

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-183-194

Наилучшее совместное приближение некоторых классов
функций в пространстве Бергмана B_2

Х. М. Хуромонов

Хуромонов Хуромон Мамадамонович — кандидат физико-математических наук, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана (г. Душанбе).
e-mail: khuromon@mail.ru

Аннотация

В работе изучается ряд экстремальных задач, связанных с наилучшим совместным приближением некоторых классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых модулями непрерывности высших порядков в пространстве Бергмана B_2 . Отметим, что впервые задача совместного приближения периодических дифференцируемых функций и их последовательных производных тригонометрическими полиномами и их соответствующими производными в равномерной метрике была исследована А.Л.Гаркави [1]. Полученные в [1] результаты были обобщены А.Ф.Тиманом [2] на классе целых функций экспоненциального типа на всей прямой. В монографии [3] задачи совместного приближения обобщены на некоторых классических теоремах теории аппроксимации функций. Однако в перечисленных работах получены только асимптотически точные результаты. В данной работе доказан ряд точных теорем совместного приближения аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 , дополняющих результаты М.Ш.Шабозова [4].

Ключевые слова: совместное приближение, модуль непрерывности, n -поперечники, мажоранта, пространство Бергмана.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:

Хуромонов, Х. М. Наилучшее совместное приближение некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2 // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 183–194.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-183-194

The best joint approximation of some classes of functions in the
Bergman space B_2

Kh. M. Khuromonov

Khuromonov Khuromon Mamadamonovich — candidate of physical and mathematical sciences, International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan (Dushanbe).
e-mail: khuromon@mail.ru

Abstract

In this paper, we study several extreme problems related to the best joint approximation of certain classes of analytical functions in the unit circle given by higher-order continuity modules in the Bergman space B_2 . It should be noted that for the first time the problem of joint approximation of periodic differentiable functions and their consecutive derivatives by trigonometric polynomials and their corresponding derivatives in a uniform metric was investigated by A.L.Garkavi [1]. The results obtained in [1] were generalized by A.F.Timan [2] for a class of integer functions of exponential type on the entire line. In the monograph [3]. The problems of joint approximation are generalized to some classical theorems of the theory of approximation of functions. However, in the listed works, only asymptotically accurate results were obtained. In this paper, we prove a number of exact theorems for the joint approximation of analytic functions in the unit circle belonging to the Bergman space B_2 , complementing the results of M.Sh.Shabozov [4].

Keywords: joint approximation, modulus of continuity, n -diameters, majorant, Bergman spaces.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

Khuromonov, Kh. M. 2024, "The best joint approximation of some classes of functions in the Bergman space B_2 ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 183–194.

1. Введение и предварительные факты

В ряде работ, например [5]–[14], изучаются экстремальные задачи теории наилучшего полиномиального приближения функций в пространствах Харди и Бергмана. В данной статье изучаются некоторые экстремальные задачи полиномиального приближения аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана B_2 . Полученные здесь результаты дополняют ряд точных теорем совместного приближения функций и их промежуточных производных, недавно опубликованных в работе М.Ш.Шабозова [4]. Отметим, что ряд точных теорем совместного приближения периодических функций получены С.Б.Вакарчуком и В.И.Забутной [15], а для некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди доказаны в работах [16] и [17].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — соответственно множество натуральных, целых неотрицательных, положительных и вещественных чисел. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U .

Говорят [10], что аналитическая в единичном круге U функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

принадлежит пространству Бергмана B_2 , если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty. \quad (2)$$

Производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ определим, как обычно,

$$f^{(r)}(z) := \frac{d^r f(z)}{dz^r} = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-r+1) c_k(f) z^{k-r}, \quad r \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Ради краткости, введём обозначение

$$\alpha_{k,r} := k(k-1) \cdots (k-r+1) = k!/(k-r)!, \quad k, r \in \mathbb{N}, \quad k > r. \quad (4)$$

Всюду далее символом $B_2^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $B_2^{(0)} = B_2$) обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству B_2 , производная r -го порядка $f^{(r)}(z)$ которых также принадлежит B_2 , то есть

$$B_2^{(r)} := \{f \in B_2 : \|f^{(r)}\|_2 < \infty\}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических многочленов степени n вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Величину

$$E_n(f)_2 := E(f, \mathcal{P}_n)_{B_2} = \inf \{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\} \quad (5)$$

называют наилучшим полиномиальным среднеквадратическим приближением функции $f \in B_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$.

