

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 531.6, 539.3, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276

Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела

А. В. Романов

Романов Александр Вячеславович — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: atomicra@ya.ru

Аннотация

Для решения некоторых краевых задач микрополярной теории упругости в работе формулируется вариационный принцип Лагранжа в обобщённых кинематических полях применительно к материалам с центром симметрии произвольной анизотропии [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Используя метод Ритца краевая задача приводится к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений. Для чего искомые кинематические векторные поля перемещений и микровращений раскладываются в ряд по базисным кусочно-полиномиальными функциям лагранжева (8-узловой КЭ) и серендипова (20-узловой КЭ) семейства [8, 14]. Для улучшения аппроксимации лагранжевыми многочленами (8-узловой КЭ), в том числе для почти несжимаемой среды, использован обобщённый метод редуцированного и селективного интегрирования [11]. Апробация построенной математической модели выполняется на задаче о кручении изотропного цилиндрического тела в рамках классической и микрополярной теории упругости с демонстрацией масштабного эффекта, в том числе по результатам экспериментальных данных [18]. Представлено сравнение полученного численного решения с аналитическим решением Сен-Венана [3] симметричной теории упругости; с аналитическим решением Готье, Ясмана [15, 16] и численным решением авторов [7] для микрополярной среды; с результатами эксперимента Лейкса [18]. При задании интегральных граничных условий (момента) на торцевой поверхности цилиндрического тела было использовано аналитическое распределение касательных и моментных напряжений [3, 15, 16].

Ключевые слова: задача о кручении, микрополярная среда, континуум Коссера, моментная теория упругости, вариационный принцип, тензор изгиба-кручения, тензор моментных напряжений, метод конечных элементов, матрица жесткости, редуцированное и селективное интегрирование, масштабный эффект кручения, относительная жёсткость.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Романов, А.В. Масштабные эффекты микрополярной среды в задаче о кручении цилиндрического тела // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 262–276.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 531.6, 539.3, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-262-276

Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion

A. V. Romanov

Romanov Alexander Vyacheslavovich — Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: atomicra@ya.ru

Abstract

In this paper, a variational principle of Lagrange of micropolar theory of elasticity is formulated for a some boundary-value problems. Anisotropic, isotropic and centrally symmetric material are considered. The Ritz method is used to obtain a system of linear algebraic equations in a form of the tensor-block stiffness matrices. The macro-displacement and the micro-rotation are expressed as a sum of products of shape functions and the generalized kinematic nodal fields. For effective approximation of the nearly incompressible micropolar material the generalized method of reduced and selective integration is used. For testing of described variational model the cylinder torsion problem of the classical and micropolar media is considered. Micropolar continuum exhibit substantial size effects in torsion (and bending) [18]: slender specimens are more rigid than anticipated via classical elasticity. Analytical solution which satisfy integral condition of torsion on the end faces is used.

Keywords: torsion problem, micropolar continuum, Cosserat continuum, couple stress theory, variational principle, rotation gradient tensor, couple stress tensor, finite element method, stiffness matrix, reduced and selective integration, size effect of torsion, relative stiffness.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

Romanov, A.V. 2024, "Size effects of micropolar medium in problem on the cylindrical body torsion", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 262–276.

1. Введение

В связи с массовым использованием современных композиционных материалов в передовых промышленных индустриях и научно-исследовательских проектах, существует особый запрос к проектированию микро- и наноструктурных материалов (в том числе для создания искусственных костных тканей или сверхлёгких летательных и подводных аппаратов) с заданными физико-механическими свойствами. Однако существующие подходы классической теории упругости не всегда способны в достаточной степени предсказывать поведение таких материалов. Именно чувствительность модели к масштабному параметру и характеру микроструктуры среды в рамках микрополярной теории упругости обеспечивают достаточно точный прогноз механического поведения материала.

В данной работе используется теория с континуальным подходом [5, 7], на основе которой и выполняется построение модели среды со структурой. Континуальный подход, базируется на понятиях полярности и нелокальности материала, имеющего микроструктуру. Полярность указывает на то, что, помимо деформации окрестности частицы структуры, допускается ее жесткое вращение или микроповорот, в общем случае не связанный с полем перемещений, а

нелокальность указывает на зависимость физических свойств материала от влияния частиц окружения.

Согласно классификации А. Эрингена [7] для микроконтинуальной среды или среды с микроструктурой вводится микроконтинуум уровня \mathbb{N} . В этом случае внутренняя структура среды описывается с помощью \mathbb{N} дополнительных кинематических векторов (относительно кинематического вектора макроперемещений классической теории упругости), называемых векторами структуры. В случае микроконтинуума уровня $\mathbb{N} = 1$ к микрополярным средам можно отнести жидкие кристаллы с твердыми молекулами, твердые суспензии, кровь животных с твердыми клетками, композиты с рубленными волокнами (chopped fiber composite), пенополиуретаны, стеклопластики (полые стеклянные сферы в эпоксидной смоле), костные ткани, магнитные поля, облака с пылью, бетон с гравием, мутная жидкость и др.

2. Вариационный принцип Лагранжа

Задачу локального минимума лагранжиана L классической теории упругости [1, 2, 3, 4] не трудно сформулировать в терминах обобщённых кинематических неизвестных векторных полей макроперемещений и микровращений для микрополярной среды [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

$$\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}: L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \leq L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad L(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) - l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}), \quad \forall \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}: \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1)$$

и записать условие стационарности в следующем виде

$$DL(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$ — действительная кинематическая система независимых векторов перемещений и микровращений соответственно; $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$ — кинематически допустимая система векторов, т. е. возможные перемещения и вращения из того же пространства, что и $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$; D — дифференциал Гато. Возможность формулировки вариационного принципа Лагранжа связана с требованием выполнения кинематических соотношений при заданных кинематических граничных условиях на поверхности Σ_1 [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]:

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{u}|_{\Sigma_1} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\Sigma_1} = 0, \quad (3)$$

тогда условия стационарности (2) микрополярной теории упругости приводят к уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на поверхности Σ_2 [1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}} + \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{P}} + \rho \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{P}}|_{\Sigma_2} = \boldsymbol{\Sigma}, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\mu}}|_{\Sigma_2} = \mathbf{R}, \quad (4)$$

