

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-244-253

О размерности группы Ли автоморфизмов параконтактного метрического многообразия

В. И. Паньженский, О. П. Сурина

Паньженский Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Сурина Ольга Петровна — кандидат физико-математических наук, Пензенский государственный университет (г. Пенза).

e-mail: o.surina2013@yandex.ru

Аннотация

Доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n + 1)$ -мерного гладкого многообразия, наделённого параконтактной метрической структурой (η, ξ, φ, g) , не превосходит $(n + 1)^2$, где η — дифференциальная 1-форма, определяющая контактное $2n$ -мерное распределение $H = \ker \eta$, ξ — векторное поле Рибба, φ — структурный эндоморфизм, g — псевдориманова метрика, ограничение которой на контактное распределение H имеет сигнатуру (n, n) . Анализ условий инвариантности параконтактной метрической структуры относительно инфинитезимальных автоморфизмов, а также используя атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма η имеет канонический вид, позволяет утверждать, что группа изотропий, индуцированная стационарной подгруппой точки $p(0, \dots, 0)$, вращает только векторы, лежащие в контактной плоскости H_p , и оставляет инвариантной псевдоевклидову метрику и симплектическую структуру, определяемую дифференциальной 2-формой $\Omega = d\eta$. Поэтому максимальная размерность алгебры Ли группы изотропий равна n^2 . Так как размерность подгруппы сдвигов не превосходит размерность многообразия, то размерность группы автоморфизмов не превосходит $n^2 + 2n + 1$. В данной работе также доказано, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n + 1)^2$. Примером параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, является обобщённая группа Гейзенберга, наделённая канонической парасасакиевой структурой. Найдены базисные векторные поля этой алгебры.

Ключевые слова: параконтактная метрическая структура, автоморфизмы, инфинитезимальные автоморфизмы, группа Гейзенберга.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Паньженский, В.И. Сурина, О.П. О размерности группы Ли автоморфизмов параконтактного метрического многообразия // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 244–253.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 514.763

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-244-253

**On the dimension of the Lie group of automorphisms of a
paracontact metric manifold**

V. I. Pan'zhenskii, O. P. Surina

Pan'zhenskii Vladimir Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Penza State University (Penza).

e-mail: kaf-geom@yandex.ru

Surina Olga Petrovna — candidate of physical and mathematical sciences, Penza State University (Penza).

e-mail: o.surina2013@yandex.ru

Abstract

It has been proved that the dimension of the Lie group of automorphisms of a $(2n + 1)$ -dimensional smooth manifold endowed with the paracontact metric structure (η, ξ, φ, g) does not exceed $(n + 1)^2$, where η is a differential 1-form defining the contact $2n$ -dimensional distribution $H = \ker \eta$, ξ is a Reeb vector field, φ is a structural endomorphism, g is a pseudo-Riemannian metric whose restriction to the contact distribution H has signature (n, n) . The analysis of the conditions for the invariance of the paracontact metric structure with respect to infinitesimal automorphisms, as well as using the Darboux atlas, in each chart of which the contact form η has a canonical form, allows us to state that the isotropy group induced by the stationary subgroup of the point $p(0, \dots, 0)$, rotates only vectors lying in the contact plane H_p , and leaves invariant the pseudo-Euclidean metric and the symplectic structure defined by the differential 2-form $\Omega = d\eta$. So the maximum dimension of the Lie algebra of the isotropy group is n^2 . Since the dimension of the translation subgroup does not exceed the dimension of the manifold, the dimension of the automorphism group does not exceed $n^2 + 2n + 1$. The paper also proves that the maximum dimension of the Lie algebra of infinitesimal automorphisms is equal to $(n + 1)^2$. An example of a paracontact metric manifold admitting a Lie algebra of infinitesimal automorphisms of maximum dimension is the generalized Heisenberg group endowed with a canonical para-Sasakian structure. The basis vector fields of this algebra are found.

Keywords: paracontact metric structure, automorphisms, infinitesimal automorphisms, Heisenberg group.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

Pan'zhenskii, V.I., Surina, O.P. 2024, "On the dimension of the Lie group of automorphisms of a paracontact metric manifold", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 244–253.