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место соотношение

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где $T_{n-1}(f)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда (1).

Запишем норму (1) в более удобном виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

и символом

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим конечную разность m -го порядка функции $f \in B_2$ по аргументу t с шагом h . Равенством

$$\|\Delta_h^m(f)\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2}$$

обозначим норму разности m -го порядка функции $f \in B_2$.

Модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in B_2$ определим, как обычно, равенством

$$\omega_m(f, \tau)_2 := \sup \{ \|\Delta_h^m(f)\|_2 : |h| \leq \tau \}. \quad (7)$$

Пользуясь соотношениями (3) и (4), для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\Delta_h^m f^{(r)}(\rho e^{it}) = \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) \rho^{k-r} e^{i(k-r)t} (1 - e^{i(k-r)h})^m. \quad (8)$$

Отсюда, применяя тождество Парсеваля, получаем

$$\|\Delta_h^m f^{(r)}\|^2 = 2^m \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m \quad (9)$$

и, следовательно,

$$\omega_m^2(f^{(r)}, \tau)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq \tau} \sum_{k=r+1}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \quad (10)$$

Поскольку для функции $f \in B_2^{(r)}$, наравне с функциями f и $f^{(r)}$, последовательные производные $f^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, r-1$) также принадлежат пространству B_2 [4], то представляет интерес отыскание точных значений совместных приближений функций и их производных

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 := \inf \{ \|f^{(s)} - p_{n-1}^{(s)}\|_2 : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}, \quad (11)$$

на некотором подмножестве $\mathfrak{M}^{(r)} \subset B_2^{(r)}$ или на самом классе $B_2^{(r)}$. Точнее, требуется найти значение величины

$$E_{n-s-1}(\mathfrak{M}^{(r)}) := \sup \{ E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 : f \in \mathfrak{M}^{(r)} \}. \quad (12)$$

В [18] доказано, что для любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ для произвольной функции $f \in B_2^{(r)}$ справедливы соотношения

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} \right\}^{1/2}, \quad (13)$$

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \leq \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_2, \quad (14)$$

причём неравенство (14) обращается в равенство для функции $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r \geq s$.

Неравенствами (13) и (14) воспользуемся в дальнейшем. Для нас определённый интерес представляет изучение следующей экстремальной аппроксимационной характеристики

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) := \sup_{f \in B_2^{(r)}} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2}} \quad (15)$$

содержащей осреднённый с весом $h-t$ ($0 \leq t \leq h$) модуль непрерывности m -го порядка $\omega_m^{m/2}(f^{(r)}, t)$. Ещё одним аргументом в пользу такого выбора характеристики (15), является работа С.Фокарта, Ю.Крякина и А.Щадрина [19], в которой сделано существенное продвижение в решении задачи о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $C := C[0, 2\pi]$. При этом ключевую роль сыграл указанный вес, с помощью которого осреднялась сама конечная разность (8), а не её норма.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$. Тогда для любого h , удовлетворяющего условию $0 < h \leq \pi/(n-r)$ справедливо равенство

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) = h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $f \in B_2$ имеет место следующее неравенство [4]

$$E_{n-1}^2(f)_2 - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \cos kt \leq E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2 \cdot \frac{1}{2} \omega_m^{2/m}(f, t)_2. \quad (17)$$

Умножив обе части неравенства (17) на функцию $h - t$ и проинтегрировав полученный результат по переменной t в пределах от 0 до h , имеем

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} E_{n-1}^2(f)_2 &\leq \frac{h^2}{2} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left(\frac{2 \sin(kh/2)}{kh} \right)^2 + \\ &+ E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f, t) dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку [20]

$$\sup \left\{ \frac{\sin x}{x} : \frac{nh}{2} \leq x < \infty \right\} = \frac{2 \sin(nh/2)}{nh},$$

то из неравенства (1) получаем

$$h^2 E_{n-1}^2(f)_2 \leq h^2 \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 E_{n-1}^2(f) + E_{n-1}^{2(1-1/m)}(f)_2 \int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(f, t) dt$$

