ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 531.091 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-216-227

# Вариационные задачи в работах академика О. И. Сомова. Брахистохрона и таутохрона

А.О. Юлина

**Юлина Анна Олеговна** — Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (г. Санкт-Петербург).
*e-mail: parfenova19761976@mail.ru*

**Аннотация**

В статье представлен анализ решений вариационных задач механики в работах академика О. И. Сомова (1815-1876). В 1869 году О. И. Сомов не только упрощает решение задачи Абеля, но и приводит фундаментальный вывод о расширении задачи таутохроны с поля силы тяжести на любое потенциальное поле. В статье показано, как Сомов, не используя интегралы Эйлера, находит дугу, пройденную телом в функции высоты, в том случае, когда время не зависит от высоты (таутохрона). Автор статьи подробно рассматривает, каким образом в кинематической и динамической задаче Сомов сразу же отказывается от декартовых координат, переходя на полярные координаты, избавляя читателя от бесконечных замен.

*Ключевые слова:* вариация, таутохрона, вариационная задача, задача Абеля.

*Библиография:* 7 названий.

**Для цитирования:**
Юлина, А.О. Вариационные задачи в работах академика О.И. Сомова. Брахистохрона и таутохрона // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 216–227.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 531.091 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-216-227

# Variational problems in the works of academician O. I. Somov. Brachistochrone and tautochrone

A.O. Yulina

**Yulina Anna Olegovna** — Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering; Peter the Great Saint Petersburg Polytechnic University (St. Petersburg).
*e-mail: parfenova19761976@mail.ru*

**Abstract**

The article presents an analysis of solutions to variational problems of mechanics in the works of Academician O.I. Somov (1815-1876). In 1869 O.I. Somov not only simplifies the solution to Abel's problem, but also gives a fundamental conclusion about extending the tautochrone problem from the gravity field to any potential field. The article shows how Somov, without using Euler integrals, finds the arc traversed by a body as a function of height, in the case when time does not depend on height (tautochrone). The author of the article examines in detail how, in a kinematic and dynamic problem, Somov immediately abandons Cartesian coordinates, switching to polar coordinates, saving the reader from endless substitutions.

*Keywords:* Variation, tautochrone, variational problem, Abel problem.

*Bibliography:* 7 titles.

**For citation:**

Yulina, A.O. 2024, "Variational problems in the works of academician O.I. Somov. Brachistochrone and tautochrone" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 216–227.

## 1. Введение

Для исследования кинематических задач Сомов дает формулу для дифференцирования геометрического произведения, аналогичную с формулой Лейбница для дифференцирования алгебраического произведения, распространяет правила умножения двух алгебраических сумм на геометрические суммы, определяет способы выражения геометрическими производными какой-либо переменной прямолинейной длины при помощи скорости и ускорения крайних точек, использует геометрическое дифференцирование по разным переменным и некоторые предложения, относящиеся к геометрическим вариациям.

Методы геометрического дифференцирования в механике О.И. Сомова представляют собой обобщенные методы дифференциального исчисления, с помощью которых он решает вопросы о скоростях и ускорениях в движении точки.

## 2. Брахистохрона

Практическое использование геометрического варьирования О.И. Сомов показывает на примере следующей задачи.

«Брахистохрона. Пусть будет точка $M(x, y)$, отнесенная к прямоугольным осям $Ox$ и $Oy$ и движущаяся в плоскости этих осей таким образом, что при всякой ее траектории движения скорость движения $v$ есть данная функция $f(x)$ абсциссы.

Спрашивается: по какой кривой точка должна двигаться от $A$ до $B$, чтобы пройти пространство $AB$ в кратчайшее время.

Кривая, имеющая такое свойство, называется брахистохроною.»[2]

Рассмотрим решение автора.

### 2.1. Кинематика задачи

Предположим, что $AMB$ есть искомая брахистохрона, $A\mu B$ ее вариационное перемещение; причем $M\mu$ есть вариационное перемещение, которое получит точка $M$, если изменится только ордината $y$, т.е. если $x$ останется постоянным, следовательно $M\mu = \delta y$ (рис.1).

