

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-140-163

О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона¹

П. Г. Поцейко

Поцейко Павел Геннадьевич — кандидат физико-математических наук, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (г. Гродно, Республика Беларусь).

e-mail: paha-mat@yandex.ru

Аннотация

Изучаются рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сингулярных интегралов вида

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Аппаратом приближений являются суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва, ассоциированные с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, с произвольным фиксированным количеством геометрически-различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений. В случае, когда плотность сингулярного интеграла имеет степенную особенность, найдены оценки поточечных приближений, равномерных приближений с определенной мажорантой, ее асимптотическое выражение и оптимальные значения параметров, при которых мажоранта имеет наибольшую скорость убывания.

Следствием полученных результатов являются оценки приближений сингулярных интегралов с плотностью, имеющей степенную особенность, суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

Получены оценки приближений сингулярных интегралов с плотностью, удовлетворяющей на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица, суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. Особенностью найденных оценок является их зависимость от положения точки на отрезке. Причем на концах отрезка скорость является выше, чем в целом на отрезке.

Установлено, что классы изучаемых сингулярных интегралов с плотностью, имеющей степенную особенность, в некоторых случаях отражают особенности рациональной аппроксимации в том смысле, что при специальном выборе параметров скорости равномерных рациональных приближений оказываются выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Ключевые слова: сингулярный интеграл на отрезке, рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышёва, суммы Абеля – Пуассона, функции со степенной особенностью, условие Липшица, равномерные оценки, асимптотические оценки.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:

Поцейко, П.Г. О рациональных аппроксимациях одного сингулярного интеграла на отрезке суммами Абеля – Пуассона // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 140–163.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», №20162269 (Республика Беларусь).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-140-163

On rational approximations of a singular integral on a segment by Abel — Poisson sums

P. G. Potseiko

Potseiko Pavel Gennad'evich — candidate of physical and mathematical sciences, Yanka Kupala State University of Grodno (Grodno, Belarus).

e-mail: paha-mat@yandex.ru

Abstract

Rational approximations on the segment $[-1, 1]$ are studied of singular integrals of the form

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

The approximation apparatus is the Abel — Poisson sums of rational integral Fourier operators — Chebyshev associated with a system of rational Chebyshev — Markov functions, with an arbitrary fixed number of geometrically different poles. An integral representation of the approximations is established. In the case when the density of the singular integral has a power-law singularity, estimates are found pointwise approximations, uniform approximations with a certain majorant, its asymptotic expression and optimal values of parameters at which the majorant has the highest rate of decrease.

A consequence of the results obtained are estimates of approximations of singular integrals with density having a power-law singularity by Abel — Poisson sums of the polynomial Fourier — Chebyshev series.

Estimates of approximations of singular integrals with a density satisfying the Lipschitz condition on the segment $[-1, 1]$ by Abel — Poisson sums of the polynomial Fourier series — Chebyshev are established. The peculiarity of the estimates found is their dependence on the position of the point on the segment. Moreover, at the ends of the segment, the speed is higher than in the whole segment.

It is established that the classes of studied singular integrals with a density having a power-law singularity in some cases reflect the features of rational approximation in the sense that with a special choice of the velocity parameters of uniform rational approximations they turn out to be higher than the corresponding polynomial analogues.

Keywords: Singular integral on a segment, Rational integral Fourier — Chebyshev operator, Abel — Poisson sums, functions with power singularity, Lipschitz condition, uniform estimates, asymptotic estimates.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

Potseiko, P.G. 2024, "On rational approximations of a singular integral on a segment by Abel — Poisson sums", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 140–163.

1. Введение

При решении многих задач математики и физики встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1], \quad (1)$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши, где плотность $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица любого порядка [1, 2]. Известно, что сингулярные интегралы вида (1) в явном виде вычисляются в очень редких случаях. Поэтому как в теоретических исследованиях, так в особенности для различных приложений важное значение имеет разработка приближенных методов их вычисления.

Полиномиальные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1) исследовались многими авторами (см., напр., [3, 4]). Отметим исследования в этом направлении методами численного анализа [5, 6, 7, 8].

В работах известного белорусского математика В. Н. Русака [9], а также его учеников [10] и совместных работах [11] были изучены рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1), с плотностью принадлежащей различным классам непрерывных функций на отрезке. В работе [12] исследованы рациональные аппроксимации сингулярных интегралов вида (1) интегральным оператором Фурье – Чебышёва [13], ассоциированным с системой рациональных функций Чебышёва – Маркова, который является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. В частности, установлено что при специальном выборе полюсов аппроксимирующей рациональной функции скорость равномерных рациональных приближений сингулярных интегралов вида (1) с плотностью, имеющей степенную особенность, является выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Аппроксимационные свойства сумм Абеля – Пуассона рядов Фурье в полиномиальной аппроксимации хорошо известны как в периодическом [14, 15, 16, 17], так и в алгебраическом [18, 19] случаях. В 1963 году А. А. Китбальян [20] предложил подход к построению сумм Абеля – Пуассона тригонометрических рядов Фурье, введенных М. М. Джрбашьяном [21], а также им сопряженных. В частности, установлен ряд теорем о равномерной сходимости при $r \rightarrow 1$ сумм Абеля – Пуассона рациональных рядов Фурье к функции $f \in L_p(-\pi, \pi)$, $p > 1$. В работе [22] были введены суммы Абеля – Пуассона рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва [13] с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов и исследованы его аппроксимационные свойства на классах функций представимых функцией Маркова на отрезке $[-1, 1]$.