где $\bar{2} \otimes$ — знак внутреннего 2-произведения (двойное скалярное произведение); $\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}$ — тензоры деформаций и изгиба-кручения второго ранга, соответственно, в общем случае несимметричные; $\underline{\mathbf{C}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга или тензор Леви-Чивиты; Σ — поверхность тела ($\bar{\Sigma}_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$); $\underline{\mathbf{P}}, \underline{\boldsymbol{\mu}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений второго ранга, соответственно, в общем случае несимметричные; \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности тела; \mathbf{F} — вектор массовой силы; \mathbf{m} — вектор массовых пар; ρ — плотность среды; $\boldsymbol{\Sigma}$ — вектор поверхностной силы; \mathbf{R} — вектор поверхностных пар. Так как рассматриваемый класс задач связан с обратимыми термодинамическими процессами, то в силу симметрии функционала a из условий стационарности (2) следуют интегральные тождества

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}),$$

$$a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}; \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int_V [\underline{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}) \underline{\mathbf{D}} \otimes (\nabla \mathbf{w} - \underline{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\psi}) + \underline{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{\varphi}) \underline{\mathbf{D}} \otimes \nabla \boldsymbol{\psi}] dV, \quad (5)$$

$$l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}) = \int_V \rho(\mathbf{F} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\psi}) dV + \int_{\Sigma_2} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\psi}) d\Sigma,$$

где V — объем тела; $a(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ — есть энергия упругих деформаций и изгиба-кручения, если приняты тождества $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varphi}$, при этом $l(\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi})$ — является работой внешних сил на соответствующих перемещениях и микровращениях. Учитывая ранее введенные обозначения, удобно записать задачу минимума функционала Лагранжа (1) в компонентах [8, 9, 10, 11]:

$$L(w, \psi) = \frac{1}{2} a(w, \psi; w, \psi) - l(w, \psi), \quad \forall w_i, \psi_i: w_i|_{\Sigma_1} = 0, \psi_i|_{\Sigma_1} = 0,$$

$$\begin{aligned} a(w, \psi; w, \psi) &= \int_V \left(A^{ijkl} (w_{l,k} - C_{kl}^{\cdot m} \psi_m) (w_{j,i} - C_{ij}^{\cdot n} \psi_n) + D^{ijkl} \psi_{l,k} \psi_{j,i} \right) dV = \\ &= \int_V \left(A^{ijkl} w_{l,k} w_{j,i} - A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m w_{j,i} - A^{ijkl} w_{l,k} C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + A^{ijkl} C_{kl}^{\cdot m} \psi_m C_{ij}^{\cdot n} \psi_n + \right. \\ &\quad \left. + D^{ijkl} \psi_{l,k} \psi_{j,i} \right) dV, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} l(w, \psi) &= \int_V (F^j w_j + m^j \psi_j) \rho dV + \int_{\Sigma_2} (P^j w_j + \mu^j \psi_j) d\Sigma, \\ n_i P^{ij}|_{\Sigma_2} &= P^j, \quad n_i \mu^{ij}|_{\Sigma_2} = \mu^j, \end{aligned}$$

где A^{ijkl} , D^{ijkl} — компоненты материальных тензоров четвертого ранга, упоминание о которых дано ниже.

Важно отметить, что из условия существования оператора (потенциала) деформаций и изгиба-кручения для материалов с центром симметрии при изотермических процессах справедливы следующие определяющие соотношения (формулы Грина) [1, 5, 6, 7]:

$$\check{W}(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{2} (\check{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \check{\mathbf{A}} \otimes \check{\boldsymbol{\gamma}} + \check{\boldsymbol{\varkappa}} \otimes \check{\mathbf{D}} \otimes \check{\boldsymbol{\varkappa}}), \quad \check{\mathbf{P}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \check{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\partial \check{W}}{\partial \boldsymbol{\varkappa}}, \quad (\check{\mathbf{A}} = \check{\mathbf{A}}^T, \quad \check{\mathbf{D}} = \check{\mathbf{D}}^T), \quad (7)$$

где $\check{\mathbf{A}}$, $\check{\mathbf{D}}$ — материальные тензоры четвертого ранга.

3. О трансверсально-изотропных, ортотропных и изотропных тензорах четвертого ранга микрополярной теории упругости

Полагая существование упругого потенциала для обратимого термодинамического процесса (7) материальные тензоры произвольной анизотропии $\check{\mathbf{A}}$, $\check{\mathbf{D}}$ обладают симметрией $A^{ijkl} = A^{klij}$, $A^{ijkl} \neq A^{jikl}$. Аналогично и для $\check{\mathbf{D}}$.

В этом случае трансверсально-изотропный тензор содержит 29 отличных от нуля компонент, из них 10 независимых [12, 8]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} &= a_1 \gamma_{MM}^{ij} \gamma_{NN}^{kl} + a_2 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{NN}^{jl} + a_3 \gamma_{MM}^{il} \gamma_{NN}^{jk} + a_4 \left(\gamma_{MM}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{MM}^{kl} \right) + \\ &\quad + a_5 \left(\epsilon^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \epsilon^{kl} \right) + a_6 \gamma_{MM}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + a_7 \left(\gamma_{MM}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{MM}^{jk} \right) + \\ &\quad + a_8 \left(\epsilon^{il} \gamma_{33}^{jk} - \gamma_{33}^{il} \epsilon^{jk} \right) + a_9 \gamma_{33}^{ik} \gamma_{MM}^{jl} + a_{10} \gamma_{33}^{ij} \gamma_{33}^{kl}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\gamma_{MM}^{ij} = g_M^i g_M^j$ — сумма произведений смешанных компонент единичного тензора второго ранга [1, 12, 8], $\epsilon^{ij} = \epsilon^{MN} g_M^i g_N^j$ — символы Леви-Чивиты. Здесь использовано правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам ($M, N = 1, 2$), кроме явно указанных $\gamma_{\alpha\alpha}^{ij} = g_\alpha^i g_\alpha^j$ ($\alpha = 1, 2, 3$) (по α суммирования нет). Аналогично представляются компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ с той лишь разницей, что в выражение (8) вместо a и A подставляются d и D соответственно.

