ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 512.548

ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА n-АРНЫХ ГРУПП

А. М. Гальмак (Могилев), Н. А. Щучкин (Волгоград)

Аннотация

Определение n-арной группы получается из определения группы заменой ассоциативной и обратимой бинарной операции на ассоциативную и обратимую на каждом месте n-арную операцию.

В данной статье изучается связь между порождающими множествами n-арной группы и порождающими множествами группы, к которой приводима данная n-арная группа согласно теореме Поста-Глускина-Хоссу.

В первой части статьи описывается процесс, который позволяет, зная порождающее множество группы, к которой приводима данная n-арная группа в соответствии с указанной теоремой, находить порождающее множество самой n-арной группы. Доказано, что если группа $\langle A, \circ_a\rangle$, полученная с помощью элемента a из n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ по теореме Поста-Глускина-Хоссу, порождается множеством M, то n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$.

n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ называется производной от группы A, если

$$[a_1 a_2 \dots a_n] = a_1 a_2 \dots a_n$$

для любых $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Найдены условия, при выполнении которых порождающие множества группы и n-арной группы, производной от этой группы, совпадают. Доказано, что n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$ с единицей e и порождающим множеством M, также порождается множеством M, если

$$c_1 \circ c_2 \circ \dots \circ c_{m(n-1)+1} = e$$

для некоторых $c_1, c_2, \dots, c_{m(n-1)+1} \in M$, $m \geqslant 1$. Отсюда выводится следствие: n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$ конечного периода $m(n-1)+1 \geqslant 3$ с порождающим множеством M, также порождается множеством M. В частности, n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от циклической группы $\langle A, \circ\rangle$ порядка $m(n-1)+1 \geqslant 3$, является циклической и порождается тем же элементом, что и группа $\langle A, \circ\rangle$.

Приведены несколько примеров нахождения порождающих множеств для n-арных групп.

Во второй части статьи изучается обратная задача нахождения порождающих множеств бинарных групп, если известны порождающие множества n-арных групп, из которых данные бинарные группы получаются (согласно теореме Поста-Глускина-Хоссу). Доказано, что группа $\langle A, \circ_a \rangle$, полученная с помощью элемента a из n-арной группы $\langle A, [\ ] \rangle$ с порождающим множеством M, порождается множеством $M \cup \{d = [\underbrace{a \ldots a}_{n}]\}$, если для автоморфизма $\beta(x) = [ax\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}]$ группы $\langle A, \circ_a \rangle$ выполнено условие

$$M^\beta = \{[aM\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}]\} \subseteq M. \qquad (1)$$

Из этого имеем следствие: пусть n-арная группа $\langle A, [\ ] \rangle$ порождается множеством M, удовлетворяющим (1) для некоторого $a \in M$. Тогда:

1) группа $\langle A, \circ_a \rangle$ порождается множеством $(M \diagdown \{a\}) \cup \{d\}$;

2) если a – идемпотент в $\langle A, [\ ] \rangle$, то группа $\langle A, \circ_a \rangle$ порождается множеством $M \diagdown \{a\}$.

В конце работы описаны порождающие множества бинарных групп $\langle A, \circ_a \rangle$, найденные исходя из известных порождающих множеств n-арных групп $\langle A, [\ ] \rangle$ с непустым центром $Z(A)$.

Ключевые слова: n-арная группа, порождающие множества, автоморфизм.

GENERATING SETS OF THE N-ARY GROUPS

A. M. Gal'mak (Mogilev), N. A. Shchuchkin (Volgograd)

Abstract

Definition of n-ary group is obtained from the definition of group by replacement of associative and reversible binary operation on n-ary associative operation, uniquely reversible at each site.

In this paper we study the connection between the generating sets n-ary group and the generating sets the group to which reducible given n-ary group, according to Post - Gluskin - Hossu theorem.

In the first part of the article describes the process that allows knowing the generating set of the group to which this is reducible n-ary group in accordance with this theorem, find a generating set of the most n-ary group. We prove that if the group $\langle A, \circ_a \rangle$, obtained by an element a of n-ary group $\langle A, [\ ] \rangle$ in accordance with Post-Gluskin-Hossu theorem, generated by a set M, then n-ary group $\langle A, [\ ] \rangle$ generated by a set $M \cup \{a\}$.

n-Ary group $\langle A, [\ ] \rangle$ called derived of group A, if

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n$$

for any $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Found conditions under which generating sets the group and n-ary group, derived of this group, are identical. We prove that the

n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$, derived of group $\langle A, \circ\rangle$ with identity e and generating set M, is generated by a set M too, if

$$c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_{m(n-1)+1} = e$$

for some $c_1, c_2, \ldots, c_{m(n-1)+1} \in M$, $m \geqslant 1$. From this we deduce corollary: n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$, derived of group $\langle A, \circ\rangle$ finite period $m(n-1)+1 \geqslant 3$ with generating set M, is generated by a set M too. In specifically, n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$, derived of cyclic group $\langle A, \circ\rangle$ of order $m(n-1)+1 \geqslant 3$ is cyclic and is generated by the same element that group $\langle A, \circ\rangle$.

Are a few examples of finding generating sets for n-ary groups .

In the second part we study the inverse problem of finding generators sets of binary groups, if we know the generating sets of n-ary groups from which this binary groups are obtained (according to the Post-Gluskin-Hossu theorem). Proved that the group $\langle A, \circ_a\rangle$, obtained by an element a of n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$ with generating set M, generated by the set $M \cup \{d = [\underbrace{a \ldots a}_{n}]\}$, if the automorphism $\beta(x) = [ax\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}]$ of group $\langle A, \circ_a\rangle$ is satisfied

$$M^{\beta} = \{[aM\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}]\} \subseteq M. \qquad (2)$$

From this we have the corollary: let n-ary group $\langle A, [\,]\rangle$ generated by a set M, satisfying (2) for some $a \in M$. Then:

1) the group $\langle A, \circ_a\rangle$ generated by the set $(M \diagdown \{a\}) \cup \{d\}$;

2) if a – idempotent in $\langle A, [\,]\rangle$, then the group $\langle A, \circ_a\rangle$ generated by the set $M \diagdown \{a\}$.

At the end of the work described generating sets of binary groups $\langle A, \circ_a\rangle$, found from the known generating sets of n-ary groups $\langle A, [\,]\rangle$ with nonempty center $Z(A)$.

Keywords: n-ary group, generatjngs sets, automorphism.