Целью настоящей работы является изучение аппроксимационных свойств сумм Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва на классах функций, задаваемых сингулярным интегралом вида (1). Представляет интерес получить соответствующие оценки равномерных приближений суммами Абеля – Пуассона и выяснить зависимость оценок от выбора полюсов аппроксимирующей функции.

2. Суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва и интегральное представление приближений

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на

отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [13]:

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v) \frac{\sin\left(\frac{v-u}{2} + \lambda_n(v, u)\right)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad x = \cos u, \quad (2)$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \lambda_n(y) dy, \quad \lambda_n(y) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{1 + 2|z_k| \cos(y - \arg z_k) + |z_k|^2}, \quad (3)$$

$$z_k = \frac{a_k}{1 + \sqrt{1 - a_k^2}}, \quad |z_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \rightarrow \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида:

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1 + a_k x)},$$

A – множество параметров $(a_1, \dots, a_n)$, $p_n(x)$ – некоторый многочлен степени не выше n , коэффициенты которого зависят от a_k , является точным на константах. В частности, если положить $a_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, то $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Пусть $q \in (0, n)$ – произвольное натуральное число. $A_q \subset A$ – есть множество параметров таких, что среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, ровно q различных и кратность каждого параметра равна t , $n = tq$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости. Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К. Н. Лунгу [23, 24].

Выражение

$$P_{r,q}(f, x) = (1 - r) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1], \quad r \in (0, 1), \quad (4)$$

назовем суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов типа Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами (см. [22]). Отметим, что из представления (4) и свойств рационального интегрального оператора Фурье – Чебышёва следует $P_{r,q}(1, x) = 1$.

Введём обозначения:

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}, x, A_q) = \hat{f}(x) - P_{r,q}(\hat{f}, x), \quad x \in [-1, 1], \quad (5)$$

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}, A_q) = \left\| \hat{f}(x) - P_{r,q}(\hat{f}, x) \right\|_{C[-1, 1]}, \quad r \in (0, 1). \quad (6)$$

ТЕОРЕМА 1. Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона (4) имеет место интегральное представление

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{1-r}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \sin v \frac{\cos \frac{v-u}{2} - r \cos\left(\frac{v-u}{2} - \lambda_q(v, u)\right)}{\sin \frac{v-u}{2} (1 - 2r \cos \lambda_q(v, u) + r^2)} dv, \quad (7)$$

где величина $\lambda_q(v, u)$ из (3), $x = \cos u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [12] установлено интегральное представление приближений на отрезке $[-1, 1]$ сингулярного интеграла (1) рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2)

$$\delta_n(\hat{f}, x, A) = \hat{f}(x) - s_n(\hat{f}, x) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \sin v \frac{\cos\left(\frac{v-u}{2} + \lambda_n(v, u)\right)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv, \quad (8)$$

где $x = \cos u$, $x \in [-1, 1]$.

Отметим, что интеграл справа является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши. Для его существования достаточно, чтобы плотностью удовлетворяла условию Липшица любого порядка. В случае q геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции, представление (8) примет вид

$$\delta_{mq}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \sin v \frac{\cos\left(\frac{v-u}{2} + m\lambda_q(v, u)\right)}{\sin \frac{v-u}{2}} dv,$$

где $n = mq$, $x = \cos u$, $x \in [-1, 1]$.

Из последнего представления, учитывая, что (см. [21, лемма 5])

$$\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} = e^{i\lambda_q(v, u)}, \quad \omega_q(\zeta) = \prod_{k=1}^q \frac{\zeta + z_k}{1 + \bar{z}_k \zeta}, \quad \xi = e^{iu}, \zeta = e^{iv},$$

нетрудно получить

$$\delta_{mq}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v) \sin v}{\zeta - \xi} \left(\zeta \frac{\omega_q^m(\zeta)}{\omega_q^m(\xi)} + \xi \frac{\omega_q^m(\xi)}{\omega_q^m(\zeta)} \right) dv. \quad (9)$$

С другой стороны, умножим правую и левую части равенства

$$\delta_{kq}(\hat{f}, x, A_q) = \hat{f}(x) - s_{kq}(\hat{f}, x), \quad x \in [-1, 1], \quad k = 0, 1, \dots$$

на $(1-r)r^k$, $r \in (0, 1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и просуммируем по k от 0 до $+\infty$. Тогда

$$(1-r) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k \delta_{kq}(\hat{f}, x, A_q) = \hat{f}(x) - (1-r) \sum_{k=0}^{+\infty} r^k s_{kq}(\hat{f}, x) = \varepsilon_{r,q}(\hat{f}, x, A_q), \quad x \in [-1, 1]. \quad (10)$$