Рассмотрим теперь ортотропные тензоры четвёртого ранга. Тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ также как и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ имеет 15 независимых компонент, которые имеют следующее выражение [12, 9]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = & A^{1111} \gamma_{11}^{ij} \gamma_{11}^{kl} + A^{2222} \gamma_{22}^{ij} \gamma_{22}^{kl} + A^{3333} \gamma_{33}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + A^{1122} (\gamma_{11}^{ij} \gamma_{22}^{kl} + \gamma_{22}^{ij} \gamma_{11}^{kl}) + \\ & + A^{1133} (\gamma_{11}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{11}^{kl}) + A^{2233} (\gamma_{22}^{ij} \gamma_{33}^{kl} + \gamma_{33}^{ij} \gamma_{22}^{kl}) + A^{1212} \gamma_{11}^{ik} \gamma_{22}^{jl} + \\ & + A^{1221} (\gamma_{11}^{il} \gamma_{22}^{jk} + \gamma_{22}^{il} \gamma_{11}^{jk}) + A^{2121} \gamma_{22}^{ik} \gamma_{11}^{jl} + A^{1313} \gamma_{11}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + A^{1331} (\gamma_{11}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{11}^{jk}) + \\ & + A^{3131} \gamma_{33}^{ik} \gamma_{11}^{jl} + A^{2323} \gamma_{22}^{ik} \gamma_{33}^{jl} + A^{2332} (\gamma_{22}^{il} \gamma_{33}^{jk} + \gamma_{33}^{il} \gamma_{22}^{jk}) + A^{3232} \gamma_{33}^{ik} \gamma_{22}^{jl}. \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты изотропных тензоров четвёртого ранга для микрополярной среды с центром симметрии могут быть определены из выражения [12, 10]

$$\begin{aligned} A^{ijkl} = & \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \alpha (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}), \\ D^{ijkl} = & \delta g^{ij} g^{kl} + \gamma (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + \beta (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$ — материальные параметры среды; g^{ij} — компоненты единичного тензора. Как видно, каждый тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ содержит по 3 независимых компонента.

4. Дискретизация области и подпространство базисных функций

Для нахождения локального минимума функционала Лагранжа (1) воспользуемся методом Ритца и разложим наше решение по базису кусочно-полиномиальных функций так, чтобы их линейная комбинация доставляла стационарный минимум функционалу [13, 14, 8, 2]:

$$G \supset G^N, \quad \mathbf{u}^N, \boldsymbol{\varphi}^N \in G^N, \quad \mathbf{w}^N, \boldsymbol{\psi}^N \in G^N, \quad \{\cdot\}^N = \sum_{p=1}^N N_p \{\cdot\}^p \equiv N_p \{\cdot\}^p, \quad (11)$$

где G^N — конечномерное пространство базисных функций размерности N ; $p = \overline{1, N}$ — узлы конечных элементов — подчиняются правилу суммирования Эйнштейна (далее знак суммы опущен); $\{\cdot\}^N$ — аппроксимированная векторная функция; $\{\cdot\}^p$ — вектор искомой кинематической величины $\mathbf{w}, \boldsymbol{\psi}$ в p -м узле; N_p — базисные функции, или функции формы, — приняты из условий: $\xi^i \in [-1, +1]$, $N_p(\xi^i) \in [0, 1]$, $N_p(\boldsymbol{\xi}^q) = \delta_p^q$, т.е. p -я функция формы от компонент радиуса-вектора $\boldsymbol{\xi}^q$ в q -м узле определяется дельтой Кронекера δ_p^q , а значит, на границе пробные функции $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q), \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q)$ тождественны узловым значениям: $\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\mathbf{w}}^q, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}^q) \equiv \widehat{\boldsymbol{\psi}}^q$ (здесь и далее знак дискретизации векторов опущен). Таким образом, функция N_p в области конечного элемента аппроксимирует искомое векторное поле и удовлетворяет граничным условиям, а вне области конечного элемента базисная функция равна нулю.

В качестве кусочно-полиномиальных базисных функций использованы лагранжевы и серендиповы многочлены (serendipity — “интуитивная прозорливость”) (см. рис. 1). Для 8-узлового конечного элемента (КЭ) базисные функции имеют вид [14, 8]

$$\xi_p^1 = \pm 1, \quad \xi_p^2 = \pm 1, \quad \xi_p^3 = \pm 1, \quad N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad (12)$$

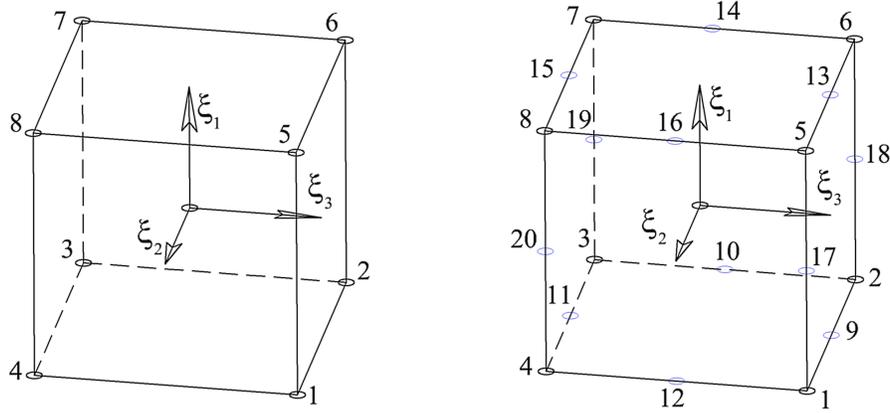


Рис. 1: Нумерация узлов и ориентация локальных осей области натуральных координат для 8-ми и 20-ти узлового конечного элемента.

где $p = \{1, 2, \dots, 8\}$ — узлы конечного элемента в локальной нумерации; ξ_p^i — i -я координата p -го узла; $\xi^i \in [-1; 1]$ — произвольная точка области базисной функции или области натуральных координат. Функции формы 20-узлового КЭ для вершинных и промежуточных узлов имеют вид [14, 8]:

$$\begin{aligned}
 N_p &= \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 2), \quad p = \{1, 2, \dots, 8\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^1 = 0, \quad p = \{17, 18, 19, 20\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^2 = 0, \quad p = \{9, 11, 13, 15\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), \quad \xi_p^3 = 0, \quad p = \{10, 12, 14, 16\},
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $\xi^{i(2)}$ — возведение в степень 2 компоненты ξ^i .