1. Введение

Напомним некоторые понятия и результаты из теории n-арных групп, используемые в данной работе.

Первое определение n-арной группы, принадлежащее В. Дернте [1], получается из определения группы заменой ассоциативной и обратимой слева и справа бинарной операции на ассоциативную и обратимую на каждом месте n-арную операцию.

На практике иногда удобно пользоваться определениями n-арной группы, отличными от определения В. Дернте. Некоторые из таких определений собраны в следующей теореме.

Теорема 1. *Для универсальной алгебры $\langle A, [\,]\rangle$ с ассоциативной n-арной операцией $[\,]$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\langle A, [\,]\rangle$ — n-арная группа;

2) (E. Post [2], 1940) для любых $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ в A разрешимы уравнения

$$[xa_2 \ldots a_n] = b, \ [a_1 \ldots a_{n-1}y] = b;$$

3) (E. Post [2], 1940) для любых $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, где $n \geqslant 3$, в A разрешимо уравнение

$$[a_1 \ldots a_{i-1}xa_{i+1} \ldots a_n] = b;$$

4) (А.Н. Скиба, В,И. Тютин [3], 1985) для любых $a, b \in A$ в A разрешимы уравнения

$$[x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = b, \ [\underbrace{a \ldots a}_{n-1}y] = b;$$

5) (А.Н. Скиба, В,И. Тютин [3], 1985) для любых $a, b \in A$ и некоторого $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, где $n \geqslant 3$, в A разрешимо уравнение

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1}x\underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = b;$$

6) (А.М. Гальмак [4], [5], 1991) для любых $a, b \in A$ в A разрешимы уравнения

$$[x_1 \ldots x_{n-1}a] = b \ [ay_1 \ldots y_{n-1}] = b$$

с $n-1$ неизвестными;

7) (А.М. Гальмак [4], [5], 1991) для любых $a, b \in A$ в A разрешимо уравнение

$$[ax_1 \ldots x_{n-2}a] = b$$

с $n-2$ неизвестными, где $n \geqslant 3$.

Многочисленные другие определения n-арной группы других авторов имеются в [5].

Соглавно В. Дернте [1], элемент e n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется единицей, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$[\underbrace{e \ldots e}_{i-1}x\underbrace{e \ldots e}_{n-i}] = x.$$

Это определение обобщает на n-арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что $xe = ex = x$ для любого $x \in A$. В. Дернте определил еще один n-арный аналог единицы группы [1]. Элемент e n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется идемпотентом, если $[\underbrace{e \ldots e}_{n}] = e$. Ясно, что единица n-арной группы является идемпотентом.

Еще одним n-арным аналогом единицы группы является понятие нейтральной последовательности. Последовательность $e_1 \ldots e_{k(n-1)}$, где $k \geqslant 1$, элементов n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется нейтральной [2], если

$$[xe_1 \ldots e_{k(n-1)}] = [e_1 \ldots e_{k(n-1)}x] = x$$

для любого $x \in A$.

Элемент b n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется косым [1] для элемента $a \in A$, если

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} b \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = a$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначают $b = \bar{a}$. Очевидно $\bar{a}$ является решением уравнения

$$[\underbrace{a \ldots a}_{i-1} x \underbrace{a \ldots a}_{n-i}] = a$$

для фиксированного $i = 1, 2, \ldots, n$ и определяется однозначно. Кроме того, последовательность

$$\underbrace{a \ldots a}_{i-1} \bar{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-i-1}$$

является нейтральной для любого $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Понятно, что любой идемпотент n-арной группы совпадает со своим косым элементом.

Последовательность β элементов n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$ называется обратной [2] к последовательности α элементов из A, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными. Для любой последовательности α элементов n-арной группы существует обратная последовательность β. Причем, обратная последовательность, длина которой больше единицы, определяется неоднозначно.

n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ называется производной [1] от группы A, если

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n$$

для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. В. Дернте установил [1], что n-арная группа является производной от группы тогда и только тогда, когда она обладает единицей.

Зафиксируем в n-арной группе $\langle A, [\,]\rangle$ элемент a и обратную для него последовательность $a_1 \ldots a_{n-2}$. Определим на множестве A бинарную операцию

$$x \circ_a y = [x a_1 \ldots a_{n-2} y], \tag{3}$$

отображение

$$\beta(x) = [a x a_1 \ldots a_{n-2}] \tag{4}$$

и положим

$$d = [\underbrace{a \ldots a}_{n}]. \tag{5}$$

Легко проверяется, что $\langle A, \circ_a\rangle$ — группа с единицей a. Для любого $x \in A$ обратный элемент x^{-1} в группе $\langle A, \circ_a\rangle$ определяется равенством

$$x^{-1} = [a\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}a],$$

в частности, $d^{-1} = \bar{a}$.

При задании операции $\circ_a$ в качестве обратной последовательности $a_1 \ldots a_{n-2}$ можно взять любую из последовательностей

$$\underbrace{a\ldots a}_{i-1}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-i-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-2.$$

Если же a — идемпотент, в частности, единица n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, то в качестве обратной последовательности $a_1 \ldots a_{n-2}$ можно взять последовательность $\underbrace{a\ldots a}_{n-2}$. При этом (1) — (3) принимают вид

$$x \circ_a y = [x\underbrace{a\ldots a}_{n-2}y], \quad \beta(x) = [ax\underbrace{a\ldots a}_{n-2}], \quad d = a.$$

n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ называется полуциклической [6], если группа $\langle A, \circ_a\rangle$ является циклической.

Если $\langle A, [\ ]\rangle$ – n-арная группа, $M \subseteq A$, то пересечение всех n-арных подгрупп из $\langle A, [\ ]\rangle$, содержащих множество M, называют n-арной подгруппой, порожденной множеством M и обозначают $\langle\langle M\rangle, [\,]\rangle$.

Теорема 2. *[6] Если $\langle A, [\,]\rangle$ – n-арная группа ($n \geqslant 3$), $M \subseteq A$, $M \neq \emptyset$, то*

$$\langle M\rangle = \{[a_1 \ldots a_{k(n-1)+1}] \mid a_i \in M \cup \overline{M}, k = 0, 1, \ldots\},$$

где $\overline{M} = \{\bar{a} \mid a \in M\}$.