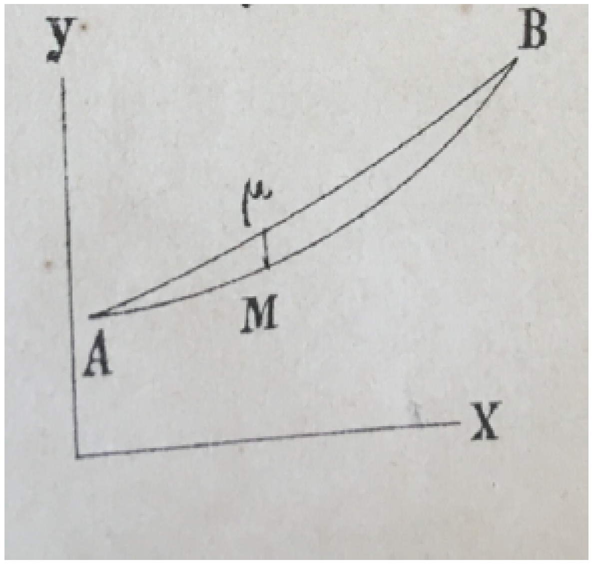



Рис. 1

Геометрической функцией Сомов называет всякую прямую линию, изменяющую непрерывно со временем свою длину и направление, или только длину, или только направление.

Способ, по которому изменяется длина и направление геометрической функции, зависит от движения ее начала и конца. Скорость движения точки $M$ - геометрическая производная функции первого порядка.

Перемещение $M\mu = \delta y$ есть геометрическая функция переменной $x$, сохраняющая свое направление, параллельное оси $Oy$; поэтому ее геометрическая производная по $x$ есть $\frac{d\delta y}{dx}$. Она геометрически равна геометрической вариации скорости $\frac{ds}{dx}$, с которой точка $M$ будет двигаться по линии $AB$, если время движения равно $x$. Следовательно проекция $\frac{d\delta y}{dx}$ на $ds$, проведенная по касательной в точке $M$ к кривой $AMB$, равна $\delta\frac{ds}{dx}$. Так как косинус угла этой касательной с осью $Oy$ есть $\frac{dy}{ds}$, то

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} = \delta\frac{ds}{dx}.$$

Время $t$ есть некоторая функция $x$, поэтому $\frac{ds}{dx} = v\cdot\frac{dt}{dx}$. По условию задачи $v = F(x)$. Следовательно

$$\delta\frac{ds}{dx} = \delta\big[F(x)\cdot\frac{dt}{dx}\big] = F(x)\cdot\delta\frac{dv}{dx} = F(x)\frac{d\delta t}{dx}$$

и

$$\frac{d\delta y}{dx}\cdot\frac{dy}{ds} = F(x)\cdot\frac{d\delta t}{dx};$$

отсюда Сомов делает вывод

$$\frac{d\delta t}{dx}\cdot dx = \frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d\delta y}{dx}\cdot dx = d\big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\cdot\delta y\big) - d\big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\big)\cdot\delta y.$$

Интегрируя это выражение в пределах от $a$ до $b$ (значения координаты $x$ в точках $A$ и $B$), получим

$$dt = \Big|_a^b \Big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\Big)\cdot\delta y - \int\limits_a^b d\Big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\Big)\cdot\delta y \tag{1}$$

Так как при $x = a$ и $x = b$ $\delta y = 0$, разность значений $\Big|_a^b \Big(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\Big)\cdot\delta y = 0$. Учитывая это, выражение (1) будет иметь вид:

$$\delta t = -\int\limits_a^b d\Big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\Big)\cdot\delta y \tag{2}$$

По условию, время прохождения $t$ траектории $AMB$ должно быть минимально, тогда будем иметь $\delta t = 0$ и следовательно:

$$\delta t = \int\limits_a^b d\Big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\Big)\cdot\delta y \tag{3}$$

Для этого необходимо, чтобы при всяком $x$ из $[a, b]$

$$d\Big(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds}\Big) = 0 \tag{4}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{dy}{ds} = \text{c} \tag{5}$$

где $c$ - постоянная величина. Уравнение (5) показывает замечательное свойство *брахистохроны: отношение скорости движения к косинусу угла, ею составляемого с осью $Oy$, постоянно.*

Теперь (5) запишем иначе:

$$\frac{y^{'}}{\sqrt{1+(y^{'})^2}} = cF(x);$$

Отсюда выразим:

$$\text{y}^{'} = \frac{cF(x)}{\sqrt{1-c^2F^2(x)}}$$

И получим **уравнение брахистохроны:**

$$y = c\int\limits_a^x \frac{F(x)dx}{\sqrt{1-c^2F^2(x)}} + a^{'} \tag{7}$$

где $a^{'}$ - ордината точки $A$.