5. Система линейных алгебраических уравнений

Применим метод Ритца для функционала Лагранжа (1), (6) в области одного КЭ, выполнив дискретизацию искомых кинематических полей по пространственным координатам (11). А из условия стационарности (2) получим систему линейных алгебраических уравнений для микрополярного материала произвольной анизотропии с центром симметрии [8, 9, 10, 11]:

$$DL(\widehat{\mathbf{w}}, \widehat{\boldsymbol{\psi}}) = 0, \quad \begin{cases} +\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p - \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(1)}^j, \\ -\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} \widehat{w}_l^p + \mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} \widehat{\psi}_l^p = \mathbb{F}_{(2)}^j, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} +\mathbb{K}(1)_{pq} & -\mathbb{K}(2)_{pq} \\ -\mathbb{K}(3)_{pq} & +\mathbb{K}(4)_{pq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{w}}^p \\ \widehat{\boldsymbol{\psi}}^p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbb{F}(1)_q \\ \mathbb{F}(2)_q \end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathbb{K}_{(\cdot)pq}^{lj} = \mathbb{K}_{qp}^{jl}$ — компоненты тензорно-блочных матриц жесткости симметричны в силу (7), и для локальной области элемента примут вид [8, 9, 10, 11]

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}_{(1)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t J dV_\xi, & \mathbb{K}_{(2)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{ijkm} C_{km}^{..l} N_p N_{q,t} B_i^t J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(3)pq}^{lj} &= \int_{V_e} A^{inkl} N_{p,s} C_{in}^{..j} N_q B_k^s J dV_\xi, \\
\mathbb{K}_{(4)pq}^{lj} &= \int_{V_e} \left[A^{inkm} N_p N_q C_{km}^{..l} C_{in}^{..j} + D^{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t \right] J dV_\xi, \\
\mathbb{F}_{(1)q}^j &= \int_{V_e} F^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, & \mathbb{F}_{(2)q}^j &= \int_{V_e} m^j N_q J \rho dV_\xi + \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi,
\end{aligned} \tag{15}$$

где V_ξ, Σ_ξ — объем и поверхность тела в области мастера-элемента соответственно; B, J, J_Σ — функция обратной матрицы Якоби, объёмного и поверхностного якобиана, соответственно, связывают область мастера-элемента с декартовой областью [8, 14]

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j} = A_j^k, \quad \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} = B_k^i, \quad \frac{\partial N_p}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} = \frac{\partial N_p}{\partial \xi^s} B_k^s, \quad \frac{\partial N_q}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t} \frac{\partial \xi^t}{\partial x^i} = \frac{\partial N_q}{\partial \xi^t} B_i^t, \tag{16}$$

$$dV = J dV_\xi, \quad \mathbf{n} d\Sigma = \mathbf{n} J_\Sigma d\Sigma_\xi, \quad \mathbf{n} J_\Sigma = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^i} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^j} \right), \quad J = \det [A_j^i].$$

Здесь A_j^i — матрица Якоби; \mathbf{x} — векторная функция отображения области мастер-элемента на декартову область

$$x^i = x^i(\xi^j), \quad x_i = N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \widehat{x}_i^p, \tag{17}$$

где \widehat{x}_i^p — i -я декартова координата p -го узла КЭ. Иными словами в соотношениях (11) и (17) используются выражения одних и тех же функций форм (12), (13), которые и формируют изопараметрические КЭ [8, 14]. Для составления системы линейных алгебраических уравнений по всей области дискретной модели выполним процедуру ассемблирования уравнений (14) по всем КЭ. Отобразив локальные индексы узлов p, q по номеру конечного элемента e на глобальные узлы $P = P(p, e), Q = Q(q, e)$ и выполняя суммирование одноимённых компонент тензорно-блочной матрицы жёсткости и вектора внешних сил и пар [8, 14]

$$\sum_{e=1}^E \sum_{p,q=1}^n \mathbb{K}_{P(p,e)Q(q,e)}^{lj} = \mathbb{K}_{PQ}^{lj}, \quad \sum_{e=1}^E \sum_{q=1}^n \mathbb{F}_{Q(q,e)}^j = \mathbb{F}_Q^j, \tag{18}$$

получим итоговую систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых неизвестных $\widehat{w}_i^P, \widehat{\psi}_i^Q$ в глобальной индексации

$$\mathbb{K}_{PQ}^{lj} \widehat{\cdot} \Big|_l^P = \mathbb{F}_Q^j, \tag{19}$$

где E — число конечных элементов всей модели; n — число локальных узлов КЭ; N — число узлов во всей глобальной области. Важно отметить, что для решения системы (19), элементы которой содержат объёмные и поверхностные интегралы от функций и их первых производных, заданных в декартовой системе координат, применяется численное интегрирование Гаусса–Лежандра на отрезке $[-1, +1]$. По этой причине интегральные зависимости (15) и были представлены в области мастера-элемента. Так что в результате такого отображения произвольный призматический элемент переходит в куб с координатами на отрезке $[-1, +1]$.

Компоненты подинтегральных тензорно-блочных матриц жёсткости и векторов сил(пар) для среды произвольной анизотропии выписаны в работах [11, 12, 14] и были получены подстановкой выражений материальных тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ (8) – (10) в соотношения (15). Вспомним, что в работе [10] были выписаны подинтегральные выражения $K_{pq}^{lj} - K_{pq}^{lj}$ с производными по декартовым координатам для изотропного материала

$$\begin{aligned} K_{(1)pq}^{lj} &= \lambda N_{p,l} N_{q,j} + (\mu + \alpha) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\mu - \alpha) N_{p,j} N_{q,l}, \\ K_{(2)pq}^{lj} &= -2\alpha \epsilon_{lji} N_p N_{q,i}, \quad K_{(3)pq}^{lj} = 2\alpha \epsilon_{ljk} N_{p,k} N_q, \\ K_{(4)pq}^{lj} &= \delta N_{p,l} N_{q,j} + (\gamma + \beta) N_{p,i} N_{q,i} \delta_{jl} + (\gamma - \beta) N_{p,j} N_{q,l} + 4\alpha N_p N_q \delta_{lj}. \end{aligned} \quad (20)$$

Не трудно заметить, что при $\alpha = 0$ система (14), (15), (20) получается расщеплённой относительно \widehat{w} , $\widehat{\psi}$ и тождественна классической системе линейных алгебраических уравнений относительно первого блока. Если положим $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то получим систему расщеплённых и однородных уравнений, с точностью до обозначений материальных констант, схожую с классической теорией упругости [8, 5].

6. Задача о кручении цилиндрического тела

Постановка задачи и общее решение. Рассмотрим краевую задачу классической [3] и микрополярной теории упругости [15, 16] о кручении цилиндрического изотропного тела, под действием осевого крутящего момента T (см. рис. 2). Поставим задачу об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) микрополярной теории упругости в рамках теории малых деформаций и сравним результаты численного эксперимента вышеизложенной вариационной модели (1), (14) – (20):

- с аналитическим решением симметричной теории упругости Сен-Венана [3];
- с аналитическим решением Готье [15, 16];
- с численным решением вариационной модели [17];
- с результатами эксперимента Лейкса о кручении ретикулированного пенополиуретана [18].