Согласно Э. Посту [2], группа G называют обертывающей для n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$, если множество A порождает G, а n-арная операция $[\ ]$ связана с бинарной операцией в группе G равенством

$$[a_1a_2 \ldots a_n] = a_1a_2 \ldots a_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in A.$$

Последнее равенство означает, что n-арная операция $[\,]$ совпадает на множестве A с n-арной операцией, производной от операции в группе G. Подмножество

$$A_0 = \{a_1a_2 \ldots a_{n-1} \mid a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A\}$$

является нормальной подгруппой в G [2] и называется соответствующей группой для n-арной группы $\langle A, [\,]\rangle$.

Ниже будем использовать прямую и обратную теоремы Поста-Глускина-Хоссу.

Теорема 3. *(Э. Пост [2], Л.М. Глускин [7], M. Hosszu [8]) На всякой n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$ можно определить бинарную операцию $\circ$, отображение β, а также выбрать элемент $d \in A$ такой, что $\langle A, \circ\rangle$ – группа, β – ее автоморфизм и выполняются следующие условия*

$$[x_1x_2\ldots x_n] = x_1 \circ x_2^{\beta} \circ \ldots \circ x_n^{\beta^{n-1}} \circ d, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n \in A \tag{6}$$

$$d^{\beta} = d \tag{7}$$

$$x^{\beta^{n-1}} = d \circ x \circ d^{-1}, \quad x \in A. \tag{8}$$

Вместо операции $\circ$, отображения β и элемента d можно взять операцию (3), отображение (4) и элемент (5), зафиксировав в качестве обратной последовательности $a_1\ldots a_{n-2}$ последовательность $\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}$.

Теорема 4. *(Э. Пост [2], Л.М. Глускин [7], M. Hosszu [8]) Если элемент d группы $\langle A, \circ\rangle$ и ее автоморфизм β удовлетворяют условиям (7) и (8), то $\langle A, [\ ]\rangle$ – n-арная группа с n-арной операцией (6).*

2. Порождающие множества n-арной группы

Теорема 5. *Пусть $\langle A, [\ ]\rangle$ – n-арная группа, $a \in A$. Если группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством M, то n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$.*

Доказательство. Если b – произвольный элемент из A, то

$$b = a_1 \circ_a a_2 \circ_a \ldots \circ_a a_k = [a_1\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}a_2\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}\ldots\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}a_k],$$

где $a_i \in M \cup M^{-1}, i = 1, 2, \ldots, k$. Так как в группе $\langle A, \circ_a\rangle$ обратный элемент x^{-1} для элемента $x \in A$ имеет вид

$$x^{-1} = [a\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}a],$$

то b совпадает с результатом применения n-арной операции $[\ ]$ к элементам из множества

$$(M \cup \{a\}) \cup (\overline{M} \cup \{\bar{a}\}).$$

Согласно теореме 2 это означает, что b принадлежит n-арной подгруппе, порожденной множеством $M \cup \{a\}$. А так как элемент b выбран в A произвольно, то n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$. Теорема доказана. $\square$

Если $\langle A, \circ\rangle$ – группа, β – ее автоморфизм, $d \in A$ и выполнены равенства

$$d^{\beta} = d, \quad x^{\beta^{n-1}} = d \circ x \circ d^{-1}$$

для любого $x \in A$, то, согласно теореме 4, $\langle A, [\ ]_{\circ,\beta,d}\rangle$ – n-арная группа с n-арной операцией

$$[a_1 a_2 \ldots a_n]_{\circ,\beta,d} = a_1 \circ a_2^{\beta} \circ \ldots \circ a_n^{\beta^{n-1}} \circ d.$$

Легко проверяется, что операция $\circ$ совпадает с операцией $\circ_e$, где e – единица группы $\langle A, \circ\rangle$. Поэтому из теоремы 5 вытекают

Следствие 1. *Пусть группа $\langle A, \circ\rangle$ с единицей e порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]_{\circ,\beta,d}\rangle$ порождается множеством $M \cup \{e\}$.*

Следствие 2. *Пусть группа $\langle A, \circ\rangle$ с единицей e порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, порождается множеством $M \cup \{e\}$.*

Замечание 1. *Известно [6], что если в n-арной группе $\langle A, [\ ]\rangle$ зафиксировать элемент a, то соответствующую группу A_0 можно представить в виде*

$$A_0 = \{\theta_A(u \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) \mid u \in A\},$$

где θ_A – отношение эквивалентности Поста. Легко проверяется, что

$$\theta_A^{-1}(u \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) = \theta_A([\bar{a}\bar{u} \underbrace{u \ldots u}_{n-3} \bar{a}] \underbrace{a \ldots a}_{n-2}).$$

Теорема 6. *Пусть $\langle A, [\ ]\rangle$ – n-арная группа, $a \in A$, $M \subseteq A$. Если соответствующая группа A_0 порождается множеством $\{\theta_A(u \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) \mid u \in M\}$, то n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$.*

Доказательство. Если b – любой элемент из A, то элемент $\theta_A(b \underbrace{a \ldots a}_{n-2})$ из A_0 может быть представлен в виде

$$\theta_A(b \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) = \theta_A(a_1 \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) \ldots \theta_A(a_k \underbrace{a \ldots a}_{n-2}),$$

где $a_i \in M \cup \{[\bar{a}\bar{u} \underbrace{u \ldots u}_{n-3} \bar{a}] \mid u \in M\}, i = 1, \ldots, k$, в силу замечания 1. Тогда из

$$\theta_A(b \underbrace{a \ldots a}_{n-2})\theta_A(\bar{a}) = \theta_A(a_1 \underbrace{a \ldots a}_{n-2}) \ldots \theta_A(a_k \underbrace{a \ldots a}_{n-2})\theta_A(\bar{a})$$

следует

$$\theta_A([b \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \bar{a}]) = \theta_A([a_1 \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \ldots a_k \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \bar{a}]),$$

т.е. $b = [a_1 \underbrace{a \ldots a}_{n-2} \ldots a_{k-1} \underbrace{a \ldots a}_{n-2} a_k]$. Таким образом, b совпадает с результатом применения n-арной операции [ ] к элементам из множества $(M \cup \{a\}) \cup (\overline{M} \cup \{\bar{a}\})$. Согласно теореме 2 это означает, что n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{a\}$. Теорема доказана. □

Пример 2. *Известно, что знакопеременная группа A_m является соответствующей для тернарной группы $\langle T_m, [\,]\rangle$ всех нечетных подстановок степени m ([9], пример 4.11). Так как A_3 – циклическая группа, а при $m \geqslant 4$ группа A_m порождается двумя элементами, то, по теореме 6, тернарная группа $\langle T_3, [\,]\rangle$ порождается двумя элементами, а при $m \geqslant 4$ тернарная группа $\langle T_m, [\,]\rangle$ порождается тремя элементами.*

Из теорем 5 и 6 вытекает

Следствие 3. *n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ является конечно порожденной, если группа $\langle A, \circ_a\rangle$ (группа A_0) конечно порождена.*

Следующий пример показывает, что n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ может порождаться множеством, отличным от $M \cup \{a\}$, и даже не имеющим с ним общих элементов, где M – порождающее множество группы $\langle A, \circ_a\rangle$.