Подставим соотношение (9) в (10) и заменим порядки суммирования и интегрирования. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{(1-r)i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v) \sin v}{\zeta - \xi} \left[\zeta \sum_{k=0}^{+\infty} \left(r \frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} \right)^k + \xi \sum_{k=0}^{+\infty} \left(r \frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)} \right)^k \right] dv.$$

Отметим, что справа находится сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Ряды в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями $|r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}| < 1$ и $|r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}| < 1$, где $\xi = e^{iu}$, $\zeta = e^{iv}$, $r \in (0, 1)$. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_{r,q}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{(1-r)i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v) \sin v}{\zeta - \xi} \left[\frac{\zeta}{1 - r\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}} + \frac{\xi}{1 - r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}} \right] dv. \quad (11)$$

После соответствующих алгебраических преобразований, последнее интегральное представление приводится к виду

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}, x, A_q) = -\frac{(1-r)i}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \sin v \frac{\zeta + \xi - r[\xi\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} + \zeta\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}]}{(\zeta - \xi)(1 - r[\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} + \omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}] + r^2)} dv.$$

Умножив числитель и знаменатель подынтегрального выражения на $2\sqrt{\xi\zeta}$ и заметив, что $\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} = e^{i\lambda_q(v, u)}$, где $\lambda_q(v, u)$ из (3), придем к (7). Теорема 1 доказана. $\square$

В теореме 1 положим значения параметров $z_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$. Тогда величина $\varepsilon_{r,0}(\hat{f}, x, O) = \varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}, x)$ представляет собой приближения сингулярного интеграла (1) суммами Абеля – Пуассона полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва. Отсюда получим

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}, x) = -\frac{(1-r)^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v) \sin v \frac{dv}{\operatorname{tg} \frac{v-u}{2} (1 - 2r \cos(v-u) + r^2)}, \quad x = \cos u. \quad (12)$$

3. Приближения сингулярных интегралов с плотностью, удовлетворяющей условию Липшица (полиномиальный случай)

Рассмотрим класс $\hat{H}^{(\gamma)}[-1, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$, функций, задаваемых сингулярными интегралами (1), с плотностью f , удовлетворяющей на отрезке $[-1, 1]$ условию Липшица степени γ , $\gamma \in (0, 1]$, с константой равной единице, то есть условию

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\gamma, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1].$$

Получим оценку сверху величины (12) уклонений сумм Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва от функции $\hat{f}(x) \in \hat{H}^{(\gamma)}[-1, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\hat{f}(x) \in \hat{H}^{(\gamma)}[-1, 1]$, $\gamma \in (0, 1]$, то при $r \rightarrow 1$ равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ справедлива оценка*

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f, x)| \leq \frac{\pi(\sqrt{1-x^2})^{\gamma+1}(1-r)^\gamma}{(\sqrt{r})^\gamma \sin \frac{\pi\gamma}{2}} + \mu_r^{(\gamma)}(x) + \delta_r^{(\gamma)}(x), \quad \gamma \in (0, 1], \quad (13)$$

где

$$\mu_r^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} O\left(|x|(\sqrt{1-x^2})^\gamma(1-r)^{\gamma+1}\right) + O\left(|x|^\gamma\sqrt{1-x^2}(1-r)^{2\gamma}\right), & \gamma \in (0, 1), \\ O\left(|x|\sqrt{1-x^2}(1-r)^2 \ln \frac{1}{1-r}\right), & \gamma = 1, \quad r \rightarrow 1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\delta_r^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} O(|x|^{\gamma+1}(1-r)^{2\gamma+1}), & \gamma \in (0, 1/2), \\ O\left(|x|^{\frac{3}{2}}(1-r)^2 \ln \frac{1}{1-r}\right), & \gamma = 1/2, \\ O(|x|^{\gamma+1}(1-r)^2), & \gamma \in (1/2, 1). \end{cases} \quad (15)$$

При этом:

$$\delta_r^{(\gamma)}(\pm 1) = \begin{cases} \frac{\pi(1-r)^{2\gamma+1}}{2\gamma(\sqrt{r})^{2\gamma+1} \sin \pi\gamma}, & \gamma \in (0, 1/2), \\ \frac{\sqrt{2}}{r}(1-r)^2 \ln \frac{1}{1-r}, & \gamma = 1/2, \\ \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\gamma-1/2)}{2^{2-\gamma}\Gamma(1+\gamma)}(1-r)^2, & \gamma \in (1/2, 1], \end{cases} \quad (16)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением приближений (12). Применив очевидное тождество

$$\varepsilon_r^{(0)}(1, x) = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

получим

$$|\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}, x)| \leq \frac{(1-r)^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos v - \cos u|^\gamma |\sin v| \frac{dv}{\left| \operatorname{tg} \frac{v-u}{2} \right| (1-2r \cos(v-u) + r^2)}, \quad x = \cos u.$$

Заметив, что подынтегральная функция в интеграле справа является 2π -периодической по переменному интегрирования, приходим к оценке

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f, x)| \leq \frac{(1-r)^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos(v+u) - \cos u|^\gamma |\sin(v+u)| \frac{dv}{\left| \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right| (1-2r \cos v + r^2)}, \quad x = \cos u.$$