или

$$E_{n-1}(f)_2 \leq h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin(nh/2)}{nh} \right)^2 \right\}^{-m/2} \left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f, t)_2 dt \right)^{m/2}. \quad (19)$$

Если $f \in B_2^{(r)}$, то заменяя в (19) число n на $n - r$ и функцию f на производную $f^{(r)}$, запишем

$$\begin{aligned} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 &\leq \\ &\leq h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2} \left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2} \end{aligned} \quad (20)$$

и, учитывая (1) из неравенства (14), получаем

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_2 \leq \\ &\leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2} \times \\ &\times \left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2}} &\leq \\ &\leq h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Так как неравенство (1) верно для любой функции $f \in B_2^{(r)}$, то переходя к верхней грани по всем функциям $f \in B_2^{(r)}$ из (1), получаем

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) \leq h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \quad (23)$$

Для получения оценки снизу величины $\mathcal{K}_{m,n,r,s}(h)$ рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in B_2^{(r)}$, $n > r$. Поскольку

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}}, \quad \omega_m(f_0^{(r)}, t) = 2^m \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}} (\sin((n-r)t/2))^m,$$

где $0 \leq t \leq \pi/(n-r)$, то нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f_0^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2} = \\ & = \frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}} \sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}} \cdot h^m \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{m/2}. \end{aligned}$$

Учитывая равенство (14), запишем оценку снизу

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{m,n,r,s}(h) & \geq \frac{(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s}) \sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)} E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{\left(\int_0^h (h-t) \omega_m^{m/2}(f_0^{(r)}, t)_2 dt \right)^{m/2}} = \\ & = h^{-m} \left\{ 1 - \left(\frac{2 \sin((n-r)h/2)}{(n-r)h} \right)^2 \right\}^{-m/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Требуемое равенство (16) следует из сопоставления оценки сверху (23) с оценкой снизу (1), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

2. Точные значения n -поперечников класса $W_m^{(r)}(\Phi)$

Пусть $S := \{\varphi \in B_2 : \|\varphi\| \leq 1\}$ — единичный шар в B_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество из B_2 , $\mathcal{L}_n \subset B_2$ — n -мерное подпространство, $\mathcal{L}^n \subset B_2$ — подпространство коразмерности n ; $\Lambda : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, $\Lambda^\perp : B_2 \rightarrow \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{M}, B_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_{n+1} \subset B_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{M}, B_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|\varphi - g\|_2 : g \in \mathcal{L}_n \} : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \}, \\ \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|\varphi - \Lambda \varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \} : \Lambda B_2 \subset \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{M}, B_2) &= \inf \{ \sup \{ \|\varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \cap \mathcal{L}_n \} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|\varphi - \Lambda^\perp \varphi\|_2 : \varphi \in \mathfrak{M} \right\} : \Lambda^\perp B_2 \subset \mathcal{L}_n \right\} : \mathcal{L}_n \subset B_2 \right\} \end{aligned}$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским*, *проекционным n -поперечниками*. Выше перечисленные n -поперечники в B_2 связаны соотношениями [21, 22]:

$$b_n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, B_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, B_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, B_2) = \Pi_n(\mathfrak{M}, B_2). \quad (25)$$

Полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup \{ E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M} \} -$$

наилучшее приближение множества $\mathfrak{M}$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$.

Непрерывную возрастающую на полусегменте $[0, \infty)$ функцию Φ , такую, что $\Phi(0) = 0$, будем называть мажорантой. Множество всех мажорант обозначим символом $\mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{M}_k$, где $k \in \mathbb{N}$, обозначим множество мажорант $\Phi \in \mathfrak{M}$, для которых выполняется условия

- 1) $t_1^{-k}\Phi(t_1) \leq t_2^{-k}\Phi(t_2)$, если $0 < t_1 < t_2 \leq \pi$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-k}\Phi(t) = 0$.