Пример 3. *Определим на циклической группе $A = \langle b\rangle$ порядка $n-1 \geqslant 3$ n-арную операцию*

$$[b^{s_1} \ldots b^{s_n}] = b^{s_1+\ldots+s_n+1}.$$

Согласно лемме 2.5.25 [6] либо следствию 3 [10], $\langle A, [\,]\rangle$ – n-арная группа, в которой нет собственных, в том числе и одноэлементных, n-арных подгрупп. Следовательно, $\langle A, [\,]\rangle$ – циклическая n-арная группа, которая порождается любым своим элементом. Так как $\langle A, [\,]\rangle$ – циклическая n-арная группа, то группа $\langle A, \circ_a\rangle$ также будет циклической. Если $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается элементом c, то, учитывая $|A| \geqslant 3$, элемент d, порождающий $\langle A, [\,]\rangle$, можно выбрать отличным от c и a.

Так как в рассмотренном примере 3 элемент c, порождающий группу $\langle A, \circ_a\rangle$, порождает также и n-арную группу $\langle A, [\,]\rangle$, то из этого примера следует, что n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ может порождаться и множеством M – порождающим группу $\langle A, \circ_a\rangle$. Об этом свидетельствует также и следующее

Предложение 1. *Пусть $\langle A, \circ\rangle$ – группа с единицей e и порождающим множеством M. Если $a^n = e$ для некоторых a из M, $n \geqslant 3$, то n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, порождается множеством M.*

Доказательство. n-Арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, совпадает с $\langle A, [\,]_{\circ,\varepsilon,e}\rangle$, где ε – тождественный автоморфизм. Тогда по следствию 2 $\langle A, [\,]\rangle$ порождается множеством $M \cup \{e\}$. А так как

$$e = a^n = [\underbrace{a \ldots a}_{n}], \quad a \in M,$$

то, ввиду теоремы 2, $\langle A, [\,]\rangle$ порождается множеством M. Предложение доказано.

Следствие 4. *Пусть группа $\langle A, \circ\rangle$ конечного периода $n \geqslant 3$ порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.*

Следствие 5. *Пусть конечная группа $\langle A, \circ\rangle$ порядка $|A| = n \geqslant 3$ порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.*

Предложение 1 обобщается следующим образом

Теорема 7. *Пусть $\langle A, \circ\rangle$ – группа с единицей e и порождающим множеством M. Если*

$$c_1 \circ c_2 \circ \ldots \circ c_{m(n-1)+1} = e$$

для некоторых $c_1, c_2, \ldots, c_{m(n-1)+1} \in M$, $m \geqslant 1$, то n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.

Доказательство. Так как группа $\langle A, \circ\rangle$ порождается множеством M, то

$$b = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k = [a_1 \underbrace{e \ldots e}_{n-2} a_2 \underbrace{e \ldots e}_{n-2} \ldots \underbrace{e \ldots e}_{n-2} a_k] =$$

$$= [a_1 \underbrace{[c_1 \ldots c_{m(n-1)+1}] \ldots [c_1 \ldots c_{m(n-1)+1}]}_{n-2} a_2 \underbrace{[c_1 \ldots c_{m(n-1)+1}] \ldots [c_1 2 \ldots c_{m(n-1)+1}]}_{n-2} \ldots$$

$$\ldots \underbrace{[c_1 \ldots c_{m(n-1)+1}] \ldots [c_1 \ldots c_{m(n-1)+1}]}_{n-2} a_k]$$

для любого $b \in A$, где, ввиду равенства $c^{-1} = [e\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3} e]$,

$$a_i \in M \cup M^{-1} = M \cup \{[e\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3} e] \mid c \in M\} =$$

$$= M \cup \{[[c_1 c_2 \ldots c_{m(n-1)+1}]\bar{c}\underbrace{c \ldots c}_{n-3}[c_1 c_2 \ldots c_{m(n-1)+1}]] \mid c \in M\}.$$

Таким образом, b совпадает с результатом применения n-арной операции $[\,]$ к элементам из множества $M \cup \overline{M}$. Ввиду теоремы 2, это означает, что n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$ порождается множеством M. Теорема доказана. $\square$

Следствие 6. *Пусть $\langle A, \circ\rangle$ – группа с единицей e и порождающим множеством M. Если $c^{m(n-1)+1} = e$ для некоторого $c \in M$, $m \geqslant 1$, то n-арная группа $\langle A, [\,]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.*

Предложение 1 получается из следствия 6, если в последнем положить $m = 1$, $n \geqslant 3$.

Следствие 7. *Пусть группа $\langle A, \circ\rangle$ конечного периода $m(n-1)+1 \geqslant 3$ порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.*

Следствие 4 получается из следствия 6 или из следствия 7 при $m = 1$, $n \geqslant 3$.

Следствие 8. *Пусть конечная группа $\langle A, \circ\rangle$ порядка*

$$|A| = m(n-1)+1 \geqslant 3$$

порождается множеством M. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается множеством M.

Следствие 5 получается из следствия 6 или из следствия 8 при $m = 1$, $n \geqslant 3$.

Следствие 9. *n-Арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от циклической группы $\langle A, \circ\rangle$ порядка $m(n-1)+1 \geqslant 3$, является циклической и порождается тем же элементом, что и группа $\langle A, \circ\rangle$. В частности, таковой будет n-арная группа, производная от циклической группы порядка n.*

Пример 4. *Проиллюстрируем следствие* 9 на примере. Так как

$$7 = 1(7-1)+1 = 2(4-1)+1 = 3(3-1)+1,$$

то полиадические группы арностей 3, 4 и 7, производные от циклической группы

$$Z_7 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$$

порядка 7 с единицей e и порождающим элементом a, будут циклическими, порождаемыми тем же элементом a, что и группа Z_7.