Представим интеграл в последней оценке в виде суммы двух интегралов так, что

$$|\varepsilon_r^{(0)}(f, x)| \leq \frac{1}{2} [I_r(+u) + I_r(-u)], \quad r \in (0, 1), \quad (17)$$

где

$$I_r(\pm u) = (1-r)^2 \int_0^{\pi} |\cos(u \pm v) - \cos u|^\gamma |\sin(u \pm v)| \frac{dv}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} (1-2r \cos v + r^2)}, \quad x = \cos u. \quad (18)$$

Исследуем асимптотическое поведение интеграла $I_r(\pm u)$ при $r \rightarrow 1$ в зависимости от значения $\gamma \in (0, 1]$. Имеем

$$I_r(\pm u) = (1-r)^2 \int_0^{\pi} \left| \sin u \sin v \pm 2 \cos u \sin^2 \frac{v}{2} \right|^\gamma \frac{|\sin u \cos v \pm \cos u \sin v| dv}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} (1-2r \cos v + r^2)}, \quad x = \cos u.$$

Учитывая, что

$$|A \pm B|^\gamma = |A|^\gamma + \theta |B|^\gamma, \quad \theta \in [-1, 1],$$

получим

$$\begin{aligned} I_r(\pm u) = (1-r)^2 \Big(& |\sin u|^{\gamma+1} I_r^{(1)}(u) + |\cos u| |\sin u|^\gamma \theta_1 I_r^{(2)}(u) + \\ & + 2^\gamma |\cos u|^\gamma |\sin u| \theta_2 I_r^{(3)}(u) + 2^\gamma |\cos u|^{\gamma+1} \theta_3 I_r^{(4)}(u) \Big), \quad x = \cos u, \quad r \in (0, 1), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$I_r^{(1)}(u) = \int_0^\pi \frac{(\sin v)^\gamma |\cos v| dv}{\operatorname{tg} v/2(1 - 2r \cos v + r^2)}, \quad I_r^{(2)}(u) = \int_0^\pi \frac{(\sin v)^{\gamma+1} dv}{\operatorname{tg} v/2(1 - 2r \cos v + r^2)},$$

$$I_r^{(3)}(u) = \int_0^\pi \frac{(\sin v/2)^{2\gamma} |\cos v| dv}{\operatorname{tg} v/2(1 - 2r \cos v + r^2)}, \quad I_r^{(4)}(u) = \int_0^\pi \frac{(\sin v/2)^{2\gamma} \sin v dv}{\operatorname{tg} v/2(1 - 2r \cos v + r^2)}.$$

Проведём исследование каждого интеграла по отдельности. Рассмотрим интеграл $I_r^{(1)}(u)$. После соответствующих преобразований он приводится к виду

$$I_r^{(1)}(u) = 2^{\gamma+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos v)^{\gamma+1} (\sin v)^{\gamma-1}}{(1-r)^2 + (2\sqrt{r} \sin v)^2} dv + 2^{\gamma+2} \theta_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos v)^{\gamma+1} (\sin v)^{\gamma+1}}{(1-r)^2 + (2\sqrt{r} \sin v)^2} dv, \quad \theta_4 \in [-1, 1].$$

Воспользовавшись асимптотическим равенством [18, с. 138], получим, что при $r \rightarrow 1$

$$I_r^{(1)}(u) = \frac{2^{\gamma+1}}{(1-r)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v^{\gamma-1} dv}{1 + \left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}v\right)^2} + \frac{2^{\gamma+2}\theta_4}{(1-r)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{v^{\gamma+1} dv}{1 + \left(\frac{2\sqrt{r}}{1-r}v\right)^2} + O(1) =$$

$$= \frac{2(1-r)^{\gamma-2}}{(\sqrt{r})^\gamma} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}} \frac{v^{\gamma-1} dv}{1+v^2} + \frac{\theta_4(1-r)^\gamma}{(\sqrt{r})^{\gamma+2}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}} \frac{v^{\gamma+1} dv}{1+v^2} + O(1).$$

Заметив, что

$$\int_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}} \frac{v^{\gamma+1} dv}{1+v^2} = O((1-r)^{-\gamma}), \quad r \rightarrow 1,$$

находим

$$I_r^{(1)}(u) = \frac{2(1-r)^{\gamma-2}}{(\sqrt{r})^\gamma} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}} \frac{v^{\gamma-1} dv}{1+v^2} + O(1), \quad r \rightarrow 1.$$

Теперь с учетом того, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{\gamma-1} dv}{1+v^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\gamma}{2}}, & \gamma \in (0, 1), \\ \frac{\pi}{2}, & \gamma = 1, \end{cases}$$

будем иметь

$$I_r^{(1)}(u) = \frac{\pi}{(\sqrt{r})^\gamma \sin \frac{\pi\gamma}{2}} (1-r)^{\gamma-2} + O(1), \quad \gamma \in (0, 1]. \quad (20)$$

