ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 512.542 + 512.567.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-254-261

Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп

И. А. Цыбин, Г. Н. Титов

Цыбин Игорь Андреевич — Кубанский государственный университет (г. Краснодар).
e-mail: igor.trysbin@gmail.com
Титов Георгий Николаевич — кандидат физико-математических наук, Кубанский государственный университет (г. Краснодар).
e-mail: georgii_titov@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматриваются конечные группы, решётки подгрупп которых удовлетворяют некоторым условиям обобщённой полумодулярности. Основным результатом является теорема: если решётка подгрупп конечной группы G является верхне полумодулярной, а решётка подгрупп любой её собственной подгруппы является нижне полумодулярной, то решётка подгрупп группы G является 1-нижне полумодулярной.

Ключевые слова: конечная группа, полумодулярная решётка, обобщённо полумодулярная решётка.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Цыбин, И.А., Титов, Г.Н. Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 254–261.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 512.542 + 512.567.2 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-254-261

On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups

I. A. Tsybin, G. N. Titov

Tsybin Igor Andreevich — Kuban State University (Krasnodar).
e-mail: igor.trysbin@gmail.com
Titov Georgy Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Kuban State University (Krasnodar).
e-mail: georgii_titov@mail.ru

Abstract

This article considers finite groups whose lattice of subgroups satisfy certain generalized semi-modularity conditions. The main result is the theorem: the lattice of subgroups of the finite group G is 1-lower semi-modular whenever the lattice of subgroups of G is upper semi-modular and the lattice of subgroups of any proper subgroup of G is lower semi-modular.

Keywords: finite group, semi-modular lattice, generalized semi-modular lattice.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
Tsybin, I.A., Titov, G. N., 2024, "On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 254–261.

1. Введение

На стыке теории групп и теории решёток ещё в тридцатых годах двадцатого века появились публикации о группах, решётка подгрупп которых удовлетворяет условиям, связанным с модулярностью или полумодулярностью [1-5]. С конца сороковых годов до настоящего времени в нашей стране набрала силу программа С. Н. Черникова изучения строения групп с заданными свойствами системы подгрупп [6].

В [7] вводятся понятия k-верхней и k-нижней полумодулярности для решёток, которые обобщают понятия верхней и нижней полумодулярности, а также доказывается, что конечная группа, решётка подгрупп которой является 1-верхне полумодулярной, является разрешимой. В [8] исследовано строение конечных неразрешимых групп, решётка подгрупп которых является 1-нижне полумодулярной. Также имеются другие результаты [9-12], связанные с конечными группами, решётка подгрупп которых удовлетворяет некоторым условиям обобщённой полумодулярности.

2. Предварительные сведения

Используемые в тексте обозначения общеприняты, встречающиеся понятия по теории групп могут быть найдены в источниках [13-16], а понятия по теории решёток — в [17-19]. Приведём основные определения и обозначения, которые используются в работе.

Определение 1. *Решётка L с отношением «$\leq$» называется модулярной, если для любых $x, y, z \in L$ из $x \leq z$ следует выполнимость равенства $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$* [17].

Определение 2. *Конечная решётка L называется верхне полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ следует, что $x \vee y$ покрывает y* [17].

Определение 3. *Конечная решётка L называется нижне полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ из того, что $x \vee y$ покрывает y следует, что x покрывает $x \wedge y$* [17].

Определение 4. *При $k \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, конечная решётка L называется k-верхне (k-нижне) полумодулярной, если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство*

$$d(x \vee y : y) \leq d(x : x \wedge y) + k$$

$$(d(x : x \wedge y) \leq d(x \vee y : y) + k),$$

где через $d(b : a)$ обозначается наибольшая длина среди длин всех максимальных цепей от b до a ($a, b \in L$ и $a \leq b$) [7].