Для наглядности установим соответствие между полиадическими степенями тернарной группы $\langle Z_7, [\ ]\rangle$ и степенями группы Z_7:

$$a^{[0]} = a, a^{[1]} = a^3, a^{[2]} = a^5, a^{[3]} = e, a^{[4]} = a^2, a^{[5]} = a^4, a^{[6]} = a^6.$$

Аналогично получаются соответствия между полиадическими степенями 4-арной группы $\langle Z_7, [\ ]\rangle$ и степенями группы Z_7:

$$a^{[0]} = a, a^{[1]} = a^4, a^{[2]} = e, a^{[3]} = a^3, a^{[4]} = a^6, a^{[5]} = a^2, a^{[6]} = a^5,$$

и между полиадическими степенями 7-арной группы $\langle Z_7, [\ ]\rangle$ и степенями группы Z_7:

$$a^{[0]} = a, a^{[1]} = e, a^{[2]} = a^6, a^{[3]} = a^5, a^{[4]} = a^4, a^{[5]} = a^3, a^{[6]} = a^2.$$

Предложение 2. *Полуциклическая n-арная группа порождается двумя элементами.*

Доказательство. Если $\langle A, [\ ]\rangle$ – полуциклическая n-арная группа, то $\langle A, \circ_a\rangle$ – циклическая группа для любого $a \in A$, порождаемая некоторым элементом b, отличным от единицы a группы $\langle A, \circ_a\rangle$. Тогда по теореме 5 n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством $\{a, b\}$. Предложение доказано. □

Аналогичный факт был доказан для абелевых полуциклических n-арных групп в [11] следствия 1 и 2.

В связи с предложением 2 возникает вопрос: будет ли всякая 2-порожденная n-арная группа полуциклической, то есть верно ли обращение предложения 2? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующее

Предложение 3. *Пусть не циклическая группа $\langle A, \circ\rangle$ с единицей e порождается двумя элементами и пусть $a^n = e$, где a – один из порождающих элементов. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается двумя элементами, но не является полуциклической.*

Доказательство. По предложению 1 n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается двумя элементами. Предположение о полуцикличности n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$ влечет за собой цикличность группы $\langle A, \circ_e\rangle = \langle A, \circ\rangle$, что противоречит условию предложения. Следовательно, n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ не является полуциклической. Предложение доказано. □

Следствие 10. *Пусть не циклическая группа $\langle A, \circ\rangle$ конечного периода $n \geqslant 3$ порождается двумя элементами. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается двумя элементами, но не является полуциклической.*

Следствие 11. *Пусть конечная не циклическая группа $\langle A, \circ\rangle$ порядка $n \geqslant 3$ порождается двумя элементами. Тогда n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$, производная от группы $\langle A, \circ\rangle$, также порождается двумя элементами, но не является полуциклической.*

Так как в тернарной группе отражений $\langle B_n, [\ ]\rangle$ правильного n-угольника [3] все элементы являются идемпотентами, то она не является циклической, а так как ее соответствующая группа является циклической порядка n, то она является полуциклической. Поэтому из предложения 2 вытекает

Следствие 12. *Тернарная группа отражений $\langle B_n, [\ ]\rangle$ правильного n-угольника порождается двумя элементами.*

Замечание 2. *Так как*

$$B_n = \{b, bc, \ldots, bc^{n-1}\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

и $bc^i = c^{n-i}b$ *[9], то, учитывая нейтральность последовательности* bb, *получим*

$$[b_2 \underbrace{b_1 b_2 \ldots b_1 b_2}_{j}] = [bc \underbrace{bbc \ldots bbc}_{j}] = bc^{j+1} = b_{j+2},\ j = 1, \ldots, n-2.$$

Таким образом, все элементы $b_3, \ldots, b_n$ *с помощью тернарной операции* [ ] *выражаются через элементы* b_1 *и* b_2. *Следовательно, в качестве порождающих элементов тернарной группы* $\langle B_n, [\ ]\rangle$ *можно выбрать элементы* b *и* bc.

Приведем несколько примеров нахождения порождающих множеств для n-арных групп.

Пример 5. *Так как диэдральная группа* D_n *определяется соотношениями [12]*

$$s^n = r^2 = (sr)^2 = e,$$

то, применив к соотношению $s^n = e$ *следствие* 6 при $m = 1$, видим, что n-арная группа, производная от группы D_n, порождается теми же элементами s и r, что и группа D_n.

Аналогично полагая в соотношении $(sr)^2 = e$

$$c_1 = s, c_2 = r, c_3 = s, c_4 = r$$

и применяя теорему 7 при $m = 1$, видим, что 4-арная группа, производная от группы D_n, так же порождается элементами s и r.

Так как из соотношения $r^2 = e$ вытекает соотношение $r^l = e$ для любого четного l, то по следствию 6 полиадическая группа любой четной арности, производная от группы D_n, так же порождается элементами s и r.

Заметим, что для арности $2n$ последний факт вытекает и из следствия 5.

Пример 6. *Так как среди соотношений, определяющих симметрическую группу* S_n *[12], имеются соотношения*

$$r^n = (rr_1)^{n-1} = (r_1 r^{-1} r_1 r)^3 = e,$$

где $r = (123\ldots n)$, $r_1 = (12)$ *– порождающие элементы группы* S_n, *то по теореме 7 полиадические группы арностей* n, $2(n-1)$ *и* 12, *производные от группы* S_n, *порождаются элементами* r *и* r_1.

Если в качестве порождающих группы S_n *взять элементы*

$$r_1 = (12), r_2 = (23), \ldots, r_{n-1} = (n-1n),$$

то среди соотношений , определяющих S_n *[12], имеются соотношения*

$$(r_i r_{i+1})^2 = e,\ 1 \leqslant i \leqslant n-2.$$

Поэтому по теореме 7 4*-арная группа, производная от группы* S_n, *порождается элементами* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$.

Если в качестве порождающих группы S_n *взять элементы*

$$s_1 = (1n), s_2 = (2n), \ldots, s_{n-1} = (n-1n)$$

и положить $s_n = s_1$, *то среди соотношений , определяющих* S_n *[12], имеются соотношения*

$$(s_i s_{i+1})^3 = (s_i s_{i+1} s_i s_j)^2 = e;\ j = 1, 2, \ldots, n-1,\ j \neq i, i+1.$$

Поэтому по теореме 7 6*-арная и* 8*-арная группы , производные от группы* S_n, *порождаются элементами* $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Ввиду следствия 5, $n!$-арная группа, производная от S_n, порождается любым из выше указанных наборов элементов.