Применив аналогичные методы для исследования асимптотического поведения остальных интегралов, заключаем, что

$$I_r^{(2)}(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{(\sqrt{r})^{\gamma+1} \cos \frac{\pi\gamma}{2}} (1-r)^{\gamma-1} + O(1), & \gamma \in (0, 1), \\ \frac{2}{r} \ln \frac{1}{1-r} + O(1), & \gamma = 1, \end{cases} \quad (21)$$

$$I_r^{(3)}(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2\gamma} r^\gamma \sin \pi \gamma} (1-r)^{2\gamma-2} + O(1), & \gamma \in (0, 1), \\ \frac{1}{4r} \ln \frac{1}{1-r} + O(1), & \gamma = 1, \end{cases} \quad (22)$$

$$I_r^{(4)}(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2\gamma} \sqrt{r}^{2\gamma+1} \sin \pi \gamma} (1-r)^{2\gamma-1} + O(1), & \gamma \in (0, 1/2), \\ \frac{1}{r} \ln \frac{1}{1-r} + O(1), & \gamma = 1/2, \\ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\gamma - 1/2)}{4\Gamma(1 + \gamma)}, & \gamma \in (1/2, 1). \end{cases} \quad (23)$$

Из равенства (19) с учетом найденных асимптотических соотношений (20), (21), (22) и (23) следует, что

$$I_r(\pm u) = \frac{\pi(\sqrt{1-x^2})^{\gamma+1}(1-r)^\gamma}{(\sqrt{r})^\gamma \sin \frac{\pi\gamma}{2}} + \mu_r^{(\gamma)}(x) + \delta_r^{(\gamma)}(x), \quad \gamma \in (0, 1], \quad r \rightarrow 1,$$

где величина $\mu_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (14), $\delta_r^{(\gamma)}(x)$ определена в (15). Из последнего равенства и (17) непосредственно следует (13) Теорема 2 доказана. $\square$

4. Приближения сингулярного интеграла с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения суммами Абеля – Пуассона (4) сингулярного интеграла (1) с плотностью $f_s(x) = |x|^s$, $s \in (0, +\infty)$, то есть класса функций

$$\hat{f}_s(x) = 2x \int_0^1 \frac{t^s}{t^2 - x^2} \sqrt{1-t^2} dt, \quad x \in [-1, 1].$$

Для дальнейших рассуждений необходимо определенным образом выбрать параметры аппроксимирующей рациональной функции. При известном $s \in (0, +\infty)$ положим $n \mapsto 2n + 2p$, $p = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$, и A_{2q} – множество параметров $\{z_k\}_{k=1}^{2n}$, имеющих следующий вид:

$$z_k = -z_{q+k}, \quad z_k = i\alpha_k, \quad \alpha_k \in [0, 1), \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad n = mq, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

остальные $2p$ параметров положим равными нулю.

ТЕОРЕМА 3. Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$, $s \in (0, +\infty)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с q геометрически различными полюсами имеют место:

1) интегральное представление:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, x, A_{2q}) &= \frac{(-1)^p(1-r)}{2^{s-1}} \sin \frac{\pi s}{2} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2p-s-1} \cos \psi_r(x, t) dt}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \sqrt{1-2(-1)^q r \chi_q(t) M_q(x) + r^2 \chi_q^2(t)}}, \quad x = \cos u, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\psi_r(x, t) = \arg \frac{\xi^{2p+1}}{(1+t^2 \xi^2)(1-(-1)^q r \omega_q(\xi) \chi_q(t))}, \quad \chi_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2} \left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)} \right), \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u,$$

– рациональная функция Чебышёва – Маркова порядка q ;

2) поточечная оценка сверху

$$|\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, x, A_{2q})| \leq \frac{1-r}{2^{s-1}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \times \\ \times \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} dt}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \sqrt{1-2(-1)^q r \chi_q(t) M_q(x) + r^2 \chi_q^2(t)}}; \quad (26)$$

3) равномерная оценка сверху

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, A_{2q}) \leq \varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}), \quad r \in (0, 1), \quad (27)$$

где

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) = \frac{1-r}{2^{s-1}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1} (1+t^2) t^{2p-s-1}}{1-r|\chi_q(t)|} dt. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся соотношением (10). В работе [12] установлено интегральное представление приближений функции $\hat{f}_s(x)$ рациональным интегральным оператором Фурье – Чебышёва (2)

$$\delta_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A) = \frac{(-1)^n}{2^s} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s (1+t^2) t^{1-s} \left[\frac{\xi^3 \omega_{2n-2}(\xi)}{1+t^2 \xi^2} + \frac{\overline{\xi \omega_{2n-2}(\xi)}}{\xi^2 + t^2} \right] \chi_{2n-2}(t) dt,$$

где

$$\omega_{2n-2}(\xi) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\xi^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 \xi^2}, \quad \chi_{2n-2}(t) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0.$$

В случае, когда полюсы аппроксимирующей функции удовлетворяют условию (24), последнее интегральное представление примет вид

$$\delta_{2kq+2p}(\hat{f}_s, x, A_{2q}) = \frac{((-1)^q)^k (-1)^p}{2^s} \sin \frac{\pi s}{2} \times \\ \times \int_0^1 (1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} \left[\frac{\xi^{2p+1} \omega_q^k(\xi)}{1+t^2 \xi^2} + \frac{\overline{\xi \xi^{2p} \omega_q^k(\xi)}}{\xi^2 + t^2} \right] \chi_q^k(t) dt, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

где $\omega_q(\xi)$ определена в (25).