Для произвольных чисел $r \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{N}$, $n > r$ и $h \in (0, 2\pi]$ введём в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_{m,2}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_2^{(r)} : \int_0^h (h-t)\omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)dt \leq \Phi(h) \right\},$$

где $\Phi \in \mathfrak{M}_2$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть мажоранта $\Phi \in \mathfrak{M}_2$ удовлетворяет условию

$$\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/(n-r))} \geq \frac{1}{\pi^2 - 4} \begin{cases} ((n-r)h)^2 - 2(1 - \cos(n-r)h), & \text{если } 0 \leq h \leq \pi/(n-r), \\ \pi^2 - 4 + ((n-r)h - \pi)^2, & \text{если } h \geq \pi/(n-r). \end{cases} \quad (26)$$

Тогда для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi); B_2) &= E_{n-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi))_{B_2} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из n -поперечников, перечисленных ранее. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (26), не пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в неравенстве (1) $s = 0$, $h = \pi/(n-r)$ и используя определение класса $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$, получаем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \quad (28)$$

Учитывая неравенства (25) и (28), запишем оценки сверху для перечисленных выше n -поперечников

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi); B_2) &\leq d_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi); B_2) \leq E_{n-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi)) \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Для получения оценки снизу указанных n -поперечников рассмотрим в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_2$ $(n+1)$ -мерный шар полиномов

$$\sigma_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\| \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2 - 4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2} \right\}$$

и покажем его принадлежность классу $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$. Для этого нам понадобится следующая

ЛЕММА. Для произвольного полинома $p_n \in \mathcal{P}_n$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, t) \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \sqrt{\frac{n+1}{n-r+1}} (1 - \cos(n-r)t)^m \|p_n\|^2, \quad (30)$$

где

$$(1 - \cos(n-r)t)_*^m := \begin{cases} (1 - \cos(n-r)t)^m, & \text{если } 0 \leq t \leq \pi/(n-r); \\ 2^m, & \text{если } t \geq \pi/(n-r). \end{cases} \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая формулу (10), запишем

$$\omega_m^2(p_n^{(r)}, t)_2 = 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(p_n)|^2}{k-r+1} (1 - \cos(k-r)h)^m. \quad (32)$$

Пользуясь тем, что при всех $r+1 \leq k \leq n$

$$(1 - \cos(k-r)h)^m \leq (1 - \cos(n-r)h)_*^m, \quad \text{где } 0 \leq h \leq \pi/(n-r)$$

и

$$\max_{r+1 \leq k \leq n} \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} = \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1},$$

из (32) получаем

$$\begin{aligned} \omega_m^2(p_n^{(r)}, t) &= 2^m \sup_{|h| \leq t} \sum_{k=r+1}^n \alpha_{k,r}^2 \frac{k+1}{k-r+1} \cdot \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} (1 - \cos(k-r)h)^m \leq \\ &\leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)h)_*^m \sum_{k=r+1}^n \frac{|c_k(p_n)|^2}{k+1} = \\ &= 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+1} (1 - \cos(n-r)h)_*^m \|p_n\|^2 \end{aligned}$$

и неравенство (30) и вместе с ним лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Из (30), при $0 < h \leq \pi/(n-r)$ с учётом первого из неравенств (26), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t) dt \leq \\ &\leq 2\alpha_{n,r}^{2/m} \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right)^{1/m} \|p_n\|^{2/m} \int_0^h (h-t) (1 - \cos(n-r)t) dt \leq \\ &\leq [(n-r)h]^2 - 2(1 - \cos(n-r)h) (\pi^2 - 4)^{-1} \Phi(\pi/(n-r)) \leq \Phi(h). \end{aligned} \quad (33)$$

Если же $h \geq \pi/(n-r)$, то используя второе из ограничений (26) и соотношение (30), для произвольного полинома $p_n \in \sigma_{n+1}$ получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^h (h-t) \omega_m^{2/m}(p_n^{(r)}, t) dt \leq 2\alpha_{n,r}^{2/m} \left(\frac{n+1}{n-r+1} \right)^{1/m} \|p_n\|^{2/m} \times \\ &\times \left\{ \int_0^{\pi/(n-r)} \left(\frac{\pi}{n-r} - t \right) (1 - \cos(n-r)t) dt + 2 \int_{\pi/(n-r)}^h (h-t) dt \right\} \leq \\ &\leq \{ \pi^2 - 4 + ((n-r)h - \pi)^2 \} (\pi^2 - 4)^{-1} \Phi \left(\frac{\pi}{n-r} \right) \leq \Phi(h). \end{aligned} \quad (34)$$

Из неравенств (2), (2) следует включение $\sigma_{n+1} \subset W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$.

