоперечных. Эти изменения в первом случае достигают 6° , а во втором только 3° . В естественном состоянии в рассматриваемом материале обыкновенные волны, как продольные, так и поперечные, имеют направления распространения $\varphi|_{\sigma_0} = 0$, $\varphi|_{\sigma_0} = 45^\circ$ и $\varphi|_{\sigma_0} = 90^\circ$. При действии начальных напряжений продольные и поперечные волны, распространяющиеся в направлениях $\varphi|_{\sigma_3} = 0$ и $\varphi|_{\sigma_3} = 90^\circ$, являются обыкновенными. Направление распространения обыкновенной квазипродольной волны определяется углом $\varphi|_{\sigma_3} = 31,0^\circ$, а в случае обыкновенной квазипоперечной волны $\varphi|_{\sigma_3} = 45,9^\circ$.

Рассмотрим влияние начальных напряжений на изменение угла отражения квазипродольных и квазипоперечных волн от жесткой преграды в соответствии со схемой, представленной на рис. 1. Для этого построим сечения поверхностей рефракции для этих волн в естественном состоянии и при действии сжимающих напряжений $\Sigma_1 = \sigma_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1$. Исходя из общего закона отражения, построим прямые, параллельные вектору $\mathbf{a}_1$, отстоящие от него на величину, равную проекции вектора рефракции падающей волны на поверхность раздела. На рис. 5,а показано определение векторов рефракции отраженных волн в случае, если падающая волна является

квазипродольной, а на рис. 5,б падающая волна является квазипоперечной.

Угол падения $\alpha = \frac{\pi}{6}$ принят одинаковым для падающих квазипродольной и квазипоперечной волн при $\sigma = \sigma_0$ и $\sigma = \sigma_3$. В силу симметрии свойств рассматриваемого анизотропного материала углы отражения равны углу падения одноименных волн, поэтому на рис. 5,а $\alpha_1 = \alpha$, а на рис. 5,б $\alpha_2 = \alpha$ независимо от величины действующих напряжений. Если падающая волна является квазипродольной (рис. 5,а), то результатом действия сжимающих напряжений является уменьшение угла отражения квазипоперечной волны ($\alpha_2|_{\sigma_3} < \alpha_2|_{\sigma_0}$). Если падающая волна является квазипоперечной (рис. 5,б), то результатом действия сжимающих напряжений является увеличение угла отражения квазипродольной волны ($\alpha_1|_{\sigma_3} > \alpha_1|_{\sigma_0}$).