1. Введение

В настоящее время продолжают исследования контактных и параконтактных метрических многообразий [1]–[13]. В частности, изучаются автоморфизмы и инфинитезимальные автоморфизмы таких структур. В работе Танно [14] доказано, что максимальная размерность группы Ли автоморфизмов контактных или почти контактных $(2n + 1)$ -мерных метрических многообразий равна $(n + 1)^2$. В этой же работе установлено, что максимальная размерность

группы автоморфизмов достигается тогда и только тогда, когда секционная кривизна в двумерных направлениях, содержащих вектор Рибо, является постоянной.

В данной работе доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n + 1)$ -мерного параконтактного многообразия с псевдоримановой метрикой не превосходит $(n + 1)^2$, а максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n + 1)^2$. Примером такого многообразия является обобщённая группа Гейзенберга, наделённая канонической параконтактной метрической структурой, которая является нормальной и, следовательно, парасасакиевой. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов обобщённой группы Гейзенберга с данной парасасакиевой структурой.

Пусть M – гладкое многообразие нечётной размерности $m = 2n + 1$. Контактной формой на M называется дифференциальная 1-форма η , удовлетворяющая условию [15]

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0, \quad (1)$$

где $\wedge$ – внешнее произведение, d – внешний дифференциал. Многообразие M , наделённое контактной формой, называется контактным многообразием. Условие (1) означает, что ранг дифференциальной 2-формы $d\eta$ равен $2n$. Контактная форма η определяет вполне неголономное $2n$ -мерное контактное распределение $H = \ker \eta$, а 2-форма $d\eta$ – 1-мерное распределение $V = \ker d\eta$. Существует единственное векторное поле $\xi \in V$ такое, что $\eta(\xi) = 1$. Поле ξ называется векторным полем Рибо.

Параконтактной метрической структурой на контактном многообразии M называется четвёртка тензорных полей (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – векторное поле Рибо, φ – эндоморфизм модуля векторных полей на M , g – псевдориманова метрика. При этом требуется выполнение следующих условий

$$\varphi^2 = id - \eta \otimes \xi, \quad d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y).$$

Кроме того, предполагается, что ограничение J эндоморфизма φ на контактное распределение H определяет на H паракомплексную структуру: $J^2 = id$, собственные распределения которой H^+ и H^- , отвечающие собственным значениям ± 1 , имеют одинаковую размерность $\dim H^+ = \dim H^- = n$, а $g(JX, JY) = -g(X, Y)$ для векторных полей $X, Y \in H$. Ограничение псевдоримановой метрики g на распределение H имеет сигнатуру (n, n) . Нетрудно убедиться, что выполняются ещё и следующие равенства

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(X, \xi) = 0, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta \circ \varphi = 0, \quad g(X, \xi) = \eta(X).$$

Параконтактная метрическая структура называется k -контактной, если векторное поле Рибо ξ является киллинговым. Нормальная параконтактная метрическая структура называется парасасакиевой. Параконтактная метрическая структура является парасасакиевой, если [16], [17]

$$[\varphi, \varphi](X, Y) - d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса.

2. О размерности группы автоморфизмов

Диффеоморфизм $f : M \rightarrow M$ называется автоморфизмом параконтактного метрического многообразия M , если он сохраняет структурные тензоры η, ξ, φ, g . Как и в случае контактного и почти контактного метрического многообразия, имеет место следующее утверждение.

THEOREM 1. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов $(2n + 1)$ -мерного параконтактного метрического многообразия не превосходит $(n + 1)^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_t = \exp tX$ – произвольная однопараметрическая подгруппа группы Ли автоморфизмов $A(M)$. Векторное поле X является инфинитезимальным автоморфизмом тогда и только тогда, когда производная Ли вдоль X от η, ξ, φ, g обращается в нуль

$$L_X \eta = 0, \quad L_X \xi = 0, \quad L_X \varphi = 0, \quad L_X g = 0.$$

В локальных координатах имеем

$$X^p \partial_p \eta_i + \partial_i X^p \eta_p = 0, \quad (2)$$

$$X^p \partial_p \xi^i - \partial_p X^i \xi^p = 0, \quad (3)$$

$$X^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X^p \varphi_p^i - \partial_p X^i \varphi_j^p = 0, \quad (4)$$

$$X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} = 0. \quad (5)$$

Кроме того, в силу перестановочности производной Ли и внешнего дифференциала, производная Ли от фундаментальной формы $\Omega = d\eta$ также равна нулю

$$X^p \partial_p \Omega_{ij} + \partial_i X^p \Omega_{pj} + \partial_j X^p \Omega_{ip} = 0. \quad (6)$$