При $k \in \mathbb{N}_0$ через $\mathbb{M}^k$ и $\mathbb{M}_k$ обозначим классы конечных k-верхне полумодулярных и k-нижне полумодулярных решёток соответственно. Классы $\mathbb{M}^0, \mathbb{M}_0$ и $\mathbb{M}^0 \cap \mathbb{M}_0$ совпадают соответственно с классами конечных верхне полумодулярных, нижне полумодулярных и модулярных решёток. Также имеют место следующие включения: $\mathbb{M}^0 \subseteq \mathbb{M}^1 \subseteq \mathbb{M}^2 \subseteq \cdots$ и $\mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1 \subseteq \mathbb{M}_2 \subseteq \cdots$. При $m, n \in \mathbb{N}_0$ положим $\mathbb{M}^m \cap \mathbb{M}_n = \mathbb{M}^m_n$. Конечную группу будем называть M^m-,M_n- или M^m_n-группой, если решётка её подгрупп лежит в соответствующем классе $\mathbb{M}^m, \mathbb{M}_n$ или $\mathbb{M}^m_n$ [7]. Также согласно [7], подгруппы и факторгруппы M_n-,M^m- и M^m_n-групп являются соответственно M_n-,M^m- и M^m_n-группами. Известно, что если конечная решётка является верхне или нижне полумодулярной, то она удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда для цепей [17]. Также, в работе, без ссылок на источники, будем использовать известные теоремы 1-6.

Теорема 1. *Решётка подгрупп конечной группы G удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда для цепей тогда и только тогда, когда она является сверхразрешимой* [19].

Теорема 2. *Конечная группа G является M^0-группой тогда и только тогда, когда она представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где порядки подгрупп $H_1, ..., H_n$ попарно взаимно просты и для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ подгруппа H_i — либо квазигамильтонова примарная группа, либо группа вида $H_i = (P_{i1} \times \cdots \times P_{im_i}) \leftthreetimes Q_i$, где $P_{i1}, ..., P_{im_i}, Q_i$ — силовские примарные подгруппы группы G, причём*

1) *P_{ij} — элементарная абелева примарная p_{ij}-группа для всех $j \in \{1, ..., m_i\}$;*

2) *$Q_i = \langle b_i \rangle$ — циклическая примарная q_i-группа;*

3) *$b_i^{-1} a_{ij} b_i = a_{ij}^{r_{ij}}$ для каждого $a_{ij} \in P_{ij}$, где $r_{ij} \not\equiv 1 \pmod{p_{ij}}$, а также $r_{ij}^{q_i^{\beta_{ij}}} \equiv 1 \pmod{p_{ij}}$;*

4) *если в качестве β_{ij} выбрано наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющее условию 3), то $\beta_{ij_1} \neq \beta_{ij_2}$ при $j_1 \neq j_2$* [3].

Теорема 3. *Конечная группа G является M_0-группой тогда и только тогда, когда она сверхразрешима и на каждом факторе H_{i+1}/H_i $(0 \leq i \leq n-1)$ главного ряда $\{1_G\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_n = G$ индуцирует либо тождественный автоморфизм, либо автоморфизм простого порядка, то есть $|(G/H_i)/C_{G/H_i}(H/H_i)|$ равно 1 или простому числу* [19].

Теорема 4. *Пусть G, H — M_0-группы, тогда $G \times H$ — M_0-группа* [19].

Теорема 5. *M^0_0-группа G представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где порядки подгрупп $H_1, ..., H_n$ попарно взаимно просты и для каждого $i \in \{1, ..., n\}$ подгруппа H_i — либо квазигамильтонова примарная группа, либо группа вида $H_i = P_i \leftthreetimes Q_i$, где P_i — элементарная абелева примарная p_i-группа ($p_i \geq 3$) и $Q_i = \langle b_i \rangle$ — циклическая примарная q_i-группа, причём существует такое $r_i \in \{2, ..., p_i - 1\}$, что $r_i^{q_i} \equiv 1 \pmod{p_i}$ и для любых $a_i \in P_i$ имеем $b_i^{-1} a_i b_i = a_i^{r_i}$*[2].