Пример 7. *Знакопеременная группа* A_n *порождается элементами*

$$t_i = (12)(i+1i+2),\ i = 1, 2, \ldots, n-2$$

и среди соотношений, определяющих A_n *[12], имеются соотношения*

$$t_1^3 = (t_{j-1} t_j)^3 = e,\ 1 \leqslant j \leqslant n-2,$$

$$(t_i t_j)^2 = e,\ 1 \leqslant i < j-1,\ j \leqslant n-2.$$

Поэтому по теореме 7 полиадические группы арностей 3, 4 *и* 6, *производные от группы* A_n, *порождаются множеством* $\{t_1, t_2, \ldots\ \ldots, t_{n-2}\}$.

Если в качестве порождающих группы A_n *взять элементы*

$$\nu_i = (in-1n),\ i = 1, 2, \ldots, n-2,$$

то среди соотношений , определяющих A_n *[12], имеются соотношения*

$$\nu_1^3 = \ldots = \nu_{n-2}^3 = (\nu_i \nu_j)^2 = e;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n-2.$$

Поэтому по теореме 7 тернарная и 4*-арная группы, производные от группы* A_n, *порождаются множеством* $\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-2}\}$.

При нечетном $n \geqslant 4$ *группа* A_n *порождается элементами*

$$u = (34 \ldots n),\ v = (123),$$

а при четном $n \geqslant 4$ *— элементами*

$$w = (12)(34 \ldots n),\ v = (123),$$

причем имеются соответствующие соотношения

$$u^{n-2} = v^3 = (uv)^n = e,$$

$$w^{n-2} = v^3 = (wv)^{n-1} = e.$$

Поэтому по теореме 7 при нечетном $n \geqslant 4$ *полиадические группы арностей* 3, $n-2$ *и* $2n$, *производные от группы* A_n, *порождаются элементами* u *и* v, *а при четном* $n \geqslant 4$ *полиадические группы арностей* 3, $n-2$ *и* $2(n-1)$, *производные от группы* A_n, *порождаются элементами* w *и* v.

Ввиду следствия 5, $(n!/2)$-арная группа, производная от A_n, порождается любым из указанных выше порождающих множеств.

Пример 8. *Унимодулярная группа* M_2 *всех целочисленных матриц второго порядка с определителем* ± 1 *порождается элементами*

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и среди соотношений, определяющих M_2 *[12], имеются соотношения*

$$R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = e,$$

тогда по следствию 6 полиадическая группа любой четной арности, производная от группы M_2, порождается элементами R_1, R_2, и R_3.

Замечание 3. *В приведенных примерах для конкретных* n *могут существовать полиадические группы, производные от соответствующих бинарных групп, арность которых отлична от указанных арностей в примерах. Например, в примере 6 для конкретных* n *могут существовать полиадические группы, производные от группы* S_n, *порождаемые* r *и* r_1, *арность которых отлична от* $n, 2(n-1), 4, 8$.

Для $n = 17$ *имеем*

$$17 = 1(17-1)+1 = 2(9-1)+1 = 4(5-1)+1 = 8(3-1)+1.$$

Поэтому по следствию 6 полиадические группы арностей $3, 5, 9$ и 17, производные от группы S_{17}, порождаются элементами r и r_1.

3. Порождающие множества группы $\langle A, \circ_a \rangle$

Предложение 4. *Если* n*-арная группа* $\langle A, [\ ] \rangle$, *производная от группы* $\langle A, \circ \rangle$, *порождается множеством* M, *то группа* $\langle A, \circ \rangle$ *также порождается множеством* M.

Доказательство. Так как n-арная группа $\langle A, [\ ] \rangle$ порождается множеством M, то

$$b = [a_1 a_2 \ldots a_{m(n-1)+1}] = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_{m(n-1)+1}$$

для любого $b \in A$, где $a_i \in M \cup \overline{M}$. Если $a_i \in \overline{M}$, то есть $a_i = \bar{c}$ для некоторого $c \in M$, то из

$$[\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-1}] = \bar{c} \circ \underbrace{c \circ \ldots \circ c}_{n-2} \circ c = c$$

получаем $\bar{c} = \underbrace{c^{-1} \circ \ldots \circ c^{-1}}_{n-2}$. Таким образом, b совпадает с результатом применения операции $\circ$ к элементам из множества $M \cup M^{-1}$. Это означает, что группа $\langle A, \circ\rangle$ порождается множеством M. Предложение доказано. $\square$

Предложение 4 можно обобщить, доказав предварительно лемму.

Лемма 1. *Пусть $\langle A, [\ ]\rangle$ – n-арная группа, $a, c \in A$,*

$$\beta = [ax\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}],\ d = [\underbrace{a\ldots a}_{n}]$$

– автоморфизм и элемент из теоремы Поста-Глускина-Хоссу. Тогда

1) $d^{-1} = \bar{a}$;

2) $\overline{c^{\beta}} = [a\bar{c}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]$;

3) $(c^{\beta})^{-1} = (c^{-1})^{\beta} = [aa\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}]$;

4) $(c^{\beta^k})^{-1} = (c^{-1})^{\beta^k}$;

5) $\bar{c} = d^{-1} \circ_a (c^{\beta^{n-2}})^{-1} \circ_a \ldots \circ_a (c^{\beta})^{-1} = d^{-1} \circ_a (c^{-1})^{\beta^{n-2}} \circ_a \ldots \circ_a (c^{-1})^{\beta}$.

Доказательство. 1) Как отмечалось во введении, равенство $d^{-1} = \bar{a}$ следует из равенства $d^{-1} = [a\bar{d}\underbrace{d\ldots d}_{n-3}a]$.

2) Так как

$$[[a\bar{c}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\underbrace{c^{\beta}\ldots c^{\beta}}_{n-1}] = [[a\bar{c}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\underbrace{[ac\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\ldots[ac\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]}_{n-1}] =$$

$$= [a\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-1}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] = [ac\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] = c^{\beta},$$

то верно второе равенство.

3) Так как

$$(c^{\beta})^{-1} = [a\overline{c^{\beta}}\underbrace{c^{\beta}\ldots c^{\beta}}_{n-3}a] =$$

$$= [a[a\bar{c}\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\underbrace{[ac\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\ldots[ac\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]}_{n-3}a] = [aa\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}],$$

$$(c^{-1})^{\beta} = [a[a\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}a]\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}] = [aa\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-3}],$$

то верно третье равенство.