Умножим правую и левую части в последнем интегральном представлении на $(1-r)r^k$, $r \in (0, 1)$, и просуммируем по k от 0 до $+\infty$. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, x, A_{2q}) = \frac{(-1)^p (1-r)}{2^s} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} \times \\ \times \left[\frac{\xi^{2p+1}}{1+t^2 \xi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} ((-1)^q r \omega_q(\xi) \chi_q(t))^k + \frac{\overline{\xi \xi^{2p}}}{\xi^2 + t^2} \sum_{k=0}^{+\infty} ((-1)^q r \overline{\omega_q(\xi)} \chi_q(t))^k \right] dt.$$

Ряды в подынтегральной функции представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями соответственно $|(-1)^q r \omega_q(\xi) \chi_q(t)| < 1$ и $|(-1)^q r \overline{\omega_q(\xi)} \chi_q(t)| < 1$ поэтому сходятся равномерно. Отсюда находим

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, x, A_{2q}) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^s} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 (1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} \times \\ \times \left[\frac{\xi^{2p+1}}{(1+t^2\xi^2)(1-(-1)^q r \omega_q(\xi) \chi_q(t))} + \frac{\xi \overline{\xi^{2p}}}{(\xi^2+t^2)(1-(-1)^q r \overline{\omega_q(\xi)} \chi_q(t))} \right] dt, \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках подынтегрального выражения являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (25) достаточно выполнить соответствующие преобразования и воспользоваться представлением косинус-дроби Чебышёва – Маркова (см., напр., [25]):

$$M_q(x) = \frac{1}{2} \left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)} \right), \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u.$$

Оценка сверху (26) легко следует из интегрального представления (25).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 3 в поточечной оценке (26) воспользуемся легко проверяемыми неравенством

$$\sqrt{1 - 2(-1)^q r \chi_q(t) M_q(x) + r^2 \chi_q^2(t)} \geq 1 - r |\chi_q(t)|, \quad r \in (0, 1).$$

Теорема 3 доказана. $\square$ В теореме 3 положим значения параметров $\alpha_k = 0, k = 1, 2, \dots, q$. Тогда величина $\varepsilon_{r,0}(\hat{f}_s, x, O) = \varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s, x)$ представляет собой приближения сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$, $s \in (0, +\infty)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва имеют место:

1) интегральное представление:

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s, x) = \frac{(-1)^p(1-r)}{2^{s-1}} \sin \frac{\pi s}{2} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} \cos \psi_r^{(0)}(x, t) dt}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \sqrt{1+2rt^2 \cos 2u + r^2 t^4}}, \quad p = \left[\frac{s}{2} \right] + 1,$$

где

$$\psi_r^{(0)}(x, t) = (2p+1)u - \arg(1+t^2\xi^2)(1+r\xi^2 t^2), \quad \xi = e^{iu}, \quad x = \cos u;$$

2) поточечная оценка сверху

$$|\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s, x)| \leq \frac{1-r}{2^{s-1}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^s (1+t^2) t^{2p-s-1} dt}{\sqrt{1+2t^2 \cos 2u + t^4} \sqrt{1+2rt^2 \cos 2u + r^2 t^4}},$$

3) равномерная оценка сверху

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s) \leq \frac{1-r}{2^{s-1}} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{s-1} (1+t^2) t^{2p-s-1} dt}{1-rt^2}, \quad r \in (0, 1). \quad (29)$$

5. Асимптотическое выражение мажоранты приближений

Исследуем асимптотическое поведение мажоранты (28) равномерной оценки (27) при $r \rightarrow 1$. Для решения поставленной задачи в правой части (28) выполним замену переменного по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du/((1+u)^{3/2}(1-u)^{1/2})$. Тогда

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) = 2(1-r) \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|}, \quad (30)$$

где

$$\pi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1 - \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $r \in (0, 1)$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$. То есть, в общем случае $\beta_k = \beta_k(r)$, $k = 1, 2, \dots, q$. При этом будем полагать, что параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, удовлетворяют следующему условию

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1-r} \sum_{k=1}^q \beta_k = \infty, \quad k = 1, 2, \dots, q, \quad (31)$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Без нарушения общности пусть параметры β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q \leq \beta_{q-1} \leq \dots \leq \beta_1 \leq 1.$$

ТЕОРЕМА 4. При любом $s \in (0, +\infty)$ для мажоранты равномерных приближений (30) при $r \rightarrow 1$ имеют место асимптотические равенства

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) \sim \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \begin{cases} \frac{2^{1-s} \pi (1-r)^s}{\sin \pi s \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^s} + (1-r) \Psi_r^{(s)}(A_q), & s \in (0, 1), \\ \frac{1-r}{\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} \ln(1 + \varphi(r, A_q)) + (1-r) \Psi_r^{(1)}(A_q), & s = 1, \\ (1-r) \left(\Theta_r^{(s)}(A_q) + \Psi_r^{(s)}(A_q) \right), & s \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_r^{(s)}(A_q) &= 2 \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-\pi_q(u)}, \\ \Psi_r^{(s)}(A_q) &= 2 \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} + \\ &\quad + 2 \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача сводится к изучению асимптотического поведения интеграла в правой части представления (30) при $r \rightarrow 1$. Мажоранту (30) представим в виде суммы

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) = 2(1-r) \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left(I_r^{(1)} + I_r^{(2)} + I_r^{(3)} \right), \quad r \in (0, 1), \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} I_r^{(1)} &= \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-r\pi_q(u)}, \\ I_r^{(2)} &= \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|}, \\ I_r^{(3)} &= \int_{\beta_1}^1 \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-r|\pi_q(u)|}. \end{aligned}$$

Выясним, как ведет себя при $r \rightarrow 1$ каждый из $(q+1)$ интегралов по отдельности.