Пусть L — конечная решётка. Согласно [16], через 0 и 1 обозначаем минимальный и максимальный её элементы соответственно. При $x, y \in L$ и $x \leq y$, также согласно [16], через y/x обозначаем множество $\{z \in L | x \leq z \leq y\}$, которое является подрешёткой решётки L. Будем говорить, что конечная неодноэлементная решётка L удовлетворяет условию α (β), если $L \in \mathbb{M}_0$ ($L \in \mathbb{M}^0$) и для любого её элемента $u < 1$ подрешётка $u/0$ принадлежит классу $\mathbb{M}^0$ ($\mathbb{M}_0$).

Приведённая ниже теорема была сформулирована в [12], а её доказательство имеется в [9].

Теорема 6. *Если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию α, то группа является M^1-группой* [12,9].

Оказывается, имеет место в некотором смысле двойственная к указанной теорема, доказательство которой и является основным результатом данной работы.

Теорема 7. *Если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы и удовлетворяет условию β, то группа является M_1-группой.*

Отметим, что существует решётка, которая удовлетворяет условию β, но не принадлежит классу $\mathbb{M}_1$. Например, такой решёткой является множество

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\},$$

состоящее из подмножеств множества $\{1,2,3,4\}$ относительно отношения включения «$\subseteq$», взятого в качестве частичного порядка.

Результаты работы были доложены одним из авторов в Московском государственном университете на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024» [20].

3. Доказательство теоремы 7

Предположим противное, пусть G — конечная группа наименьшего порядка, не удовлетворяющая утверждению, сформулированному в теореме 7. Так как G — M^0-группа, то по теореме 2 группа G представима в виде $G = H_1 \times \cdots \times H_n$, где $H_1, ..., H_n$ — подгруппы попарно взаимно простых порядков. При $n \geq 2$ подгруппы $H_1, ..., H_n$ являются собственными и, согласно выбору G, являются M_0-группами. По теореме 4 группа G является M_0-группой. Так как $\mathbb{M}_0 \subseteq \mathbb{M}_1$, то G — M_1-группа и приходим к противоречию, поэтому полагаем $n = 1$.

Так как G не является примарной M_0^0-группой, то по теореме 2 группа G представима в виде $G = (P_1 \times \cdots \times P_m) \leftthreetimes Q$, где $P_1, ..., P_m$ — силовские p_1-, ..., p_m-подгруппы при попарно различных простых числах $p_1, ..., p_m$, а Q — силовская q-подгруппа для некоторого простого числа q, а также выполняются следующие условия:

1) P_i — элементарная абелева примарная p_i-группа для всех $i \in \{1, ..., m\}$;

2) $Q = \langle b \rangle$ — циклическая примарная q-группа;

3) $b^{-1}ab = a_i^{r_i}$ для каждого $a_i \in P_i$, причём $r_i \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ и $r_i^{q^{\beta_i}} \equiv 1 \pmod{p_i}$;

4) если в качестве β_i выбрано наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющее условию 3), то $\beta_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$.