Используя соотношение (25) и определение бернштейновского n -поперечника, запишем оценки снизу вышеперечисленных n -поперечников

$$\begin{aligned} \gamma_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi); B_2) &\geq b_n(W_{m,2}^{(r)}(\Phi); B_2) \geq b_n(\sigma_{n+1}, B_2) \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Сопоставляя оценки сверху (2) и снизу (2), получаем требуемые равенства (2).

В [23] доказано, что множество мажорант, принадлежащих $\mathfrak{N}_2$ и удовлетворяющих ограничению (26), не пусто. Этому ограничению удовлетворяет, например, функция $\Phi_*(t) = t^\alpha$, где $\alpha = 2\pi^2/(\pi^2-4)$. Теорема 2 доказана.

3. Решение экстремальной задачи (12) для класса функций

$$W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$$

Доказанные в предыдущих пунктах теоремы 1 и 2 представляют возможность найти решение экстремальной задачи (12) для класса $W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$.

ТЕОРЕМА 3. При любых $n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$ и $h \in (0, \pi/(n-r)]$ имеют место равенства

$$E_{n-s-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi)) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (1) для произвольной функции $f \in W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$ при $h = \pi/(n-r)$ получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)}) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2},$$

откуда и следует оценка сверху для величины, расположенной в левой части равенства (36):

$$E_{n-s-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi)) \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \quad (37)$$

Для получения аналогичной оценки снизу введём в рассмотрение функцию

$$f_1(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}} \cdot \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2} z^n.$$

Так как

$$\|f_1\| = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \cdot \frac{\sqrt{n-r+1}}{n+1} \cdot \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2},$$

то функция $f_1 \in \sigma_{n+1}$, а значит $f_1 \in W_{m,2}^{(r)}(\Phi)$. С другой стороны, для производной $f_1^{(s)}$ ($s = 0, 1, \dots, r$) имеем

$$\begin{aligned} f_1^{(s)}(z) &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{n-r+1} \cdot \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \cdot \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2} z^{n-s}, \\ E_{n-s-1}(f_1^{(s)}) &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \cdot \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя равенство (38), получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} E_{n-s-1}(W_{m,2}^{(r)}(\Phi)) &\geq E_{n-s-1}(f_1^{(s)}) = \\ &= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \cdot \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}} \left\{ \frac{(n-r)^2}{\pi^2-4} \Phi\left(\frac{\pi}{n-r}\right) \right\}^{m/2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Требуемое равенство (36) получаем из сопоставления оценки сверху (38) с оценкой снизу (3), чем и завершаем доказательство теоремы 3.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаркави А. Л. О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24. № 1, С. 103–128.
2. Тиман А. Ф. К вопросу об одновременной аппроксимации функций и их производных на всей числовой оси // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1960. Т. 24. № 3. С. 421–430.
3. Малоземов Н. В. Совместное приближение функции и ее производных // ЛГУ. 1973.
4. Шабозов М. Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Матем. заметки. 2023. Т. 114. Вып. 3. С. 435–446.
5. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.
6. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 2. С. 155–162.
7. Тайков Л. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.
8. Двейрин М. З., Чебаненко И. В. О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // Теория отображений и приближение функций. Киев. ИМ АН УССР. 1983.
9. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 2. С. 171–174.
10. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39.
11. Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 186–193.
12. Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш. О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 8. С. 3–22.
13. Шабозов М. Ш., Кадамшоев Н. У. Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // Матем. заметки. 2021. Т. 10. № 2. С. 266–281.
14. Шабозов М. Ш., Шабозова А. А. О совместном приближении некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2 // Изв. вузов. Матем. 2024. № 6. С. 80–88.

15. Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 328–336.
16. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж. Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространстве Харди // Труды ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27. № 4. С. 240–256.
17. Шабозов М.Ш. О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Харди // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29. № 4. С. 283–291.
18. Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С. Среднеквадратическое приближение функций комплексного переменного суммами Фурье по ортогональным системам // Труды ИММ УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 258–272.
19. Foucart S., Kryakin Yu., Shadrin A. On the exact constant in the Jackson-Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. V. 29. PP. 157–179.
20. Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки. 1976. Т. 20. № 3. С. 433–438.
21. Pinkus A. n -Widths by Approximation Theory. Berlin: Springer. 1985.
22. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений // М: МГУ. 1976. 325 С.
23. Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Mathematica. 2012. V. 38. PP. 147–159.