Состояние равновесия цилиндрического тела рассмотрим без учёта переменной температуры и массовых сил(пар). Тогда уравнения равновесия и статические граничные условия на границе Σ_2 (4) для декартовой области в компонентах будут иметь вид:

$$p_{ji,j} = 0, \quad \mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} p_{jk} = 0, \quad n_j p_{ji} |_{\Sigma_2} = S_i, \quad n_j \mu_{ji} |_{\Sigma_2} = R_i. \quad (21)$$

Определяющие соотношения (7) для изотропной среды с центром симметрии (10) для декартовой области в компонентах [4, 6]:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji}, \\ \mu_{ij} &= \gamma \varkappa_{kk} \delta_{ij} + (\delta + \beta) \varkappa_{ij} + (\delta - \beta) \varkappa_{ji}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если для несимметричного тензора деформаций γ_{ij} выделить его симметричную $\gamma_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$ и кососимметричную часть, зависящую от разности макро- и микроповоротов $\gamma_{[ij]} = \epsilon_{ijk} (\vartheta_k - \psi_k)$, то компоненты тензора напряжений можно выразить так

$$p_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} + 2\alpha \epsilon_{ijk} (\vartheta_k - \psi_k), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (w_{j,i} + w_{i,j}), \quad \vartheta_k = \frac{1}{2} w_{j,i} \epsilon_{ijk}. \quad (23)$$

Здесь $\lambda, \mu, \alpha, \delta, \gamma, \beta$ — материальные параметры микрополярной изотропной среды, определяются из выражений

$$\lambda = \frac{G(E-2G)}{3G-E}, \quad \mu = G, \quad \alpha = \frac{GN^2}{1-N^2},$$

$$\gamma = 2Gl_t^2 \frac{1-\Psi}{\Psi}, \quad \delta = Gl_t^2, \quad \beta = G(4l_b^2 - l_t^2),$$
(24)

где G — модуль сдвига; E — модуль Юнга; N — число несимметричности “coupling number”; Ψ — полярный коэффициент “polar ratio”; l_t — масштабный параметр длины при кручении; l_b — масштабный параметр длины при изгибе [6, 18].

Кинематические соотношения (3) в компонентной форме для декартовой области

$$\gamma_{ij} = w_{j,i} - \epsilon_{ijk}\psi_k, \quad \varkappa_{ij} = \psi_{j,i}$$
(25)

замыкают систему (21), (22), (25) из 38 уравнений относительно 38 неизвестных $p_{ij}, \mu_{ij}, \gamma_{ij}, \varkappa_{ij}, w_i, \psi_i$.

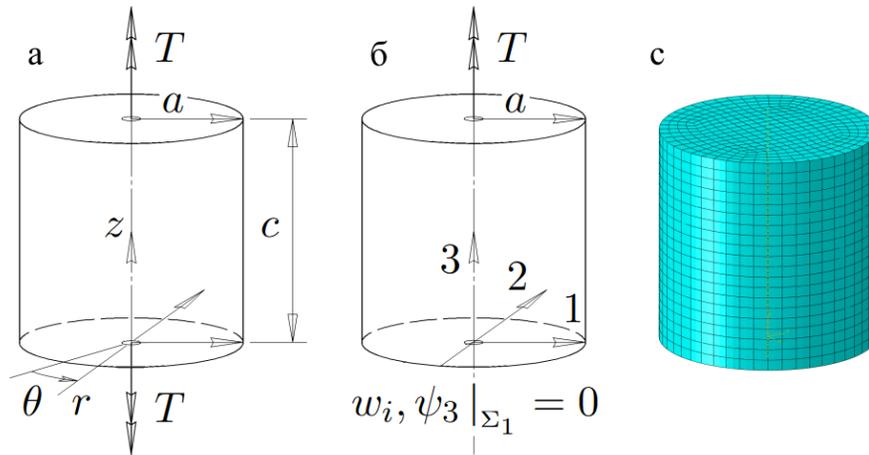


Рис. 2: Расчётная схема цилиндрического тела к аналитическому решению (а); к численному решению вариационной постановки (б); конечно-элементная схема (с)

Отметим, что аналитическое решение данной задачи в цилиндрических координатах (r, θ, z) представлено в работах [15, 16]. По условию задачи боковая поверхность цилиндрического тела $r = a$ является свободной $n_j p_{ji} |_{\Sigma_2} = 0, n_j \mu_{ji} |_{\Sigma_2} = 0$. На торцевых гранях $z = 0, z = c$ заданы поверхностные силы и пары, которые приводятся к паре с осевым моментом T

$$T = - \int_{\Sigma_{z=0}} (r p_{z\theta} + \mu_{zz}) d\Sigma, \quad T = \int_{\Sigma_{z=c}} (r p_{z\theta} + \mu_{zz}) d\Sigma.$$
(26)

Система уравнений и краевые условия симметричной теории упругости являются частным случаем микрополярной теории и легко получаются из выражений (21) – (23), (25), (26) полагая $\mu_{ij}, \varkappa_{ij}, \psi_i$ равными нулю [3]. Тогда передача нагрузок через элемент поверхности происходит только лишь за счёт главного вектора напряжений \mathbf{P} , образуя в элементе объёма симметричные тензорные поля \mathbf{P} . Выпишем аналитическое решение задачи (21), (22), (25), (26) в цилиндрических координатах (r, θ, z) [16] с точностью до обозначений и выражений

материальных параметров

$$\begin{aligned}
 p_{\theta z} &= \mu C_1 r - 2\alpha C_9 I_1(pr), & p_{z\theta} &= \mu C_1 r + 2\alpha C_9 I_1(pr), \\
 \mu_{rr} &= (\gamma + 2\delta) p C_9 I_0(pr) - \frac{2\delta}{r} \left(C_9 I_1(pr) + \frac{C_1 r}{2} \right), \\
 \mu_{\theta\theta} &= \gamma p C_9 I_0(pr) + \frac{2\delta}{r} \left(C_9 I_1(pr) - \frac{C_1 r}{2} \right), & \mu_{zz} &= \gamma p C_9 I_0(pr) + 2\delta C_1, \\
 u_r = u_z &= 0, & u_\theta &= C_1 r z, & \theta &= \frac{u_\theta}{r}, & \varphi_r &= -\frac{C_1 r}{2} + C_9 I_1(pr), & \varphi_z &= C_1 z,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где θ — угол закручивания при заданной координате z ; I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода n -го порядка; p , C_1 , C_9 — параметры, определяемые из выражений

