ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-237-243

О накрытии множеств специального вида геометрическими прогрессиями с рядом некоторых ограничений

Р. М. Ашрапов, П. С. Дергач

Ашрапов Рафаэль Маратович — филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Ташкенте (г. Ташкент).
e-mail: ashrapov41@gmail.com
Дергач Пётр Сергеевич — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: dergachpes@mail.ru

Аннотация

В работе исследуется классическая задача о минимальном накрытии начала натурального ряда минимальным числом геометрических прогрессий с рядом некоторых ограничений(на начало прогрессии, на шаг прогрессии и на непересечение прогрессий). Среди схожих к ней задач следует отметить следующие задачи: о накрытии арифметических прогрессий геометрическими с действительнозначным шагом, о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с фиксированным числом членов, где шаг действительнозначен и о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с рациональным шагом. Таким образом, уникальность работы заключается в наличии ограничений на геометрические прогрессии и тем, что шаг является натуральным числом. Найдены оптимальные ответы для случаев, когда: ограничение на шаг равно 2, ограничение на шаг равно 2 и имеется запрет на пересечение, ограничение на начало равно 1. Были получены оценки снизу для случаев, когда: нет ограничений, есть ограничение на непересечение, есть ограничение на шаг равное 3. Были получены оценки сверху для случаев когда: нет ограничений, есть ограничение на непересечение.

Ключевые слова: геометрические прогрессии, натуральный ряд, комбинаторная оптимизация.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:
Ашрапов, Р.М. Дергач, П.С. О накрыти множеств специаильного вида геометрическими прогрессиями с рядом некоторых ограничений // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 237–243.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-237-243

On covering sets of a special type by geometric progressions with a certain restrictions

R. M. Ashrapov, P. S. Dergach

Ashrapov Rafael Maratovich — Branch of the Lomonosov Moscow State University in Tashkent (Tashkent).
e-mail: ashrapov41@gmail.com
Dergach Peter Sergeevich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: dergachpes@mail.ru

Abstract

The paper investigates the classic problem of covering the start of the natural number series with the minimum number of geometric progressions under various constraints (on the starting point, progression step, and non-intersection of progressions). Among similar problems, the following should be noted: covering arithmetic progressions with geometric progressions with real-valued steps, covering the start of the natural number series with geometric progressions with a fixed number of terms and a real-valued step, and covering the start of the natural number series with geometric progressions with a rational step. Thus, the uniqueness of the work lies in the constraints imposed on geometric progressions, particularly that the step is a natural number. Optimal solutions were found for cases where: the step constraint is 2, the step constraint is 2 with a prohibition on intersection, and the starting point constraint is 1. Lower bounds were obtained for cases where: there are no constraints, there is a prohibition on intersection, and there is a step constraint of 3. Upper bounds were obtained for cases where: there are no constraints, and there is a prohibition on intersection.

Keywords: geometric progressions, natural series, combinatorial optimization.

Bibliography: 4 titles.

For citation:
Ashrapov, R.M., Dergach, P.S. 2024, "On covering sets of a special type by geometric progressions with a certain restrictions" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 237–243.

1. Введение и обзор уже имеющихся результатов

В данной работе будем рассматривать задачу о нахождении минимального накрытия множества множества $A \subseteq \mathbb{N}$ геометрическими прогрессиями вида bq^k, где b и $q \in \mathbb{N}$, а k - целое неотрицательное число.

Будем различать задачи в зависимости от типа накладываемых условий:

- Разрешить/запретить прогрессиям пересекаться;
- Ограничение сверху на шаг прогрессий;
- Ограничение сверху на начала прогрессий.

В [1] рассматривается задача о накрытии начала арифметических прогрессий геометрическими прогрессиями с действительнозначными параметрами без наличия каких-либо ограничений. В ней исследуется асимптотика плотности решения, где плотность это отношение размера накрываемого множества к числу геометрических прогрессий. Показано, что для любой арифметической прогрессии, начиная с некоторого n, плотность решения имеет оценку снизу равную $\frac{1}{\pi^2}$.

В [2] рассматривается схожая задача о накрытии всего натурального ряда геометрическими прогрессиями с действительнозначным шагом и числом элементов равным k. Основным результатом является, что предел плотностей существует, причём принадлежит отрезку $[0; 0.5]$, где плотность это предел отношения минимального числа геометрических прогрессий, которые удовлетворяют условиям задачи, для накрытия начала натурального ряда длины n при $n \to \infty$.

В [3] рассматривается задача о накрытии начала натурального ряда геометрическими прогрессиями с рациональным шагом без наличия каких-либо ограничений. Результатом является оценка снизу имеющая вид $\frac{217}{36pi^2}n$ и оценка сверху имеющая вид $(\frac{3}{8} - \frac{1}{4900})n$.