REFERENCES

1. Garkavi, A.L. 1960, “On the joint approximation of a periodic function and its derivatives trigonometric polynomials”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 24, no. 1, pp. 103–128 (In Russian).
2. Timan, A.F. 1960, “On the issue of simultaneous approximation of functions and their derivatives on the entire number line”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 24, no. 3, pp. 421–430 (In Russian).
3. Malozemov N.V. 1973, “Joint approximation of a function and its derivatives”. – LGU. 1973 (In Russian).
4. Shabozov, M. Sh. 2023, “On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space B_2 ”, *Math. Notes*. vol. 114. issue. 3. pp. 435–446.
5. Babenko, K.I. 1985, “On the best approximations of one class of analytic functions”, *Izv. Acad. Nauk SSSR. Ser. Math.*, vol. 22, no. 5, pp. 631–640 (In Russian).
6. Taikov L.V. 1967, “Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 1. no 2. pp. 104–109.
7. Taikov L.V. 1977, “Diameters of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 22, no 2, С. 650–656.
8. Dveyrin, M.Z. & Chebanenko, I.V. 1983, “On polynomial approximation in Banach spaces analytical functions”, *Theory of mappings and approximation of functions. Inst. Math. Acad. Nauk Ukrain. SSR*, pp. 62–73 (In Russian).

9. Shabozov, M. Sh. 2002, “Widths of some classes of analytic functions in space Bergman”, *Dokl. RAN*. vol. 383, no 2, pp. 171–174 (In Russian).
10. Vakarchuk, S. B. 1995, “Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk”, *Math. Notes*, vol. 57, no 1. pp. 21–27.
11. Vakarchuk, S. B. 1999, “On the best linear approximation methods and the widths of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, vol. 65. no 2. pp. 153–158.
12. Vakarchuk S. B. & Shabozov M. Sh. 2010, “The widths of classes of analytic functions in a disc”, *Sb. Math.*, vol. 201, no 8. pp. 1091–1110.
13. Shabozov, M. Sh. & Kadamshoev, N. U. 2021, Sharp Inequalities between the Best Root-Mean-Square Approximations of Analytic Functions in the Disk and Some Smoothness Characteristics in the Bergman Space, *Math. Notes*, vol. 10. no 2. pp. 248–260.
14. Shabozov, M. Sh. & Shabozova, A. A. 2024, “On simultaneous approximation of certain classes of functions in the Bergman space B_2 ”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, no. 6, pp. 80–88.
15. Vakarchuk, S. B. & Zabutnaya, V. I. 2009, “A Sharp Inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the Widths of Functional Classes”, *Math. Notes*, vol. 86, no 3. pp. 306–313.
16. Shabozov, M. Sh. & Yusupov, G. A. & Zargarov, J. J. 2021, “On the best simultaneous polynomial approximation of functions and their derivatives in Hardy spaces”, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 27, no 4. pp. 239–254.
17. Shabozov, M. Sh. 2023, “On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 29. no 4. pp. 283–291.
18. Shabozov, M. Sh. & Saidusaynov, M. S. 2019, “Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 25, no 2. pp. 258–272.
19. Foucart, S. & Kryakin, Yu. & Shadrin. 2009, “A. On the exact constant in the Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric”, *Constr. Approx.*, vol. 29. pp. 157–179.
20. Taikov, L. V. 1976, “Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2 ”, *Math. Notes*, vol. 20, no 3, pp. 797–800.
21. Pinkus, A. 1985, “ n -Widths by Approximation Theory”, Berlin: Springer.
22. Tikhomirov, V. M. 1976, “Some questions of approximation theory”, MGU., 325 p (In Russian).
23. Shabozov, M. Sh. & Vakarchuk, S. B. 2012, “On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of function classes in L_2 ”, *Analysis Mathematica*, vol. 38. pp. 147–159.

Получено: 01.07.24

Принято в печать: 26.12.2024