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита псевдоримановой метрики g . Тогда, заменяя частные производные ковариантными, (2), (3), (4), (5), (6) принимают вид

$$X^p \nabla_p \eta_i + \nabla_i X^p \eta_p = 0, \quad (7)$$

$$X^p \nabla_p \xi^i - \nabla_p X^i \xi^p = 0, \quad (8)$$

$$X^p \nabla_p \varphi_j^i + \nabla_j X^p \varphi_p^i - \nabla_p X^i \varphi_j^p = 0, \quad (9)$$

$$X^p \nabla_p g_{ij} + \nabla_i X^p g_{pj} + \nabla_j X^p g_{ip} = 0, \quad (10)$$

$$X^p \nabla_p \Omega_{ij} + \nabla_i X^p \Omega_{pj} + \nabla_j X^p \Omega_{ip} = 0. \quad (11)$$

Заметим, что (8), (9) и (11) следуют из (7) и (10). На контактном многообразии M существует атлас Дарбу, в каждой карте которого контактная форма η и векторное поле Роба имеют вид

$$\eta = -x^{n+1} dx^1 - \dots - x^{2n} dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m. \quad (12)$$

Стационарная подгруппа точки $p(0, \dots, 0)$ в касательном пространстве $T_p M$ индуцирует группу изотропий. Так как матрицы $\nabla_i X^j$ принадлежат алгебре Ли этой группы, а значение поля X в точке p равно нулевому вектору, то, как следует из (7), (8) и (12), $\nabla_i X^m = 0$ и $\nabla_m X^i = 0$. Поэтому группа изотропий может вращать только векторы, лежащие в контактной плоскости H_p . Матрицы $\nabla_a X^b$ ($a, b = 1, \dots, 2n$), как следует из (10), принадлежат алгебре Ли псевдоортогональной группы. Учитывая, что псевдоевклидова метрика в H_p имеет сигнатуру (n, n) , заключаем, что эта алгебра состоит из матриц следующего вида

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 – матрицы размера $n \times n$, причём A_1 и A_4 – кососимметрические матрицы, а A_3 совпадает с транспонированной матрицей A_2 : $A_3 = A_2^t$. Кроме того, матрицы $\nabla_a X^b$, находятся в алгебре Ли симплектической группы, а эта алгебра состоит из матриц

$$S = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

где $B_4 = B_1^t, B_2 = B_2^t, B_3 = B_2$. Таким образом, алгебра Ли группы изотропий точки p состоит из матриц следующего вида

$$D \cap S = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix},$$

где A – кососимметрическая матрица, а B – симметрическая. Это означает, что размерность данной алгебры, а следовательно, группы изотропий и стационарной подгруппы не превосходит n^2 . Так как подгруппа сдвигов не может превосходить размерности многообразия, то размерность группы автоморфизмов параконтактного метрического многообразия не превосходит $(n+1)^2$. $\square$

3. Инфинитезимальные автоморфизмы

В качестве примера параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, рассмотрим обобщённую (многомерную) группу Гейзенберга. Данная группа является $m = (2n+1)$ -мерной группой Ли $(n+2) \times (n+2)$ -матриц следующего вида

$$G = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ \Theta^t & E_n & x^t \\ 0 & \Theta & 1 \end{pmatrix},$$

где $x^t = (x^1, \dots, x^n)^t, y = (x^{n+1}, \dots, x^{2n}), \Theta = (0, \dots, 0), z = x^m, E_n$ – единичная $n \times n$ -матрица. Структурные тензоры (η, ξ, φ, g) левоинвариантной параконтактной метрической структуры на G имеют следующий вид

$$\eta = -x^{n+1}dx^1 - \dots - x^{2n}dx^n + dx^m, \quad \xi = \partial_m,$$

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} O & E_n^* & \Theta^t \\ E_n^* & O & \Theta^t \\ \Theta & y & O \end{pmatrix},$$

$$ds^2 = dx^{1^2} + \dots + dx^{n^2} - dx^{n+1^2} - \dots - dx^{2n^2} + (-x^{n+1}dx^1 - \dots - x^{2n}dx^n + dx^m)^2,$$