4) Так как

$$(c^{\beta^k})^{-1} = ((c^{\beta^{k-1}})^{\beta})^{-1} = ((c^{\beta^{k-1}})^{-1})^{\beta} = (((c^{\beta^{k-2}})^{\beta})^{-1})^{\beta} =$$

$$= (((c^{\beta^{k-2}})^{-1})^{\beta})^{\beta} = ((c^{\beta^{k-2}})^{-1})^{\beta^2} = \ldots = (c^{-1})^{\beta^k},$$

то верно четвертое равенство.

5) Так как $[\bar{c}\underbrace{c\ldots c}_{n-1}] = c$, то, применяя теорему Поста-Глускина-Хоссу и 4), получаем

$$\bar{c} \circ_a c^{\beta} \circ_a \ldots \circ_a c^{\beta^{n-2}} \circ_a d \circ_a c = c,$$

откуда $\bar{c} = (c^{\beta} \circ_a \ldots \circ_a c^{\beta^{n-2}} \circ_a d)^{-1} = d^{-1} \circ_a (c^{\beta^{n-2}})^{-1} \circ_a \ldots \circ_a (c^{\beta})^{-1} =$

$$= d^{-1} \circ_a (c^{-1})^{\beta^{n-2}} \circ_a \ldots \circ_a (c^{-1})^{\beta}.$$

Таким образом, верно пятое равенство. Лемма доказана. □

Теорема 8. *Пусть n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством M, β – тот же автоморфизм, что и в лемме 1,*

$$M^{\beta} = \{[aM\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]\} \subseteq M \tag{9}$$

для некоторого $a \in A$. Тогда группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством

$$M \cup \{d = [\underbrace{a\ldots a}_{n}]\}.$$

Доказательство. Если b – произвольный элемент из A, то по теореме 2

$$b = [a_1a_2\ldots a_{m(n-1)+1}],$$

где $a_i \in M \cup \overline{M}$. Тогда по теореме Поста-Глускина-Хоссу

$$b = a_1 \circ_a a_2^{\beta} \circ_a \ldots \circ_a a_n^{\beta^{n-1}} \circ_a d \circ_a a_{n+1}^{\beta} \circ_a \ldots \circ_a a_{2(n-1)+1}^{\beta^{n-1}} \circ_a d \circ_a \ldots$$

$$\ldots \circ_a a_{(m-1)(n-1)+2}^{\beta} \circ_a \ldots \circ_a a_{m(n-1)+1}^{\beta^{n-1}} \circ_a d. \tag{10}$$

Если $a_i \in M$, то ввиду (9), $a_i^{\beta^k} \in M^{\beta^k} \subseteq M$. Если же $a_i \in \overline{M}$, то есть $a_i = \bar{c}_i$ для некоторого $c_i \in M$, то ввиду 5) леммы 1,

$$\bar{c}_i = d^{-1} \circ_a (c_i^{\beta^{n-2}})^{-1} \circ_a \ldots \circ_a (c_i^{\beta})^{-1},$$

откуда, с учетом (9), следует

$$\bar{c}_i \in d^{-1} \circ_a \underbrace{M^{-1} \circ_a \ldots \circ_a M^{-1}}_{n-2}.$$

Тогда, учитывая 4) леммы 1, а также то, что β – автоморфизм группы $\langle A, \circ_a\rangle$ и $d^\beta = d$, получаем

$$a_i^{\beta^k} = \bar{c}_i^{\beta^k} \in (d^{-1} \circ_a \underbrace{M^{-1} \circ_a \ldots \circ_a M^{-1}}_{n-2})^{\beta^k} =$$

$$= (d^{-1})^{\beta^k} \circ_a \underbrace{(M^{-1})^{\beta^k} \circ_a \ldots \circ_a (M^{-1})^{\beta^k}}_{n-2} =$$

$$= (d^{\beta^k})^{-1} \circ_a \underbrace{(M^{\beta^k})^{-1} \circ_a \ldots \circ_a (M^{\beta^k})^{-1}}_{n-2} \subseteq d^{-1} \circ_a \underbrace{M^{-1} \circ_a \ldots \circ_a M^{-1}}_{n-2}.$$

Таким образом, установлено, что в (10) либо $a_i^{\beta^k} \in M$, либо

$$a_i^{\beta^k} \in d^{-1} \circ_a \underbrace{M^{-1} \circ_a \ldots \circ_a M^{-1}}_{n-2}.$$

Это означает, что b совпадает с результатом применения операции $\circ_a$ к элементам из множества $(M \cup \{d\}) \cup (M^{-1} \cup \{d\})$. Следовательно, группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством $M \cup \{d = [\underbrace{a \ldots a}_{n}]\}$. Теорема доказана. □

Если a – идемпотент n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$, то $d = a$. Так как a – единица группы $\langle A, \circ_a\rangle$, то из теоремы 8 вытекает

Следствие 13. *Пусть n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством M, удовлетворяющим (9) для некоторого идемпотента $a \in A$. Тогда группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством M.*

Следствие 14. *Пусть n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается множеством M, удовлетворяющим (9) для некоторого $a \in M$. Тогда:*

1) группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством $(M \diagdown \{a\}) \cup \{d\}$;

2) если a – идемпотент в $\langle A, [\ ]\rangle$, то группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством $M \diagdown \{a\}$.

Согласно предложению 3, существуют 2-порожденные n-арные группы, не являющиеся полуциклическими. Однако имеет место

Предложение 5. *Если n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ порождается двумя элементами a и b, причем a – идемпотент, $[ab\underbrace{a \ldots a}_{n-2}] = b$, то $\langle A, [\ ]\rangle$ – полуциклическая.*

Доказательство. Так как a – идемпотент, то $\bar{a} = a$. Поэтому

$$[ab\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}] = [ab\underbrace{a \ldots a}_{n-2}] = b, \quad [aa\bar{a}\underbrace{a \ldots a}_{n-3}] = a,$$

то есть множество $M = \{a, b\}$, порождающее $\langle A, [\ ]\rangle$, удовлетворяет (9). Применяя 2) следствия 14, заключаем, что группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается элементом b, то есть является циклической, откуда следует полуцикличность n-арной группы $\langle A, [\ ]\rangle$. Предложение доказано. □

Замечание 4. *Условие* $[ab\underbrace{a\ldots a}_{n-2}]=b$ *из предложения 5 является необходимым для полуцикличности* n*-арной группы* $\langle A,[\ ]\rangle$*, но не является достаточным. Например, в тернарной группе* $\langle B_n,[\ ]\rangle$*, которая является полуциклической и порождается элементами* $b_1=b$ *и* $b_2=bc$*, отмеченное условие из предложения 5 не выполняется, так как*

$$[b_1b_2b_1]=[bbcb]=cb=bc^2\neq b_2,$$

$$b_2b_1b_2]=[bcbbc]=bc^2\neq b_1.$$

Если n*-арная группа* $\langle A,[\ ]\rangle$ *является производной от группы*

$$\langle A,\circ\rangle=\langle A,\circ_e\rangle,$$

то единица e *группы* $\langle A,\circ\rangle$ *является единицей и в* $\langle A,[\ ]\rangle$*. Поэтому выполняется условие (9), откуда и из следствия* 14 вытекает предложение 4.