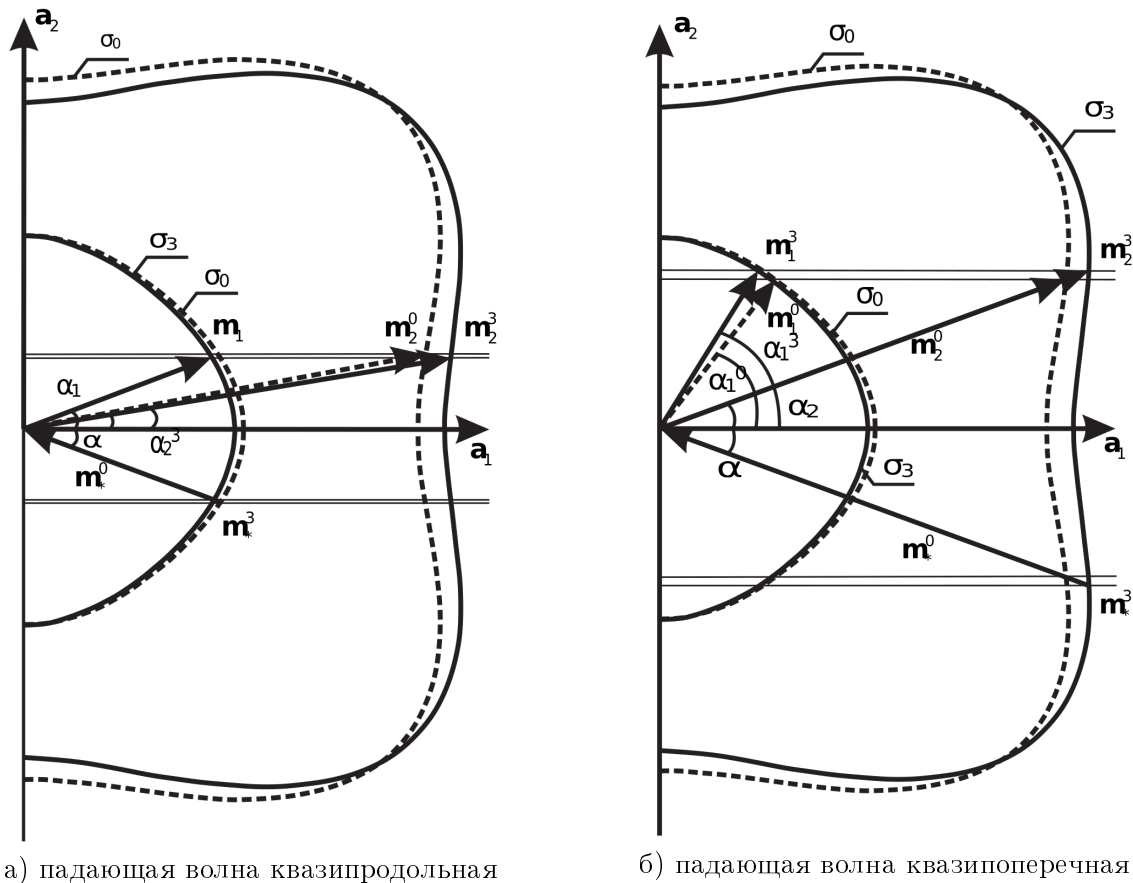


Рис. 5: Поверхности и векторы рефракции при отражении волн от жесткой преграды

6. Выводы

В работе получено уравнение распространения звуковых волн в гипотропных анизотропных материалах, записанное относительно поля скоростей, связанных с распространением волны. Это уравнение позволяет определить все характеристики упругих волн, принятые в линейной теории упругости, по заданному полю скоростей начального возмущения. В статье получены обобщенные на случай гипотропной среды уравнение Кристоффеля (2.2), выражение для вектора лучевой скорости, уравнение поверхности рефракции. Эти уравнения позволяют проанализировать влияние начальных напряжений на основные характеристики упругих волн.

Рассмотрен пример анизотропной гипотропной среды с симметрией свойств, присущей кубическим кристаллам. Показано, что начальные напряжения одноосного сжатия влияют на

величины фазовых скоростей распространения волн, направления векторов поляризации, векторов лучевых скоростей и векторов рефракции при решении задачи об отражении упругих волн. Предложенные соотношения позволяют для любой анизотропной среды при любых начальных напряжениях выявлять особенности распространения упругих волн.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. 383 с.
2. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 640 с.
3. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Киев: Наукова Думка, 1986.
4. Поликарпова Н. В., Мальнева П. В., Волошинов В. Б. Анизотропия упругих волн в кристалле теллура // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 3. С. 332-338.
5. Поликарпова Н. В., Волошинов В. Б., Иванова П. А. Отражение плоских акустических волн при наклонном падении на грань кристалла диоксида теллура // Акустический журнал. 2019. Т. 65. № 6. С. 740-750.
6. Поликарпова Н. В., Марунин М. В. Необычные случаи поведения акустических волн на границе раздела в кристалле парателлурита // Известия РАН. Серия физическая. 2021. Т. 85. № 6. С. 799-803.
7. Telichko A. V., Erohin S. V., Kvashnin G. M., Sorokin P. B., Sorokin B. P., Blank V. D. Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation // J. Mater. Sci. 2017. V. 52. P. 3447-3456.
8. Роменский Е. И., Лысь Е. В., Чеверда В. А., Эпов М. И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 5. С. 178-189.
9. Rushchitsky J. J. Nonlinear plane waves in hypoelastic materials // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham, 2014.
10. Rushchitsky J. J. On the types and number of plane waves in hypoelastic materials // International Applied Mechanics. 2005. V. 41. No. 11. P. 1288-1298.
11. Demidov V. N. Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses // Key Engineering Materials. 2016. V. 712. P. 384-389.
12. Демидов В. Н. О расщеплении волн сдвига в изотропных гипопругих материалах // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3. № 2. С. 15-36.
13. Markin A. A., Sokolova M. Yu. Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. No. 2. P. 679-688.
14. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Влияние начальных напряжений на распространение звуковых волн в гипопругих анизотропных материалах // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2024. Т. 91.
15. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипопругих телах. I. Изотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 318-333.