где O – нулевая $n \times n$ -матрица, E_n^* – $n \times n$ -матрица, ненулевыми элементами которой являются единицы, стоящие на побочной диагонали. Нетрудно установить, что данная параконтактная структура является парасасакиевой [18].

Пусть $m = 3$. В этом случае имеем группу Гейзенберга

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & x^1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Левоинвариантные структурные тензоры параконтактной метрической структуры имеют следующий вид

$$\eta_i = (-x^2 \ 0 \ 1), \quad \xi^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+x^{2^2} & 0 & -x^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимальные автоморфизмы данной структуры определяются системой дифференциальных уравнений (2) и (5)

$$-X^2 - x^2\partial_1 X^1 + \partial_1 X^3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
-x^2\partial_2X^1 + \partial_2X^3 &= 0, \\
-x^2\partial_3X^2 + \partial_3X^3 &= 0, \\
x^2X^2 + (1+x^2)\partial_1X^1 - x^2\partial_1X^3 &= 0, \\
-\partial_1X^2 + (1+x^2)\partial_2X^1 - x^2\partial_2X^3 &= 0, \\
-X^2 - x^2\partial_1X^1 + \partial_1X^3 + (1+x^2)\partial_3X^1 - x^2\partial_3X^3 &= 0, \\
-x^2\partial_2X^1 + \partial_2X^3 - \partial_3X^2 &= 0, \\
\partial_2X^2 = 0, \quad \partial_3X^1 &= 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, находим общее решение

$$X^1 = c_4x^2 + c_1, \quad X^2 = c_4x^1 + c_2, \quad X^3 = c_2x^1 + \frac{1}{2}c_4(x^{1^2} + x^{2^2}) + c_3.$$

Постоянным c_1, c_2, c_3, c_4 соответствуют базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2 + x^1\partial_3, \quad X_3 = \partial_3, \quad X_4 = x^2\partial_1 + x^1\partial_2 + \frac{1}{2}(x^{1^2} + x^{2^2})\partial_3.$$

Аналогично, для $m = 5$ имеем

$$G = \begin{pmatrix} 1 & x^3 & x^4 & x^5 \\ 0 & 1 & 0 & x^1 \\ 0 & 0 & 1 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_i = (-x^3 \quad -x^4 \quad 0 \quad 0 \quad 1), \quad \xi^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 & x^4 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+x^{3^2} & x^3x^4 & 0 & 0 & -x^3 \\ x^3x^4 & 1+x^{4^2} & 0 & 0 & -x^4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -x^3 & -x^4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (2) и (5), находим базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3 + x^1\partial_5, \quad X_4 = \partial_4 + x^2\partial_5, \quad X_5 = \partial_5, \\
X_1^2 &= x^2\partial_1 - x^1\partial_2 + x^4\partial_3 - x^3\partial_4, \\
X_1^3 &= x^3\partial_1 + x^1\partial_3 + \frac{1}{2}(x^{3^2} + x^{1^2})\partial_5, \\
X_2^4 &= x^4\partial_2 + x^2\partial_4 + \frac{1}{2}(x^{4^2} + x^{2^2})\partial_5, \\
X_1^4 &= x^4\partial_1 + x^1\partial_4 + x^3\partial_2 + x^2\partial_3 + (x^3x^4 + x^1x^2)\partial_5.
\end{aligned}$$

Решение уравнений инвариантности формы η и метрического тензора g легко обобщается на произвольную размерность m . Соответствующие $(n+1)^2$ базисные векторные поля алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов имеют вид