Предположим, что $m \geq 2$. Тогда подгруппы $P_1 \leftthreetimes Q, ..., P_m \leftthreetimes Q$ являются собственными, а значит являются M_0^0-группами (здесь учитываем, что $P_1, ..., P_m$ — нормальные подгруппы в G, в силу их характеристичности в нормальной подгруппе $P_1 \times \cdots \times P_m$, а также то, что $\mathbb{M}^0 \cap \mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0^0$). Далее, факт, что собственная подгруппа группы G является M_0^0-группой, будем использовать по умолчанию. По теореме 5 элемент $b \in Q$ индуцирует на каждой из подгрупп $P_1, ..., P_m$ автоморфизм одного и того же простого порядка q. Однако это противоречит условиям 3) и 4), поэтому считаем $m = 1$. Ввиду этого полагаем, что $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = \langle a_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_k \rangle$, причём $|a_1| = \cdots = |a_k| = p$, где p — простое число, больше 2, $Q = \langle b \rangle$, $|b| = q^l$ и $q | p-1$ $(k, l \in \mathbb{N})$. Более того, для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a_1^b = a_1^r, ..., a_k^b = a_k^r$ и $r^{q^\beta} \equiv 1 \pmod{p}$, где β — наименьшее натуральное число, для которого выполняется это сравнение (здесь и ниже, через x^y, согласно [16], обозначаем $y^{-1}xy$ для элементов x, y некоторой группы). При $k \geq 2$ подгруппы $\langle a_1 \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle, ..., \langle a_k \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ являются собственными, а значит являются M_0^0-группами (здесь учитываем, что ввиду приведённых соотношений все подгруппы из P являются нормальными в G). По теореме 5 элемент b сопряжением индуцирует на каждой из подгрупп $\langle a_1 \rangle, ..., \langle a_k \rangle$ автоморфизм простого порядка q. Откуда, в силу теоремы 3, группа G является M_0-группой, что приводит к противоречию. Поэтому ниже полагаем $k = 1$.

Таким образом, $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $\langle a \rangle$ — циклическая группа простого порядка $p \geq 3$, $\langle b \rangle$ — циклическая группа порядка q^l и для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a^b = a^r$, причём $r^{q^\beta} \equiv 1 \pmod p$ и β — наименьшее натуральное число, для которого выполняется это сравнение. Понятно, что $b^{-q^\beta} a b^{q^\beta} = a$, то есть $b^{q^\beta} \in Z(G)$ и $q^\beta | p-1$ [13]. Предположим, что $\beta = 1$, тогда b индуцирует на $\langle a \rangle$ автоморфизм простого порядка q и, в силу теоремы 3, группа G является M_0-группой, что противоречит её выбору. Поэтому считаем, что $l \geq \beta \geq 2$. Рассмотрим подгруппу $\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b^q \rangle$, которая является собственной в G, а значит является M_0^0-группой. По теореме 4 элемент b^q сопряжением индуцирует на подгруппе $\langle a \rangle$ автоморфизм простого порядка q, то есть $(b^q)^q \in Z(G)$ и $b^q \notin Z(G)$, поэтому $r^{q^2} \equiv 1 \pmod p$ и $\beta = 2$.

Итак, $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $\langle a \rangle$ — циклическая группа простого порядка $p \geq 3$, $\langle b \rangle$ — циклическая группа порядка q^l и для некоторого $r \in \{2, ..., p-1\}$ имеем $a^b = a^r$, причём $r^{q^2} \equiv 1 \pmod p$. Теперь, для получения завершающего противоречия, покажем, что G — M_1-группа, то есть для любых подгрупп A, B группы G выполняется неравенство

$$d(A : A \cap B) \leq d(\langle A, B \rangle : B) + 1. \tag{$*$}$$

В случае, когда $\langle A, B \rangle$ является собственной подгруппой группы G, то $\langle A, B \rangle$ будет M_0^0-группой, что влечёт за собой выполнение неравенства $(*)$. Поэтому считаем, что $\langle A, B \rangle = G$. Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из подгрупп A и B является нормальной в G. Так как G является сверхразрешимой группой, то длина $d(X : Y)$, при $X, Y \leq G$ и $Y \leq X$, равна количеству множителей в разложении числа $\frac{|Y|}{|X|}$ на необязательно различные простые сомножители [16]. Так как $|AB| = \frac{|A||B|}{|A \cap B|}$ [14], то количество множителей в разложении чисел $\frac{|AB|}{|B|}$ и $\frac{|A|}{|A \cap B|}$ совпадает, откуда следует, что $d(AB : A)$ равна длине $d(A : A \cap B)$ и неравенство $(*)$ выполняется.