### 2.2. Динамика задачи

Движение точки происходит без сопротивления (в том числе и трения), под действием только силы тяжести, которая направлена параллельно $Ox$. Тогда, записывая основной закон динамики в проекциях на оси естественного трехгранника, а именно на касательную, будем иметь:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Здесь $\frac{dx}{ds}$ - косинус угла между линией действия силы тяжести и касательной. О.И. Сомов решает полученное дифференциальное уравнение с учетом нулевой начальной скорости (скорость в точке $A$):

$$vdv = gdx \Rightarrow v^2 = 2g(x-a) \Rightarrow F(x) = \sqrt{2g(x-a)}.$$

Тогда по формуле (6) уравнение брахистохроны: $y = c\int\limits_a^x \frac{\sqrt{2g(x-a)}}{\sqrt{1-2c^2g(x-a)}} \cdot dx + a'$.

Для удобства, Сомов объединяет константы - $2r = \frac{1}{2c^2g}$ и, после интегрирования, получает:

$$y = r\arccos\left(\frac{r-x+a}{r}\right) - \sqrt{r^2-(r-x+a)^2} + a' \tag{6}$$

Это уравнение циклоиды. Для записи замечательной кривой в каноническом виде, Сомов переносит начало координат в точку $A$, вводит новые координаты $(\xi, \eta)$, выполняет замену переменных $\arccos(\frac{r-x+a}{r}) = \omega$.

$$\xi = r(1-\cos\omega), \eta = r(\omega - \sin\omega)$$

### 2.3. Вариационное исследование

Таким образом, время движения по линии $AB$ определяется следующим образом:

$$t = \int\limits_a^b \frac{ds}{v} = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+(y')^2}dx}{F(x)} = \int\limits_a^b \frac{dx}{F(x)\sqrt{1-c^2F^2(x)}}$$

и для рассматриваемого частного случая $F(x) = \sqrt{2g(x-a)}$,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\arccos(\frac{r-b+a}{r}).$$

Далее, О.И. Сомов доказывает, что это время будет минимально, так как вариация второго порядка $\delta^2 t$ всегда положительна. Представим его выводы. Из формулы (1) следует:

$$\delta^2 t = \delta\Big|_a^b (\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}) \cdot \delta y - \int\limits_a^b \delta[d(\frac{1}{F(x)} \cdot \frac{dy}{ds}) \cdot \delta y],$$

где при $x = a$ и $x = b$, $\delta y = 0, \delta^2 y = 0$, вариация $\delta\Big|_a^b (\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}) \cdot \delta y = 0$, выражение под знаком интеграла приводится к

$$\delta d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta y + d\left(\frac{1}{F(x)}\frac{dy}{ds}\right)\delta^2 y.$$

В последнем выражении, в силу уравнения (4), первый член исчезает, а второй может быть записан в виде:

$$d\delta\left(\frac{1}{F(x)}\cdot\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)\delta y = d\left(\frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y.$$

Следовательно

$$\delta^2 t = -\int\limits_a^b d\left(\frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\delta y.$$

Интегрируя по частям и, замечая, что часть, относящаяся к пределам интеграла, равна нулю (выше показано дважды), окончательно получим:

$$\delta^2 t = \int\limits_a^b \frac{\delta y'}{F(x)(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int\limits_a^b \frac{dt}{dx}\cdot\left(\frac{\delta y'}{1+(y')^2}\right)^2 dx.$$

Все элементы этого интеграла положительны, а значит $\delta^2 t > 0$; потому указанное время $t$ имеет минимальное значение.