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \partial_\alpha, \quad X_{n+\alpha} = \partial_{n+\alpha} + x^\alpha \partial_m, \quad X_m = \partial_m, \quad \alpha = \overline{1, n}, \\ X_\alpha^\beta &= x^\beta \partial_\alpha - x^\alpha \partial_\beta + x^{n+\beta} \partial_{n+\alpha} - x^{n+\alpha} \partial_{n+\beta}, \quad \alpha < \beta, \quad \beta = \overline{1, n}, \\ X_\alpha^{n+\alpha} &= x^{n+\alpha} \partial_\alpha + x^\alpha \partial_{n+\alpha} + \frac{1}{2}(x^{n+\alpha^2} + x^{\alpha^2}) \partial_m, \quad \alpha = \overline{1, n}, \\ X_\alpha^{n+\beta} &= x^{n+\beta} \partial_\alpha + x^\alpha \partial_{n+\beta} + x^{n+\alpha} \partial_\beta + x^\beta \partial_{n+\alpha} + (x^{n+\alpha} x^{n+\beta} + x^\alpha x^\beta), \quad \alpha < \beta. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМ 2. *Максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов $(2n+1)$ -мерного параконтактного метрического многообразия равна $(n+1)^2$.*

Кроме связности Леви-Чивита ∇ на группе Гейзенберга, наделённой парасасакиевой структурой, имеется параконтактная метрическая связность $\tilde{\nabla}$ с кососимметрическим кручением, определённая равенством [18]

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + \frac{1}{2} d\eta(X, Y) \wedge \eta(Z).$$

В этой связности все структурные тензоры парасасакиевой структуры ковариантно постоянны. Так как производная Ли перестановочна с внешним дифференциалом, то данная связность, как и связность Леви-Чивита, инвариантна относительно алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов.

4. Заключение

Таким образом, в работе доказано, что размерность группы Ли автоморфизмов $(2n+1)$ -мерного параконтактного метрического многообразия не превосходит $(n+1)^2$, а максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов равна $(n+1)^2$. Примером параконтактного метрического многообразия, допускающего алгебру Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальной размерности, является обобщённая группа Гейзенберга. Проинтегрированы уравнения инвариантности структурных тензоров, определяющих параконтактную метрическую структуру, и найдены базисные векторные поля алгебры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sato I. On a structure similar to the almost contact structure // Tensor (N. S.). 1976. V. 30. P. 219–224.
2. Kaneyuki S., Willams F. L. Almost paracontact and parahodge structure on manifolds // Nagoya Mathematics Journal. 1985. V. 99. P. 173–187.
3. Matsumoto K. On Lorentzian paracontact manifolds // Bulletin of the Yamagata University. Natural Science. 1989. V. 12. № 2. P. 151–156.
4. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Differential Geometry and its Applications. 2008. V. 26. № 5. P. 544–552.

5. Zamkovoy S. Canonical connections on paracontact manifolds // *Annals of Global Analysis and Geometry*. 2009. V. 36. P. 37–60.
6. Tripathi M. M., Kılıç E., Perktaş S. Y., Keleş S. Indefinite almost paracontact metric manifolds // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2010. V. 2010. 19 p.
7. Eftal B., Kiliç E., Perktaş S. Some curvature conditions on a para-Sasakian manifold with canonical paracontact connection // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2012. V. 2012. 24 p.
8. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // *Journal of Geometry and Physics*. 2013. V. 69. P. 60–73.
9. Calvaruso G., Perrone A. Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups // *Periodica Mathematica Hungarica*. 2014. V. 69. P. 97–108.
10. Calvaruso G., Martín-Molina V. Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle // *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923–)*. 2015. V. 194. P. 1359–1380.
11. Calvaruso G., Perrone A. Five-dimensional paracontact Lie algebras // *Differential Geometry and Its Applications*. 2016. V. 45. P. 115–129.
12. Uygun P., Atçeken M. A (k, μ) -paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions // *Earthline Journal of Mathematical Sciences*. 2023. V. 14. № 2. P. 175–190.
13. Uygun P., Atçeken M. A (k, μ) -paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions // *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*. 2023. V. 15. № 1. P. 171–179.
14. Tanno S. The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds // *Tohoku Mathematical Journal*. 1969. V. 21. № 1. P. 21–38.
15. Blair D. E. Contact manifolds in Riemannian geometry. *Lecture Notes in Mathematics* (V. 509). – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1976. – 148 p.
16. Смоленцев Н. К. Левоинвариантные пара-сасакиевы структуры на группах Ли // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2019. № 62. С. 27–37.
17. Смоленцев Н. К., Шагабудинова И. Ю. О парасасакиевых структурах на пятимерных алгебрах Ли // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2021. № 69. С. 37–52.
18. Паньженский В. И., Растрепина А. О. Левоинвариантная парасасакиева структура на группе Гейзенберга // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. № 75. С. 38–51.