Теперь рассмотрим случай, когда ни A, ни B не являются нормальными подгруппами группы G. Так как порядок каждой из подгрупп не делится на p и $\langle A, B \rangle = G$, то $|A|, |B| \in \{q^l, q^{l-1}\}$ и $A \cap B = \langle b^{q^2} \rangle$ (учли, что пересечение различных силовских q-подгрупп группы G совпадает с подгруппой $\langle b^{q^2} \rangle$), то есть $|A \cap B| = q^{l-2}$. Теперь пусть C — подгруппа порядка q^l, содержащая подгруппу A. Тогда $|A : A \cap B|$ делит нацело $|C : A \cap B| = \frac{q^l}{q^{l-2}} = q^2$, а значит, $d(A : A \cap B) \leq 2$. С другой стороны, так как B — собственная подгруппа в $G = \langle A, B \rangle$, то $d(\langle A, B \rangle : B) \geq 1$. Поэтому $d(A : A \cap B) \leq d(\langle A, B \rangle : B) + 1$, то есть приходим к выполнимости неравенства $(*)$. Следовательно, группа G является M_1-группой, что приводит, как было отмечено выше, к противоречию. Теорема 7 доказана.

4. Заключение

В заключение отметим, что условие β, сформулированное выше, не является двойственным к условию α в том смысле, что из выполнимости условия α для решётки L не следует, что двойственная решётка к решётке L будет удовлетворять условию β. Сформулируем условие α', двойственное к условию α: будем говорить, что конечная неодноэлементная решётка L удовлетворяет условию α', если $L \in \mathbb{M}^0$ и для любого её элемента $0 < u$ подрешётка $1/u$ принадлежит классу $\mathbb{M}_0$.

В связи с этим представляет интерес следующий вопрос: если решётка является решёткой подгрупп некоторой конечной неединичной группы G и удовлетворяет условию α', следует ли из этого, что G является M_1-группой? Как оказывается, не следует. Например, решётка подгрупп группы $\langle a, b | a^{17} = b^8 = 1, a^b = a^2 \rangle$ удовлетворяет условию α', при этом сама группа является M_2-группой, но не является M_1-группой, то есть, согласно [11], она имеет ступень нижней полумодулярности, равную 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito, N. Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Sem. Reports. 1951. P. 1-6.
2. Iwasawa, K. On the structure of infinite M-groups // Jap. J. Math. 1943. Vol. 18. P. 709–728.
3. Jones, A. W. Semi-modular finite groups and the Burnside basis theorem // Abstract Bull. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 52. P. 541–560.
4. Sato, S. On groups and the lattices of subgroups // Osaka Math. J., 1949. Vol. 1. P. 135–149.
5. Suzuki, M. On the lattice of subgroups of finite groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 70. P. 345–371.
6. Черников, С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
7. Титов, Г. Н. О разрешимости обобщённо полумодулярных конечных групп // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2010. Т. 7. № 1. С. 66-69.
8. Титов, Г. Н. О неразрешимых M_1-группах заданного порядка // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 2. С. 54-61.
9. Дейнекина, А. А., Титов, Г. Н. Конечные группы с условием обобщённой полумодулярности // Алгебра и приложения: сборник научных трудов. Краснодар: КубГУ, 2023. С. 16-31.
10. Крюкова, Т. А., Титов Г. Н. Несверхразрешимые группы с обобщённым условием полумодулярности системы подгрупп // British Journal of Innovation in Science and Technology, 2019, Т. 4, № 1. с. 19-24.
11. Титов, Г. Н., Тимофеева В. В. Алгоритм нахождения ступеней полумодулярности конечной решётки // Наука. Информатизация. Технологии. Образование: материалы XIII Международной научно-практической конференции НИТО, г. Екатеринбург, 24-28 февраля 2020 г. Екатеринбург: Издательство РГППУ, 2020. С. 389-402.
12. Титов, Г. Н. О конечных группах с некоторыми условиями полумодулярности решёток подгрупп // XIV международная школа конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова. сборник тезисов. 2022. С. 56.
13. Горчаков, Ю. М. Теория групп. Тверь: ТГУ, 1998. 112 с.
14. Каргаполов, М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
15. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977. 495 с.
16. Холл, М. Теория групп. М.: Издательство иностранной литературы, 1962.