$$\begin{aligned}
 p^2 &= \frac{4\alpha}{\gamma + 2\delta}, & A &= \pi a^2, \\
 C_9 &= \frac{T}{2A} \left[\left(\frac{\mu a^2}{4\delta} + \frac{3}{2} \right) (\gamma + 2\delta) p I_0(pa) - \left(\frac{\mu a^2}{4\delta} + 2 \right) \frac{2\delta}{a} I_1(pa) \right]^{-1}, \\
 C_1 &= 2C_9 \left(\frac{\gamma + 2\delta}{2\delta} p I_0(pa) - \frac{I_1(pa)}{a} \right).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Аналитическое решение симметричной теории упругости, используя полуобратный метод Сен-Венана с точностью до обозначений имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{2T}{\mu \pi a^4}, & u_1 &= -C_0 z y, & u_2 &= C_0 z x, & u_\theta &= C_0 z r, & \theta &= \frac{u_\theta}{r}, \\
 p_{31} = p_{13} &= -C_0 \mu y, & p_{32} = p_{23} &= C_0 \mu x, & p_{\theta z} = p_{z\theta} &= C_0 \mu r.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Для оценки масштабного эффекта при кручении используется параметр относительной жёсткости (“relative stiffness”)[16]

$$\Omega = 1 + 6 \left(\frac{l_t}{a} \right)^2 \frac{1 - \frac{4}{3} \Psi \chi}{1 - \Psi \chi}, \quad l_t^2 = \frac{\delta}{\mu}, \quad \chi = \frac{I_1(pa)}{pa I_0(pa)}, \tag{30}$$

который легко выразить через отношение перемещений u_θ/u_{θ_m} , если учесть жёсткость как отношение момента к углу закручивания для микрополярной T/θ_m и классической T/θ теории [3, 16]

$$\Omega = \frac{T}{\theta_m} \cdot \frac{\theta}{T} = \frac{u_\theta}{u_{\theta_m}}, \tag{31}$$

где θ_m , u_{θ_m} — определяются выражениями (27); θ_m , u_{θ_m} — выражениями (29). По этому для построения кривой относительной жёсткости в рамках вариационной модели согласно схеме рис. 2 б, с, геометрические параметры варьируются в интервале согласно условиям, представленным ниже, для рассмотренных моделей. Важно отметить, что исходя из положительной определённости оператора (потенциала) деформаций и изгиба-кручения (7) для параметров изотропной среды p^2 , l_t^2 , χ должны выполняться неравенства [16]

$$p^2 \geq 0, \quad l_t^2 \geq 0, \quad 0 \leq \Psi \leq \frac{3}{2}, \quad 0 \leq \chi \leq \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Первая модель. К оценке и сравнению численного решения вариационной модели (1), (14) – (20) с аналитическим (27) – (31)[3, 16] и численным решением авторов [17] рассмотрим расчётную схему рис. 2 б, с, геометрические параметры которой $a = 0.2$ мм, $c = 0.4$ мм. Аппроксимация векторных полей \mathbf{w} , $\boldsymbol{\psi}$ выполнялась как 8-узловыми лагранжевыми КЭ (12) так и 20-узловыми серендиповыми КЭ (13)(к сравнению). Для 8-узлового элемента использовалась схема редуцированного и селективного интегрирования, используемая в том числе для почти несжимаемой среды [11, 14]. Это позволило получить точность результатов для 8-узловых КЭ сопоставимую с 20-узловыми. Конечно-элементная схема состоит из 6720 8-узловых(20-узловых) элементов. Общее количество узлов $N = 7581$ для 8-узловых КЭ и $N = 29417$ для 20-узловых. Число уравнений для микрополярной теории упругости $6N$ и $3N$ – для классической. Материальные параметры среды [Н/мм²] $\lambda = 157513$, $\mu = 10500$, $\alpha = 3500$; [Н] $\gamma = 0$, $\delta = 105$, $\beta = -105$ соответствуют параметрам $E = 30843.8$ Н/мм², $\nu = 0.46875$, $N = 0.5$, $\Psi = 1$, $l_t = 0.1$ мм, $l_b = 0$ мм, указанным в работе [17]. Кинематические граничные условия заданы на торцевой поверхности модели $z = 0$

$$w_i, \psi_z |_{\Sigma_1} = 0 \quad (33)$$

дополняют естественные граничные условия(граничные условия Неймана или граничные условия 2-го рода) на свободной поверхности. На торцевой поверхности $z = c$ краевые условия определяются выражением (26) с осевым крутящим моментом $T = 1$ Н·мм. Для удовлетворения этому условию на данной грани приложим поверхностные силы $p_{z\theta}$ и пары μ_{zz} используя выражения (27), которые в последствии приводятся к узловым силам $\mathbb{F}_{(1)q}^j$ и парам $\mathbb{F}_{(2)q}^j$ (15) следующим образом

$$\mathbb{F}_{(1)q}^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_{\Sigma} d\Sigma_{\xi}, \quad \mathbb{F}_{(2)q}^j = \int_{\Sigma_2} R^j N_q J_{\Sigma} d\Sigma_{\xi}, \quad R^1 = R^2 = 0, \quad R^3 = \mu_{zz}, \quad (34)$$

$$S^1 = -\frac{x^2 p_{z\theta}}{r}, \quad S^2 = \frac{x^1 p_{z\theta}}{r}, \quad S^3 = 0, \quad r = \sqrt{x^I x^I}, \quad I = 1, 2,$$

где x^I – компоненты векторной функции (17). Поверхностные интегралы брались численно по 2-точечной схеме Гаусса для каждого из направлений 8-узлового КЭ(4 точки интегрирования) и по 3-точечной схеме для 20-узлового КЭ(9 точек интегрирования). Именно учёт аналитического(нелинейного) распределения как напряжений $p_{z\theta}$, так и моментных напряжений μ_{zz} (к задаче при $\Psi = 1.5$), согласно (34) позволил на порядок повысить точность результатов, в отличие от работы авторов [17], где использована линейная аппроксимация для $p_{z\theta}$, а величина μ_{zz} является постоянной $\Psi = 1 \rightarrow \gamma = 0 \rightarrow \mu_{zz,r} = 0$. Что очевидно из выражений (24), (27).