REFERENCES

1. Sato, I. 1976, “On a structure similar to the almost contact structure”, *Tensor (N. S.)*, vol. 30, pp. 219–224.
2. Kaneyuki, S. & Willams, F. L. 1985, “Almost paracontact and parahodge structure on manifolds”, *Nagoya Mathematics Journal*, vol. 99, pp. 173–187.
doi: 10.1017/S0027763000021565.

3. Matsumoto, K. 1989, “On Lorentzian paracontact manifolds”, *Bulletin of the Yamagata University. Natural Science*, vol. 12, no 2, pp. 151–156.
4. Diatta, A. 2008, “Left invariant contact structures on Lie groups”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 26, no. 5, pp. 544–552. doi: 10.1016/j.difgeo.2008.04.001.
5. Zamkovoy, S. 2009, “Canonical connections on paracontact manifolds”, *Annals of Global Analysis and Geometry*, vol. 36, pp. 37–60. doi:10.1007/s10455-008-9147-3.
6. Tripathi, M. M., Kılıç, E., Perktaş, S. Y. & Keleş, S. 2010, “Indefinite almost paracontact metric manifolds”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2010, 19 p. doi: 10.1155/2010/846195.
7. Eftal, B., Kiliç, E. & Perktaş, S. 2012, “Some curvature conditions on a para-Sasakian manifold with canonical paracontact connection”, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2012, 24 p. doi: 10.1155/2012/395462.
8. Calvaruso, G. 2013, “Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures”, *Journal of Geometry and Physics*, vol. 69, pp. 60–73. doi: 10.1016/j.geomphys.2013.03.001.
9. Calvaruso, G. & Martín-Molina, V. 2015, “Paracontact metric structures on the unit tangent sphere bundle”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, vol. 194, pp. 1359–1380. doi: 10.1007/s10231-014-0424-4.
10. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2014, “Left-invariant hypercontact structures on three-dimensional Lie groups”, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 69, pp. 97–108. doi: 10.1007/s10998-014-0054-z.
11. Calvaruso, G. & Perrone, A. 2016, “Five-dimensional paracontact Lie algebras”, *Differential Geometry and Its Applications*, vol. 45, pp. 115–129. doi: 10.1016/j.difgeo.2016.01.001.
12. Uygun, P. & Atçeken, M. 2023, “A (k, μ) -paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions”, *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, vol. 14, no. 2, pp. 175–190. doi: 10.34198/ejms.14224.175190.
13. Uygun, P. & Atçeken, M. 2023, “A (k, μ) -paracontact metric manifolds satisfying curvature conditions”, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 15, no. 1, pp. 171–179. doi: 10.47000/tjmcs.1153650.
14. Tanno, S. 1969, “The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds”, *Tohoku Mathematical Journal*, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. doi: 10.2748/tmj/1178243031.
15. Blair, D. E. 1976, “Contact manifolds in Riemannian geometry. Lecture notes in mathematics”, *Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag*, Vol. 509, 148 p. doi: 10.1007/BFb0079307.
16. Smolentsev, N. K. 2019, “Left-invariant para-sasakian structures on Lie groups”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 62, pp. 27–37. doi: 10.17223/19988621/62/3.
17. Smolentsev, N. K. & Shagabudinova, I. Y. 2021, “On Parasasakian structures on five-dimensional Lie algebras”, *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 69, pp. 37–52. doi: 10.17223/19988621/69/4.

18. Pan'zhenskii, V. I. & Rastrepina, A. O. 2022, "Left-invariant para-sasakian structure on the Heisenberg group", *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mexanika (Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics)*, no. 75, pp. 38–51. doi: 10.17223/19988621/75/4.

Получено: 24.05.2024

Принято в печать: 26.12.2024