16. Соколова М. Ю., Христич Д. В. Акустические волны в гипотупругих телах. II. Анизотропные материалы // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. В. 2. С. 334-349.
17. Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.

REFERENCES

1. Fedorov, F. I. 2012, "Theory of Elastic Waves in Crystals", *Springer*.
2. Sirotin, Yu. I. & Shaskol'skaya, M. P. 1982, "Fundamentals of Crystal Physics", *Mir Publishers*, Moscow.
3. Guz', A N. 1986, "Elastic waves in bodies with initial stresses", in two volumes, *Naukova Dumka*, Kiev, [in Russian].
4. Polikarpova, N. V., Mal'neva, P. V. & Voloshinov, V. B. 2013, "Anisotropy of elastic waves in a tellurium crystal", *Acoustic Journal*, vol. 59, no. 3, p. 332-338 [in Russian].
5. Polikarpova, N. V., Voloshinov, V. B. & Ivanova, P. A. 2019, "Reflection of plane acoustic waves at an inclined incidence on the face of a tellurium dioxide crystal", *Acoustic Journal*, vol. 65, no. 6, p. 740-750 [in Russian].
6. Polikarpova, N. V. & Marunin, M. V. 2021, "Unusual cases of acoustic wave behavior at the interface in a paratellurite crystal", *News of the Russian Academy of Sciences. The Physical Series*, vol. 85, no. 6, p. 799-803 [in Russian].
7. Telichko, A. V., Erohin, S. V., Kvashnin, G. M., Sorokin, P. B., Sorokin, B. P. & Blank, V. D. 2017, "Diamond's third-order elastic constants: ab initio calculations and experimental investigation", *J. Mater. Sci.*, vol. 52, p. 3447-3456.
8. Romenskii E. I., Lys E. B., Cheverda V. A. & Epov, M. I. 2017, "Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 5 [in Russian].
9. Rushchitsky J. J. 2014, "Nonlinear plane waves in hypoelastic materials" // Nonlinear elastic waves in materials. Foundations of Engineering Mechanics. Springer, Cham.
10. Rushchitsky J. J. 2005, "On the types and number of plane waves in hypoelastic materials", *International Applied Mechanics*, vol. 41, no. 11, p. 1288-1298.
11. Demidov V. N. 2016, "Acoustic properties of isotropic hypoelastic materials with residual technological stresses", *Key Engineering Materials*, vol. 712, p. 384-389.
12. Demidov V. N. 2000, "On the splitting of shear waves in isotropic hypoelastic materials", *Physical Mesomechanics*, vol. 3, no. 2, p. 15-36 [in Russian].
13. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024 "Dynamic equations for the propagation of acoustic waves in pre-deformed materials", *Mechanics of Solids*, vol. 59, no. 2, p. 679-688.
14. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2024 "The influence of initial stresses on the propagation of sound waves in hypoelastic anisotropic materials", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]*, vol. 91 [in Russian].

15. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, "Acoustic waves in hypoelastic solids. I. Isotropic materials" *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 318-333.
16. Sokolova, M. Yu. & Khristich, D. V. 2024, "Acoustic waves in hypoelastic solids. II. Anisotropic materials" *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, no. 2, p. 334-349.
17. Markin, A. A. & Sokolova, M. Yu. 2015, "*Thermomechanics of elastoplastic deformation*", Cambridge International Science Publishing, Cambridge.

Получено: 15.06.2024

Принято в печать: 26.12.2024