Из следствия 13 и 2) следствия 14 вытекает

Следствие 15. *Если* n*-арная группа* $\langle A,[\ ]\rangle$*, производная от группы* $\langle A,\circ\rangle$*, порождается множеством* M*, содержащим единицу* e *группы* $\langle A,\circ\rangle$*, то группа* $\langle A,\circ\rangle$ *порождается множеством* $M\diagdown\{e\}$*.*

Теорема 9. *Пусть* n*-арная группа* $\langle A,[\ ]\rangle$ *с непустым центром* $Z(A)$ *порождается множеством* M*,* $a\in Z(A)$*,* $c\in A$*. Тогда*

1) группа $\langle A,\circ_a\rangle$ *порождается множеством* $M\cup\{d=[\underbrace{a\ldots a}_{n}]\}$*;*

2) группа $\langle A,\circ_c\rangle$ *порождается одним из двух указанных ниже множеств*

$$[c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}M]\cup\{[c\underbrace{a\ldots a}_{n-1}]\},$$

$$[M\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}c]\cup\{[\underbrace{a\ldots a}_{n-1}c]\}.$$

Доказательство. 1) Так как $a\in Z(A)$, то

$$[aM\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]=[Ma\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}]=M,$$

то есть выполняется условие (9). По теореме 8 группа $\langle A,\circ_a\rangle$ порождается множеством $M\cup\{d=[\underbrace{a\ldots a}_{n}]\}$.

2) По следствию 2.2.15 из [2] отображения

$$x\to[c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}x],\quad x\to[x\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}c]$$

являются изоморфизмами группы $\langle A, \circ_a\rangle$ на группу $\langle A, \circ_c\rangle$. Поэтому группа $\langle A, \circ_c\rangle$ порождается множеством

$$[c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}M] \cup \{[c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}[\underbrace{a\ldots a}_{n}]]\} = [c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}M] \cup \{[c\underbrace{a\ldots a}_{n-1}]\}.$$

Для второго множества проверка осуществляется аналогично. Теорема доказана. $\Box$

Из теоремы 9 и следствия 13 вытекает

Следствие 16. *Пусть n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ с непустым центром $Z(A)$, содержащим идемпотент a, порождается множеством M, $c \in A$. Тогда*

1) группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством M;

2) группа $\langle A, \circ_c\rangle$ порождается любым из двух указанных ниже множеств

$$[c\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}M], \quad [M\bar{a}\underbrace{a\ldots a}_{n-3}c].$$

Из теоремы 9 и следствия 14 вытекает

Следствие 17. *Пусть n-арная группа $\langle A, [\ ]\rangle$ с центром $Z(A)$ порождается множеством M, $a \in M \cap Z(A)$. Тогда*

1) группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством $(M\diagdown\{a\}) \cup \{d\}$;

2) если a – идемпотент в $\langle A, [\ ]\rangle$, то группа $\langle A, \circ_a\rangle$ порождается множеством $M\diagdown\{a\}$.

4. Заключение

Изучен процесс нахождения порождающих множеств n-арных групп, зная порождающие множества групп, которые получаются из n-арных групп по теореме Поста-Глускина-Хоссу, и порождающие множества соответствующих групп.

Найдено условие, при выполнении которого порождающие множества группы и n-арной группы, производной от этой группы, совпадают. В частности, установлена цикличность n-арной группы, производной от циклической группы порядка $m(n-1)+1 \geqslant 3$.

Приведены несколько примеров нахождения порождающих множеств для n-арных групп.

Кроме того, изучен процесс нахождения порождающих множеств бинарных групп, зная порождающие множества n-арных групп, из которых получаются бинарные группы по теореме Поста-Глускина-Хоссу.

Описаны порождающие множества бинарных групп, которые получаются (согласно теореме Поста-Глускина-Хоссу) из n-арных групп с непустым центром.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dörnte W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff // Math. Z. 1928. Bd.29, S. 1–19.

2. Post E. L. Poluadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 48. 1940. — P. 208–350.

3. Тютин В. И. К аксиоматике n-арных групп // Докл. АН БССР, 1985. Т. 29, №8. С. 691–693.

4. Гальмак А. М. Об определении n-арной группы // Междунар. конф. по алгебре - тез. докл. - Новосибирск, 1991. — С. 30.

5. Гальмак А. М. n-Арные группы. Ч. 2. Минск: Изд. центр БГУ, 2007. 324 с.

6. Гальмак А. М. n-Арные группы. Ч. I. Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.

7. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Мат. сборник. 1965. Т. 68 (110), №3. С. 444–472.

8. Hosszu M. On the explicit form of n-group operacions. Publ. Math. 1963. Vol. 10. №1-4. P. 88–92.

9. Гальмак А. М., Воробьев Г. Н. Тернарные группы отражений. Минск: Беларуская навука. 1998. 128 с.

10. Щучкин Н. А. Подгруппы в полуциклических n-арных группах // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, №2. С. 211–222.

11. Кусов В. М., Щучкин Н. А. Свободные абелевы полуциклические n-арные группы // Чебышевский сборник. 2011. Т. XII, вып. 2(38). С. 68–76.

12. Коксетер Г. С. М. , Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М: Наука, 1980. 240 с.

13. Русаков С. А. Алгебраические n-арные системы. Мн: Навука і тэхніка, 1992. 245 с.

14. Щучкин Н. А. Полуциклические $n-$арные группы // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. №3(54). С. 186–194.

Могилевский государственный университет продовольствия,
Волгоградский государственный социально-педагогический университет.
Поступило 20.02.2014