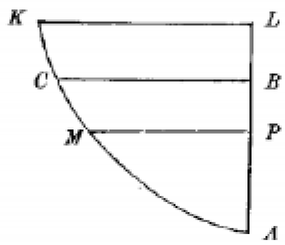
## 3. Таутохрона

Все задачи динамики Леонард Эйлер разделил на два класса: прямая задача и обратная. Прямая (или первая) задача состоит в нахождении силовых характеристик при заданных параметрах движения (уравнение движения, скорости, ускорения). Обратная (или вторая) задача определяет соответственно кинематику движения (траекторию, уравнения движения, скорость точки) при заданных силах, которые в общем случае могут зависеть от скорости, времени или положения точки. Математически прямая задача сводится к операции дифференцирования, а обратная к интегрированию. Практически все инженерные проблемы относятся именно к обратным задачам динамики. Ожидаемое уравнение движения является решением дифференциального уравнения. Таким образом, Эйлер дал инженерам общий алгоритм, который с успехом применяется до сих пор.

Далее мы расскажем о задаче, которая позволяет избежать составления дифференциального уравнения и иллюстрирует еще одно вариационное свойство циклоиды - таутохронность.

В 1823 году Н.Х. Абель [5] поставил следующую задачу:
«Предположим, что $CB$ — горизонтальная линия, $A$ — заданное значение, $AB$ перпендикулярна $BC$, $AM$ кривая с прямоугольными координатами $AP = x, PM = y$. Более того $AB = x, AM = s$.

Определить кривую, расположенную в вертикальной плоскости и обладающую тем свойством, что тяжелая материальная точка, падающая по этой кривой, будучи выпущенная без начальной скорости из любой точки кривой $M$ на высоте $a$ над самой низкой точкой кривой $A$, приходит в точку $A$ в течении времени $T$, которое есть данная функция высоты $\psi a$» (рис.2).



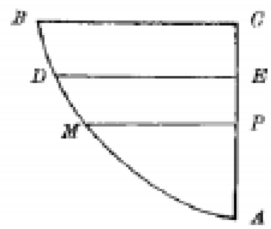

Soit $CB$ une ligne horizontale, $A$ un point donné, $AB$ perpendiculaire à $BC$, $AM$ une courbe dont les coordonnées rectangulaires sont $AP = x$, $PM = y$. Soit de plus $AB = a$, $AM = s$. Si l'on conçoit maintenant qu'un corps se meut sur l'arc $CA$, la vitesse initiale étant nulle, le temps $T$ qu'il emploie pour le parcourir dépendra de la forme de la courbe, et de $a$. Il s'agit de déterminer la courbe $KCA$ pour que le temps $T$ soit égal à une fonction donnée de $a$, p. ex. $\psi a$.

Рис. 2

Для решения этой задачи Абель получает интегральное уравнение:

$$\tau = \psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$$

В 1826 году Абель возвращается к этой задаче (рис.3), решение полученного интегрального уравнения получает с помощью Эйлеровых подстановок (гамма функций)[6].




Soit $BDMA$ une courbe quelconque. Soit $BC$ une droite horizontale et $CA$ une droite verticale. Supposons qu'un point sollicité par la pesanteur se meuve sur la courbe, un point quelconque $D$ étant son point de départ. Soit $\tau$ le temps qui s'est écoulé quand le mobile est parvenu à un point donné $A$, et soit $a$ la hauteur $EA$. La quantité $\tau$ sera une certaine fonction de $a$, qui dépendra de la forme de la courbe. Réciproquement la forme de la courbe dépendra de cette fonction. Nous allons examiner comment, à l'aide d'une intégrale définie, on peut trouver l'équation de la courbe pour laquelle $\tau$ est une fonction continue donnée de $a$.