Вторая модель. Сравнение численного решения с результатами эксперимента Лейкса [18] в задаче о кручении образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм выполняется по аналогичной схеме (см. рис. 2 б, с) первой модели (число узлов и элементов, – аналогичное). Однако определению подлежит только лишь параметр относительной жёсткости Ω . В связи с этим, геометрические параметры варьируются от $a = 1.3$ мм, $c = 2.6$ мм до $a = 20$ мм, $c = 40$ мм. Материальные параметры [Н/мм²] $\lambda = 4.2E - 002$, $\mu = 2.8E - 002$, $\alpha = 1.379$; [Н] $\gamma = -4.779E - 002$, $\delta = 7.168E - 002$, $\beta = -0.072$ соответствуют принятым параметрам $E = 7.28E - 002$ Н/мм², $\nu = 0.3$, $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм, $l_b = 0$ мм в работе [18]. Кинематические граничные условия (33) на торцевой поверхности $z = 0$ также дополняют естественные граничные условия на свободной поверхности. На торцевой поверхности $z = c$ поверхностные силы и пары с осевым моментом $T = 0.002$ Н·мм приводятся к узловым силам и парам также по выражению (34).

7. Анализ и сравнение результатов численного эксперимента

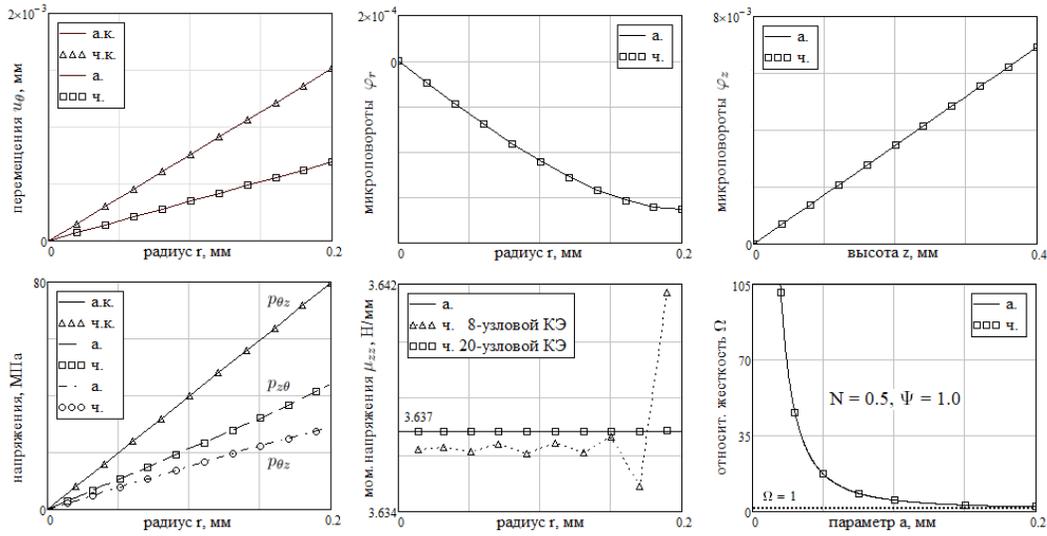


Рис. 3: Зависимость параметров напряжённо-деформированного состояния от радиуса r , высоты z и параметра модели a , где а. — обозначение легенды аналитических кривых; ч. — численное решение; к. — классическая теория упругости, иначе — микрополярная.

Для перемещений u_θ графики зависимости были построены в сечении $z = c/2$. Компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений для изотропного материала с центром симметрии были аппроксимированы базисными функциями при $\xi^i = 0$ по узловым кинематическим величинам из выражений

$$\begin{aligned}
 p_{ij} &= \lambda N_{p,k} \widehat{w}_k^p \delta_{ij} + (\mu + \alpha) N_{p,i} \widehat{w}_j^p + (\mu - \alpha) N_{p,j} \widehat{w}_i^p - 2\alpha \epsilon_{ijm} N_p \widehat{\psi}_m^p, \\
 \mu_{ij} &= \gamma N_{p,k} \widehat{\psi}_k^p \delta_{ij} + (\delta + \beta) N_{p,i} \widehat{\psi}_j^p + (\delta - \beta) N_{p,j} \widehat{\psi}_i^p.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Рассмотрим результаты первой модели см. рис. 2, 3. Относительная погрешность величин u_θ , $p_{z\theta}$, $p_{\theta z}$ между аналитическим и численным решением при аппроксимации 8-узловыми КЭ в рамках классической теории составила $0.001 \div 0.008 \%$ и $0.018 \div 0.030 \%$, — в рамках микрополярной теории. При этом для данного типа элемента, как было указано выше, использовался метод редуцированного и селективного интегрирования [11]. А вот аппроксимация 20-узловыми КЭ в рамках микрополярной теории показала несколько меньшую погрешность $0.001 \div 0.008 \%$. Что касается аппроксимации величин φ_r 20-узловыми КЭ, то наибольшая относительная погрешность составила 0.028% , что на порядок меньше 8-узловых КЭ. Это и очевидно, учитывая нелинейный характер распределения φ_r вдоль радиального направления. Также достаточно точной оказалась аппроксимация величины φ_z с наибольшей погрешностью 0.05% для 8-узловых КЭ и менее 0.001% для 20-узловых. Любопытной оказалась аппроксимация величины μ_{zz} 8-узловыми элементами с относительной погрешностью $0.006 \div 0.134 \%$. Однако 20-узловые элементы обеспечили относительную погрешность менее 0.00016% . Несущественной оказалась и относительная погрешность при определении величины Ω , всего лишь $0.001 \div 0.02 \%$, которую дали 8-узловые элементы.

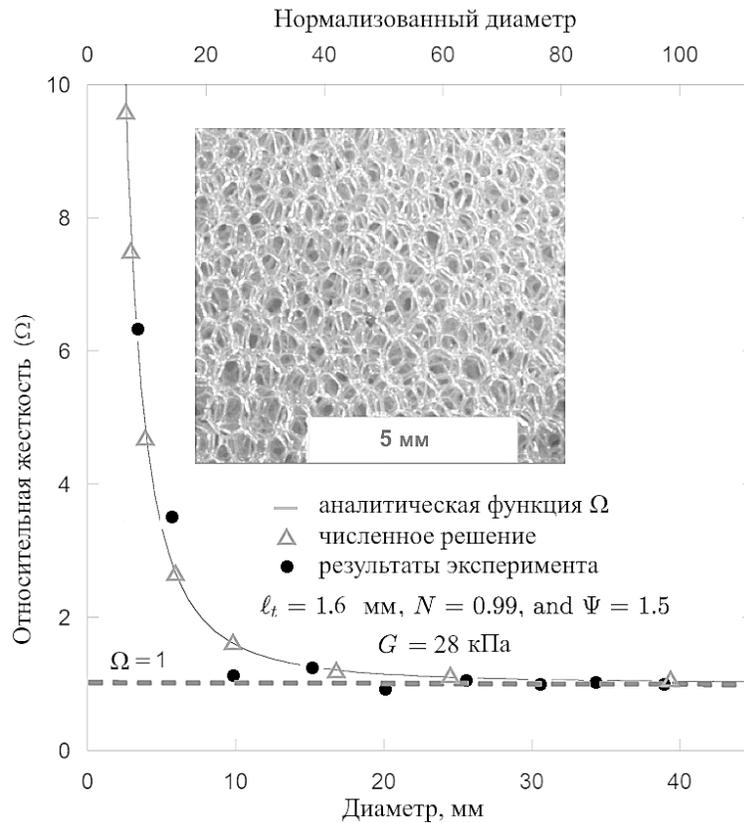


Рис. 4: Масштабный эффект при кручении образца из пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм. Относительная жёсткость Ω задана выражением (30); Δ — численное решение модели (1), (14) – (20), рис. 2 б, с; \bullet — экспериментальные данные [18].