Изучим интеграл $I_r^{(1)}$. Пусть $s \in (0, 1]$. Заметим, в этом случае что параметр β_q целесообразно выбирать сколь угодно близким к нулю. Ввиду этого асимптотика интеграла $I_r^{(1)}$ будет определяться поведением подынтегральной функции в непосредственной близости нуля переменного интегрирования. Воспользуемся приемом Ю. И. Русецкого [18, с. 138]. Учитывая, что

$$\pi_q(u) = 1 - 2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) u + O \left(2 \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^2 u^2 \right), \quad u \rightarrow 0,$$

равномерно по $r \in [0, 1)$ при $u \in (0, \beta_q)$ будет

$$\begin{aligned} & \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{1}{1-r\pi_q(u)} - \frac{u^{s-1}}{1-r \left(1 - 2u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)} = \\ &= O \left(\frac{2ru^{s+1} \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^2}{\left(1 - r \left(1 - 2u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right) \right)^2} \right) + O \left(\frac{u^s}{1 - r \left(1 - 2u \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)} \right). \end{aligned}$$

Из последнего порядкового соотношения находим, что

$$\begin{aligned} I_r^{(1)} &= \frac{1}{1-r} \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1} du}{1 + \frac{2ru}{1-r} \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} + \\ &+ O \left(\frac{2r}{(1-r)^2} \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^2 \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s+1} du}{\left(1 + \frac{2ru}{1-r} \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \right)^2} \right) + O \left(\frac{1}{1-r} \int_0^{\beta_q} \frac{u^s du}{1 + \frac{2ru}{1-r} \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}} \right). \end{aligned}$$

После замены переменного интегрирования по формуле $2ru(\sum_{k=1}^q 1/\beta_k)/(1-r) \mapsto u$, в каждом из интегралов справа получим

$$I_r^{(1)} = \frac{(1-r)^{s-1}}{\left(2r \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^s} \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^{s-1} du}{1+u} +$$

$$+ O \left(\frac{(1-r)^s}{(2r)^{s+1} \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^s} \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^{s+1} du}{(1+u)^2} \right) + O \left(\frac{(1-r)^s}{(2r)^{s+1} \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{s+1}} \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^s du}{1+u} \right), \quad (34)$$

где в силу условия (31) $\varphi(r, A_q) = ((2r\beta_q)/(1-r)) \sum_{k=1}^q 1/\beta_k \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 1$.

Учитывая, что

$$\int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^{s+1} du}{(1+u)^2} = O([\varphi(r, A_q)]^s), \quad \int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^s du}{1+u} = O([\varphi(r, A_q)]^s), \quad r \rightarrow 1,$$

а также

$$\int_0^{\varphi(r, A_q)} \frac{u^{s-1} du}{1+u} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sin \pi s} + O([\varphi(r, A_q)]^{s-1}), & s \in (0, 1), \\ \ln(1 + \varphi(r, A_q)), & s = 1, \end{cases}$$

из (34) получим при $r \rightarrow 1$

$$I_r^{(1)} \sim \begin{cases} \frac{\pi(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s \left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0, 1), \\ \frac{\ln(1 + \varphi(r, A_q))}{2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}}, & s = 1. \end{cases}$$

Последние асимптотические оценки интеграла $I_r^{(1)}$ были получены для $s \in (0, 1]$. Если же $s > 1$, то интеграл (см. (33)) существует при любом значении $r \in (0, 1]$. Переходя к пределу при $r \rightarrow 1$ под знаком интеграла получим

$$I_r^{(1)} = \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-\pi_q(u)}, \quad s > 1.$$

Следовательно,

$$I_r^{(1)} \sim \begin{cases} \frac{\pi(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s \left(2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0, 1), \\ \frac{\ln(1 + \varphi(r, A_q))}{2 \sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}}, & s = 1, \\ \int_0^{\beta_q} \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{du}{1-\pi_q(u)}, & s > 1, \quad r \rightarrow 1. \end{cases} \quad (35)$$

Займемся исследованием величины $I_r^{(2)}$ (см. (33)). Подынтегральные функции в каждом из $q-1$ слагаемых в сумме справа на соответствующих интервалах $[\beta_{j+1}, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, q-1$, непрерывны по переменному u и соответствующие интегралы представляют собой функции параметров $\beta_k \in (0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, q$. Выполнив, в каждом из $q-1$ интегралов предельный переход при $r \rightarrow 1$, приходим к асимптотическому равенству

$$I_r^{(2)} \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1} \left(1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)}, \quad r \rightarrow 1. \quad (36)$$