Soit $AM = s$, $AP = x$, et soit $t$ le temps que le mobile emploie à parcourir l'arc $DM$. D'après les règles de la mécanique on a $-\frac{ds}{dt} = \sqrt{a-x}$, donc $dt = -\frac{ds}{\sqrt{a-x}}$. Il s'ensuit, lorsqu'on prend l'intégrale depuis $x = a$ jusqu'à $x = 0$,

$$\tau = -\int_a^0 \frac{ds}{\sqrt{a-x}} = \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}},$$

$\int_\alpha^\beta$ désignant que les limites de l'intégrale sont $x = \alpha$ et $x = \beta$. Soit maintenant

$$\tau = \varphi a$$

Рис. 3

Подробный разбор и перевод статей Абеля 1823 и 1826 годов содержится в работах[5,6]. Отметим только важные для дальнейшего изложения выводы:

1. Абель первый вышел на интегральные уравнения.

2. Как частный случай рассмотрел задачу таутохроны: время не зависит от высоты.

3. Решение такого интегрального уравнения в общем случае имеет следующие сложности:

• Много замен переменных, как в пределах интегрирования, так и в подынтегральных функциях (Эйлеровы подстановки).

• Частые и скрытые переходы от прямоугольных координат к криволинейным координатам.

• Избегая дифференциального уравнения в явном виде, необходимо распознать скрытое дифференцирование под знаком интеграла, являющегося, строго говоря, несобственным интегралом, т.е. быстро проверить его на сходимость.

### 3.1. Таутохрона О.И. Сомова

В 1869 году петербургский академик О.И. Сомов (1815-1876) не только упрощает решение Абеля, но и приводит фундаментальный вывод о расширении задачи таутохроны с поля силы тяжести на любое потенциальное поле.

Приведем анализ работы Сомова «О решении одного вопроса из механики, предложенного Абелем».[7] Для нахождения дуги, пройденной телом, в функции высоты, в том случае, когда время не зависит от высоты (таутохрона), Сомов не использует интегралы Эйлера. Он получает пройденную дугу с помощью простого преобразования переменных в двойном интеграле. В кинематической и динамической задаче он сразу же отказывается от декартовых координат, переходя на полярные координаты, избавляя читателя от бесконечных замен. После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи: «Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала» [7]. Эта новаторская постановка задачи таутохроны на языке теории поля и ее решении с помощью элементов поля так и осталась не замеченной современниками! Перескажем это блестящее решение О.И. Сомова.

**I.** Определение дуги, пройденной телом, в функции высоты (рис.4).

« Пусть $A$ означает начальное положение тела, $AB$ его траекторию, $M$ его положение в момент $t$, $B$ положение в момент $\tau$, $BD = x$ разность высот точек $M$ и $B$, $BC = a$ разность высот точек $A$ и $B$, $g$ тяжесть, и $s$ дугу $BM$.»

На основании теоремы об изменении кинетической энергии («по началу живых сил»), Сомов О.И. записывает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(a-x)}.$$

Откуда получает:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}.$$

Далее записывает дугу $s$ с помощью уравнения траектории, как некоторую неизвестную функцию $f(x)$: $s = f(x)$ и получает дифференциал дуги $ds = f'(x)dx$. После интегрирования $\int_0^a \frac{ds}{\sqrt{a-x}}$ предполагает получить функцию $a$. Обозначает эту функцию через $\varphi(a)$ и получает уравнение:

$$\int_0^a \frac{f'(x)dx}{\sqrt{a-x}} = \varphi(a), \tag{1}$$

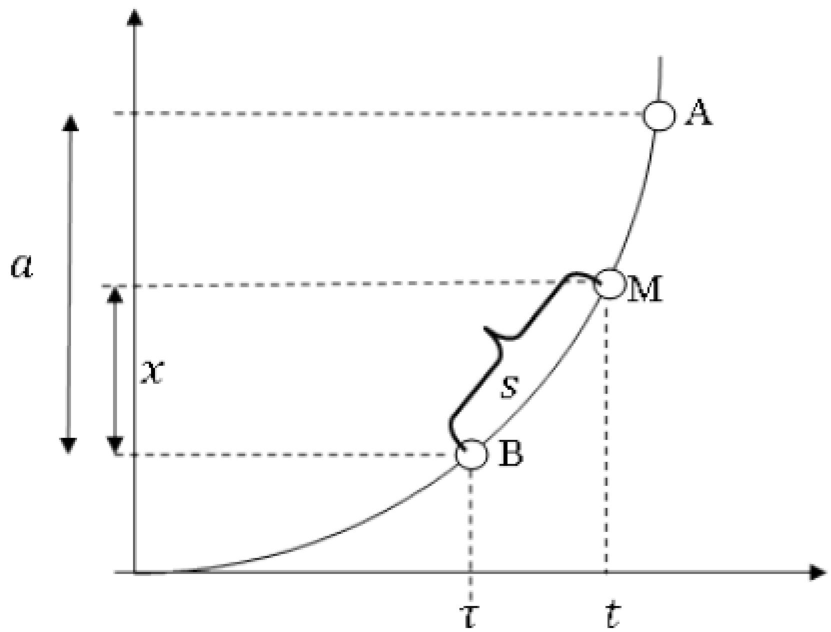



Рис. 4

из которого необходимо вывести $f(x)$.
Решает это уравнение следующим образом.

1. «Положим, что $x = a\sin^2\theta$, дабы освободить формулу которую следует интегрировать от радикала $\sqrt{a-x}$, и чтобы дать интегралу пределы, независимые от $a$». После этой подстановки, уравнение (1) принимает вид:

$$2\int_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \varphi(a). \tag{2}$$

2. Умножает обе части (2) на $\dfrac{da}{\sqrt{x-a}}$ и интегрируя от 0 до $x$, находит:

$$2\int_0^x \frac{da}{\sqrt{x-a}}\int_0^{\pi/2} f'(a\sin^2\theta)\sqrt{a}\sin\theta d\theta = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{3}$$

3. Вводит полярные координаты точки $(r = \sqrt{a}, \theta)$. Тогда левая часть уравнения (3) представляет собой двойной интеграл, определяющий площадь круга, описанного радиусом $\sqrt{x}$. Учитывая это, уравнение (3) запишется следующим образом:

$$4\int_0^{\sqrt{x}}\int_0^{\pi/2} \frac{f'(r^2\sin^2\theta)r\sin\theta r dr d\theta}{\sqrt{x-r^2}} = \int_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}} \tag{4}$$

4. Переходит от полярных координат к прямоугольным:

$$\xi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta.$$

Тогда левая часть уравнения (4) преобразуется в:

$$4\int\int \frac{f'(\eta)^2\eta d\eta d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}},$$

где интеграл относительно $x$ Сомов О.И. берет в пределах от 0 до $\sqrt{x-\eta^2}$, а интеграл относительно $\eta$ от 0 до $\sqrt{x}$.

Первое интегрирование:

$$\int\limits_0^{\sqrt{x-\eta^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi^2-\eta^2}} = \arcsin(\frac{\xi}{\sqrt{x-\eta^2}})\Big|_0^{\sqrt{x-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Второе интегрирование:

$$\pi\int\limits_0^{\sqrt{x}} f'(\eta^2)2\eta d\eta = \pi f(x).$$

5. Таким образом, уравнение (4) Сомов О.И. приводит к следующему:

$$\pi f(x) = \int\limits_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}, \Rightarrow S = f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}.$$

Дуга, пройденная точкой, в функции высоты Сомовым О.И. найдена в таком же виде как и у Н.Х. Абеля.

**II.** После того, как Сомов приходит к результату Абеля, он показывает, что результаты Абеля можно применить к решению более общей задачи:

«Найти кривую, описываемую точкой на поверхности какого ни есть вида, при действии на эту точку, силы, имеющей какой-нибудь потенциал, зная как выражается время движения в функции потенциала».

Представим себе точку, на которую действует сила, имеющая потенциал $u$, под действием которой точка движется по данной поверхности. Уравнение поверхности в обобщенных координатах $q_1, q_2, q_3$ имеет вид:

$$F(q_1, q_2, q_3) = 0.$$

Это уравнение и другое неизвестное определяют траекторию точки. Если к этому уравнению добавить выражение потенциала как функции координат $q_1, q_2, q_3$ , то получим зависимость дуги $s$ траектории от потенциала.