Несложно заметить, что в случае накрытия натуральных чисел геометрическими прогрессиями нам неважно являются ли начала геометрических прогрессий натуральными или рациональными, поскольку любая геометрическая прогрессия с рациональным началом может быть заменена на геометрическую прогрессию с натуральным началом, причём вторая будет накрывать как минимум такое же множество натуральных чисел.

2. Основные определения

Большая часть определений этого раздела взята из [4].

Определение 1. *Обозначим за $f_B(A)$ минимальное количество геометрических прогрессий, которых достаточно для накрытия множества A с рядом ограничений B в виде индексов($S(s)$ – начало не больше s, $D(d)$ – шаг не больше d, I – пересечение, λ – нет ограничений).*

Определение 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $E(n)$ множество $\{1, \ldots, n\}$.*

Определение 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел из $E(n)$.*

Определение 4. *Число $b \in \mathbb{N}$, отличное от 1, будем называть стартом, если для его факторизации $p_1^{a_1} * ... * p_k^{a_k}$ выполнено, что НОД$(a_1, .., a_k) = 1$.*

Определение 5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\delta(n)$ количество стартов из $E(n)$.*

Определение 6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $Q(n)$ количество свободных от квадрата чисел из $E(n)$.*

Определение 7. *Пусть p, t – различные простые числа . Обозначим через $U(p, q)$ множество $\{u | u = p^i t^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$.*

Определение 8. *Пусть p, t – различные простые числа и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $V(p, t, n)$ множество $\{v | v = p^i t^j; i, j \in \mathbb{N}_0; i, j \leq n\}$.*

3. Доказательство вспомогательных лемм

Лемма 1. *Любая геометрическая прогрессия накрывает не более двух свободных от квадратов чисел.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Очевидно, что данная геометрическая прогрессия накрывает только одно число - b;

2. $q \neq 1$. Следовательно $\exists\ p$ - простое число, что $p \mid q$. Несложно видеть, что для $\forall\ k > 2$ выполнено, что $p^2 \mid bq^k$. Из чего следует, что лишь первые два члена геометрической прогрессии могут быть свободными от квадратов.

□

Следствие 1. $f(\mathbb{N}) = \infty$.

Лемма 2. *Любое натуральное число единственным образом представимо в виде произведения степени двойки и нечётного числа.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{N}$. Будем делить число a на 2, пока можем. Очевидно, что данный процесс конечный.
Пусть m - это число выполненых шагов. Получим, что искомая степень двойки равна m, а искомое нечётное число равно $\frac{a}{2^m}$. Существование и единственность выполнены в силу построения. □

Лемма 3. *Любая геометрическая прогрессия с шагом не большим 2 накрывает не более одного нечётного числа.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Данная геометрическая прогрессия накрывает только одно число - b;

2. $q = 2$. Несложно видеть, что для $\forall\ k \geq 1$ выполнено, что k-ый член геометрической прогрессии является четным поскольку его значение имеет вид $2^k * b$.

□

Следствие 2. $[\frac{n+1}{2}] \leqslant f_{D(2)}(E(n))$.

Лемма 4. *(Подсчёт числа стартов). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\pi(n) = k$. Обозначим множество простых чисел из $E(n)$ через $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$. Тогда верно*

$$\delta(n) = n - \sum_{i=1}^{k}[\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}[\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1}[\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}]$$

Доказательство. Посчитаем количество чисел, которые не являются стартами. От n отнимем подсчитанное количество и получим число стартов. Согласно определению 4, каждое число $a \in E(n)$, которое не является стартом, представимо в виде b^k, где b и $k \in \mathbb{N}$, причём $k \neq 1$. Следовательно, $\forall\ a \in E(n)$, которое не является стартом, выполнено, что $\exists\ b \in E(n)$ и $p \in \mathbb{N}$ - простое число, что $b^p = a$. Тогда количество чисел, которые не являются стартами, вычисляется по формуле включений-исключений и равно

$$n - \sum_{i=1}^{k}[\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}[\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1}[\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}].$$

Следовательно,

$$\delta(n) = n - \sum_{i=1}^{k}[\sqrt[p_i]{n}] + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=i+1}^{k}[\sqrt[p_i * p_j]{n}] + ... + (-1)^{k-1}[\sqrt[p_1 * ... * p_k]{n}].$$

□

Лемма 5. *Любая геометрическая прогрессия с ограничением на начало равным 1 накрывает не более одного старта.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $q = 1$. Следовательно, $q^k = 1$ для $\forall\ k \geq 0$;
2. q - не старт и $q \neq 1$. Тогда, согласно определению 4, для $\forall\ k \geq 1$ выполнено, что q^k не является стартом.
3. q - старт. Тогда, согласно определению 4, для $\forall\ k \geq 2$ выполнено, что q^k не является стартом.

□

Следствие 3. $\delta(n) \leqslant f_{D(1)}(E(n))$.