Вторая модель (кручение цилиндрического образца из ретикулированного пенополиуретана с размером ячейки 0.4 мм рис. 2, 4). Относительная погрешность между численным и аналитическим решением параметра Ω как и для первой модели незначительна. В тоже время наблюдаемый по результатам эксперимента масштабный эффект достаточно хорошо согласуется с найденными параметрами $N = 0.99$, $\Psi = 1.5$, $l_t = 1.6$ мм при $R^2 = 0.85$ согласно работе Лейкса [18] в рамках микрополярной теории упругости, чего не может предсказать классическая теория упругости.

8. Заключение

Из сравнения описанных выше результатов в рамках численного решения вариационной модели (1), (14) – (20) к задаче о кручении цилиндрического тела можно сделать вывод что, математический аппарат микрополярной теории упругости реализован корректно, а чувствительность модели к масштабному эффекту позволяет в достаточной степени предсказывать физическое поведение материала с микроструктурой. Это является актуальным при проектировании свойств композиционных материалов с микро- и наноструктурой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд // М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач // М.: Мир, 1980.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. 6-е изд. // СПб.: Лань. 2004.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975.
5. Никабадзе М.У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. М.: Изд-во МГУ имени М.В. Ломоносова, 2023.
6. Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Vienna: Springer-Verlag; 1972.
7. Eringen A. Microcontinuum field theories: I. Foundations and solids. New York: Springer-Verlag; 2012.
8. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально–изотропной среды.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2022. № 4. с. 35-39. URL: <https://doi.org/10.3103/S0027133022040045>
9. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 1. с. 68-72. URL: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-2023-1-68-72>
10. Романов А.В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах.// Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2023. № 2. с. 64-68. URL: <https://doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-64-4-12>
11. Романов А.В. Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости. // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2024. № 1. с. 65-69. URL: <https://dx.doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8>
12. Nikabadze M.U. Topics on tensor calculus with applications to mechanics // J. Math. Sci. 2017. **225**, N 1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4>
13. Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Лекции по теории упругости. – М.: Ленанд, 2018. 208 с.
14. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
15. Gauthier R. D., Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity. Doctoral dissertation, University of Colorado, 1974.
16. Gauthier R, Jahsman W. A quest for micropolar elastic constants. J Appl Mech 1975; 42(2): 369 – 74. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3423583>
17. Grbčić S., Ibrahimbegović A., Jelenić G. Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes. 2018. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.04.005>
18. Rueger Z., Lakes R. S. Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam. // Philosophical Magazine, 96 (2), 93-111, January 2016. URL: <https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541>

REFERENCES

1. Pobedrya, B.E. 1995, “Chislennue metody v teorii uprugosti i plastichnosti: Uch. posobie, 2-e izd.”, *M.: Izd-vo MGU*.
2. Ciarlet, P. 1978, “The finite element method for elliptic problems”, *New York, Oxford*.
3. Sedov, L.I. 2004, “Mehanica sploshnoj sredy”, *Spb.: Lanj*, Vol.2 6-e izd.
4. Nowacki, W. 1975, “Teoria uprugosti”, *M.: Mir*.
5. Nikabadze, M.U. 2023, “Razvitie metoda ortogonalnuh polinomov v mehanike micropolyarnuh i klassicheskikh uprugih tonkih tel”, *M.: Izd-vo MGU imeny M. V. Lomonosova*.
6. Nowacki, W. 1972, “Theory of micropolar elasticity”, *Vienna, Springer-Verlag*.
7. Eringen, A. 2012, “Microcontinuum field theories: I”, *Foundations and solids. New York: Springer-Verlag*
8. Romanov, A.V. 2022, “A Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Theory of Elasticity in the Case of Transversely Isotropic Medium”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 77, pp. 93–98. URL: <https://doi.org/10.3103/S0027133022040045>
9. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Elasticity Theory in the Case of Orthotropic Medium”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 78, pp. 23–28. URL: <https://doi.org/10.3103/S0027133023010041>
10. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange in the Micropolar Theory of Elasticity at Nonisothermal Processes”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 78, pp. 114–118. URL: <https://doi.org/10.3103/S0027133023040052>
11. Romanov, A.V. 2024, “Reduced and selective integration method for micropolar theory of elasticity”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, № 1. pp. 65–69. <https://dx.doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8>
12. Nikabadze, M.U. 2017, “Topics on tensor calculus with applications to mechanics”, *J. Math. Sci.*, **225**, № 1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3467-4>
13. Pobedrya, B.E., Georgievsky D.V. 2018, “Lekcii po teorii uprugosti”, *M.: Lenland*, 208 p.
14. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J.Z. 2013, “The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals”, *Oxford: Butterworth-Heinemann*, 7th ed.
15. Gauthier, R. D., Analytical and Experimental Investigations in Linear Isotropic Micropolar Elasticity. Doctoral dissertation, University of Colorado, 1974.
16. Gauthier, R, Jahsman, W. 1975, “A quest for micropolar elastic constants”, *J. Appl. Mech.*, 42(2):369–74. URL: <https://doi.org/10.1115/1.3423583>
17. Grbčić, S., Ibrahimbegović, A., Jelenić, G. 2018, “Variational formulation of micropolar elasticity using 3D hexahedral finite-element interpolation with incompatible modes”. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.04.005>
18. Rueger, Z., Lakes, R. S. 2016, “Experimental Cosserat elasticity in open cell polymer foam”, *Philosophical Magazine*, 96 (2), pp. 93–111. <https://doi.org/10.1080/14786435.2015.1125541>

Получено: 23.07.2024

Принято в печать: 26.12.2024