Сомов берет начало дуги $s$ таким образом, чтобы при увеличении времени значение дуги уменьшалось. Тогда, по началу живых сил (теорема об изменении кинетической энергии), он получает:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2u-2u_0},$$

Начальная скорость точки равна нулю, а $u_0$ - потенциал, соответствующий начальному положению точки. Из этого уравнения Сомов получает:

$$\tau = -\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\frac{ds}{du}\cdot du}{\sqrt{2u-2u_0}}.$$

Здесь $\tau$ это время движения по дуге $s$, ограниченной поверхностями уровня $u_0$ и $u_1$. Далее автор выполняет замену переменных: $u_1 - u_0 = a, u - u_0 = a - x$, и тогда значение времени $\tau$:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^a \frac{\frac{ds}{dx} \cdot dx}{\sqrt{a-x}}.$$

Если эта величина $\tau$ приводится к заданной функции $\Phi(u_1)$ потенциала $u_1$(по условию задачи), то по формуле $s = \int\limits_0^x \frac{\varphi(a)da}{\sqrt{x-a}}$, где $\varphi(a) = \sqrt{2}\Phi(u_1) = \sqrt{2}\Phi(u_0+a)$ зависимость дуги траектории от потенциала Сомов О.И. представляет в следующем виде:

$$S = \sqrt{2} \int\limits_0^u \frac{\Phi(u_1)du_1}{\sqrt{u-u_1}}.$$

Если траекторией движения является таутохрона , то для $\sqrt{2}\Phi(u_1)$ Сомов получает постоянную величину, которую обозначает через $A$.

Окончательно, пройденная дуга в таутохронной задаче может быть выражена через разность потенциалов следующим образом:

$$S = A \int\limits_0^u \frac{du_1}{\sqrt{u-u_1}} = 2A\sqrt{u-u_0}.$$

## 4. Заключение

Таким образом, Сомов поставил и решил более общую задачу более лаконичным способом. При этом задачу о движении точки в поле силы тяжести О. И. Сомов впервые обобщил на случай движения точки по произвольной поверхности в любом потенциальном поле.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юлина А.О. Таутохрона О.И. Сомова // История и педагогика естествознания. 2023. № 2. С. 41–44.

2. Сомов О.И. Рациональная механика // Кинематика. С.-Петербург. Типография Императорской академии наук. 1872. 491 С.

3. Юлина А.О. Механика О.И. Сомова // История науки и техники. 2023. № 2. С. 3-7.

4. Юлина А.О. Векторное исчисление в механике Сомова // История науки и техники. 2023. № 3. С. 26-33.

5. Abel N.H. Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies // Oplösning af et Par Opgaver ved. Hjelp af bestemte Integraler. 1823. pp. 11–27.

6. Abel N.H. Rèsolution D'un Problème de mecanique // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1826. S. 97-101.

7. Сомов О.И. О решении одного вопроса механики, предложенного Абелем // Записки Императорской академии наук. Санкт-Петербург: Типография Императорской академии наук. Т. 9, кн. 1. 1866 г. Раздельная пагинация.

## REFERENCES


1. Yulina, A.O. 2023, “O.I. Somov’s tautochrona ”, *History and pedagogy of natural science*, № 2, pp. 41–44.

2. Somov, O.I. 1872, “Rational mechanics”, *Kinematics. St. Petersburg. Printing house of the Imperial Academy of Sciences.*, 491 p.

3. Yulina, A.O. 2023, “O.I. Somov’s Mechanics”, *History of science and technology*, № 2, pp. 3–7.

4. Yulina, A.O. 2023, “Vector calculus in Somov’s mechanics”, *History of science and technology*, № 3, pp. 26–33.

5. Abel, N.H. 1823, “Solution de quelques problèmes à l’aide d’intégrales définies”, *Oplösning af et Par Opgaver ved. Hjelp af bestemte Integraler*, 1823. p. 11–27.

6. Abel, N.H. 1826, “Rèsolution D’un Problème de mecanique”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pp. 97–101.

7. Somov, O.I. 1866, “On the solution of a problem in mechanics proposed by Abel”, *Notes of the Imperial Academy of Sciences. St. Petersburg: Printing house of the Imperial Academy of Sciences*, Vol. 9, book 1, Separate pagination.


Получено: 12.05.2024
Принято в печать: 26.12.2024