Лемма 6. *Любое число $a \in \mathbb{N}$ представимо в виде b^k, где b-старт, а $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. a - старт. Тогда $b = a$, а $k = 1$.
2. a - не старт. Тогда, согласно определению 4, для факторизации числа $a = p_1^{a_1} * ... * p_k^{a_k}$ выполнено, что НОД$(p_1, ..., p_k) = g \neq 1$. Тогда в качестве b возьмём $\sqrt[g]{b}$, а $k = g$.

□

4. Доказательство основных утверждений

Утверждение 1. *(Об оптимальном ответе при ограничении на шаг равным 2).*

$$f_{D(2)}(E(n)) = [\tfrac{n+1}{2}].$$

Доказательство. Покажем, что оценка снизу из следствия 2 достижима.
Рассмотрим геометрические прогрессии вида $b_k = 2k-1$ и $q_k = 2$, где $1 \leqslant k \leqslant [\frac{n+1}{2}]$. Тогда в силу леммы 2 мы накроем всё множество $E(n)$ данным множеством геометрических прогрессий.
□

Утверждение 2. $[\frac{Q(n)}{2}] \leqslant f(E(n)) \leqslant [\frac{n+1}{2}]$.

Доказательство. Оценка сверху является следствием утверждения 1.
Оценка снизу следует из леммы 1. □

Утверждение 3. *(Об оптимальном ответе при $d = 2$ и запрете на пересечение).*

$$f_{ID(2)}(E(n)) = [\tfrac{n+1}{2}].$$

Доказательство. Докажем, что геометрические прогрессии, рассмотренные в утверждении 1, не пересекаются. Соглано лемме 2, любое число окажется ровно одной геометрической прогрессией, что и доказывает необходимое. □

Утверждение 4. $[\frac{Q(n)}{2}] \leqslant f_I(E(n)) \leqslant [\frac{n+1}{2}]$.

Доказательство. Оценка сверху является следствием утвеждения 3. Оценка снизу следует из леммы 1. □

Утверждение 5. *(Об оптимальном ответе при d=1).*

$$f_{D(1)}(E(n)) = \delta(n).$$

Доказательство. Покажем, что оценка снизу из следствия 3 достижима.
Пусть $k = \delta(n)$. Обозначим множество стартов из $E(n)$ как $\{s_1, s_2, .., s_k\}$. Тогда, согласно лемме 6, геометрические прогрессии вида $b_i = 1$, $q_i = s_i$, где $1 \leqslant i \leqslant k$, будут накрывать всё множество. □

Утверждение 6. *(О нижней оценке при $d = 3$).*

$$[\tfrac{n}{3}] - 1 \leqslant f_{D(3)}(E(n)).$$

Доказательство. Заметим, что геометрические прогрессии с ограничением на шаг равным 3 накрывают не более одного числа, которое взаимно просто с 2 и 3. Такие числа имеют вид $6k+1$ или $6k+5$. Несложно понять, что таких чисел не менее чем $[n/6]*2-1 = [n/3]-1$. □

5. Заключение

В результате выполнения данной работы были получены:

- точные оценки для случаев, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничениями вида $D(2)$, $D(2)I$ и $D(1)$;
- оценки снизу и сверху для случаев, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничениями вида λ и I;
- оценка снизу для случая, когда рассматривается начало натурального ряда с ограничением вида $D(3)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Санна, К. Накрытие арифметических прогрессий геометрическими и обратно // arXiv. 2013. URL: https://arxiv.org/pdf/1311.4331v1 (дата обращения: 23 июня 2024).

2. Эберхард, С. Накрытие множества геометрическими прогрессиями // MathOverflow. 2014 URL: https://mathoverflow.net/q/173075 (дата обращения: 23 июня 2024).

3. О'Брайан, К. Накрытие k-геометрическими прогрессиями // Сессии задач по комбинаторной и аддитивной теории чисел. 2014. с. 30. URL: https://arxiv.org/pdf/1406.3558v2 (дата обращения: 23 июня 2024).

4. Бухштаб, А. А. Теория чисел: Учебник для вузов // М.: Просвещение. 2013. С. 28, 38, 32.

REFERENCES

1. Sanna, C. 2013, "Covering an arithmetic progression with geometric progressions and vice versa", *ArXiv*, Available at: https://arxiv.org/pdf/1311.4331v1.

2. Eberhard, S. 2014, "Covering a set with geometric progressions", *MathOverflow*. Available at: https://mathoverflow.net/q/173075 (Accessed: 23 June 2024).

3. O'Bryant, K. 2014, "Covering by k-geometric progressions", *Combinatorial and additive number theory problem sessions*, pp. 30. Available at: https://arxiv.org/pdf/1406.3558v2.

4. Bukhshtab, A. A. 2013, "Number theory: Textbook for universities", *Moscow: Prosveshenie*, pp. 28, 38, 32.

Получено: 24.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024