17. Биркгоф, Т. Теория решёток. М.: Наука, 1984. 568 с.

18. Гретцер, Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.

19. Судзуки, М. Строение группы и строение структуры её подгрупп. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960.

20. Цыбин, И. А. Об одном вопросе, связанном с полумодулярностью решёток подгрупп конечных групп / И. А. Цыбин // Материалы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2024» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, Е.И. Зимакова.– М.: МОО СИПНН Н.Д. Кондратьева, 2024.

REFERENCES

1. Ito, N. 1951, “Note on (LM)-groups of finite order”, *Kodai Math. Sem. Reports*, pp. 1-6.

2. Iwasawa, K. 1943, “On the structure of infinite M-groups”, *Jap. Journal of Math*, vol. 18, pp. 709-728.

3. Jones, A. W. 1946, “Semi-modular finite groups and the Burnside basis theorem”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 52, pp. 541-560.

4. Sato, S. 1949, “On groups and the lattices of subgroups”, *Osaka Math. Journal*, vol. 1, pp. 135-149.

5. Suzuki, M. 1951, “On the lattice of subgroups of finite groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 70, pp. 345-371.

6. Chernikov, S. N. 1980, “Groups with given properties of a system of subgroups”, *Nauka Publ.*, Moscow.

7. Titov, G. N. 2010, “On solvability of generalized semi-modular finite groups”, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, vol. 1, pp. 66-69.

8. Titov, G. N. 2011, “On non-solvable M_1-groups of given order”, *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, vol. 2, pp. 54-61.

9. Deinekina, A. A., Titov, G. N. 2023, “Finite groups with generalized semi-modular condition”, *Algebra and applications: collection of scientific papers*, pp. 16-31.

10. Kryukova, T. A., Titov, G. N. 2021, “Not-supersoluble groups with generalized semimodular condition of the subgroups system”, *British Journal of Innovation in Science and Technology*, vol. 4, no. 1, pp. 19-24.

11. Titov, G. N., Timofeeva, V. V. 2020, “Algorithm for finding steps of semi-modular finite lattice”, *Science. Information. Technologies. Education: Proc. XIII International Scientific and Practical Conference NITO*, Yekaterinburg, pp. 389-402.

12. Titov, G. N. 2022, “On finite groups with some upper semi-modularity conditions”, *XIV International Conference on group theory, dedicated to the memory of V. A. Belonogov, V. A. Vedernikov and L. A. Shemetkov*, p. 56.

13. Gorchakov, Yu. M. 1998, “Group theory”, *TSU*, Tver.

14. Kargapolov, M. I., Merzlyakov, Yu. I. 1982, “Fundamentals of Group Theory”, *Nauka Publ.*, Moscow.

15. Kostrikin, A. I. 1977, “Introduction to algebra”, *Nauka Publ.*, Moscow.

16. Hall, M. 1962, “Group theory”, *IL Publ.*, Moscow.

17. Birkhoff, G. 1984, “Lattice theory”, *Nauka Publ.*, Moscow.

18. Grätzer, G. 1982, “Lattice theory”, *Mir Publ.*, Moscow.

19. Suzuki, M. 1960, “Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups”, *IL Publ*, Moscow.

20. Tsybin, I. A., “On question about semi-modularity of lattice of subgroups of finite groups”, *Materials of the international Scientific Conference for Undergraduate and Graduate Students and Young Scientists "Lomonosov-2024"*.

Получено: 03.07.2024
Принято в печать: 26.12.2024