Рассуждая аналогичным образом, находим, что

$$I_r^{(3)} \sim \int_{\beta_1}^1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p \frac{u^{s-1} du}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1} \left(1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \right)}, \quad r \rightarrow 1. \quad (37)$$

Теперь из равенства (33) на основании асимптотических соотношений (35) и (36), (37) придем к (32). Теорема 3 доказана. $\square$ Положив в теореме 4 значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$, где $\beta_k = (1 - \alpha_k)/(1 + \alpha_k)$, величина $\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, O) = \varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s)$ представляет собой мажоранту равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва. В этом случае из теоремы 4 получим

СЛЕДСТВИЕ 3. Для равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона полиномиального ряда Фурье – Чебышёва справедливы оценки

$$\varepsilon_r^{(0)}(\hat{f}_s) \leq \begin{cases} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \frac{2^{1-s} \pi (1-r)^s}{\sin \pi s}, & s \in (0, 1), \\ (1-r) \ln \frac{2}{1-r}, & s = 1, \\ (1-r) \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \int_0^1 \frac{u^{s-2} du}{(1-u)^{\frac{s}{2}+1-p} (1+u)^{\frac{s}{2}+p}}, & s \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (38)$$

В теореме 4 положим значение $q = 1$. В этом случае аппроксимирующая функция имеет два взаимно комплексно-сопряженных полюса в расширенной комплексной плоскости. Тогда

СЛЕДСТВИЕ 4. При любом $s \in (0, +\infty)$ для мажоранты равномерных приближений (30) суммами Абеля – Пуассона с двумя геометрически различными полюсами при $r \rightarrow 1$ имеют место асимптотические равенства

$$\varepsilon_{r,1}^*(\hat{f}_s, A_2) \sim \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \begin{cases} \frac{2^{1-s} \pi (1-r)^s \beta^s}{\sin \pi s} + \frac{1-r}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} (u + \beta)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right) du, & s \in (0, 1), \\ (1-r) \beta \ln \frac{2}{1-r} + \frac{1-r}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{(u + \beta)}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right) du, & s = 1, \\ (1-r) F_{s,1}(\beta), & s \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (39)$$

где

$$F_{s,1}(\beta) = \int_0^{\beta} \frac{u^{s-2} (\beta + u)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p du + \frac{1}{\beta} \int_{\beta}^1 \frac{u^{s-1} (\beta + u)}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p du.$$

6. Наилучшая оценка приближений суммами Абеля – Пуассона

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношений (32) посредством выбора оптимального для этой задачи набора параметров $(\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$, то есть найти наилучшую мажоранту равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона (4). Положим

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s) = \inf_{A_{2q}} \varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}), \quad \varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) = \inf_{A_{2q}} \varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s, A_{2q})$$

где $\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q})$ асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений сингулярного интеграла $\hat{f}_s(x)$ суммами Абеля – Пуассона (4), определенное в (32). Отметим, что из (27) очевидным образом следует, что

$$\varepsilon_{r,q}(\hat{f}_s) \leq \varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s), \quad r \in (0, 1).$$

ТЕОРЕМА 5. Для любого $s \in (0, +\infty)$ при $r \rightarrow 1$ справедливы асимптотические равенства

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s) \sim \begin{cases} \mu(q, s)(1-r)^{1-\frac{(1-s)^q}{1+s}}, & s \in (0, 1), \\ \frac{2}{\sqrt{3}}(1-r)\sqrt{1+\ln_q \frac{2}{1-r}}, & s = 1, \\ 2 \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \inf_{A_{2q}} F_{s,q}(A_{2q})(1-r), & s \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (40)$$

где

$$\mu(q, s) = \sin \frac{\pi s}{2} (c_1(s))^{\frac{s}{1+s}} \frac{1+s}{s^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}} (1-s)^{\frac{1-(1+s)(1-s)^{q-1}}{s(1+s)}}} \left(\frac{2^{1-s}\pi}{\sin \pi s} \right)^{\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}},$$

$$c_1(s) = \int_0^1 \frac{u^s}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}(s+2)} \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right), \quad (41)$$

$$\ln_q \frac{2}{1-r} = \underbrace{\ln \left(1 + \dots \ln \left(1 + \ln \ln \frac{2}{1-r} \right) \right)}_{q \text{ раз}},$$

$$F_{s,q}(A_{2q}) = \int_0^{\beta_q} \nu_s(u) \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}} + \sum_{j=1}^{q-1} \int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \nu_s(u) \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}} +$$

$$+ \int_{\beta_1}^1 \nu_s(u) \frac{du}{1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k}}, \quad \nu_s(u) = \frac{u^{s-1}}{(1-u^2)^{\frac{s}{2}+1}} \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исследуем асимптотические равенства (32). Пусть $s \in (0, 1]$. При постоянных значениях параметров β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, порядок в указанных соотношениях, очевидно, не отличается от полиномиального, найденного в следствии 3. Наряду с выполнением условий (31), будем полагать, что параметры удовлетворяют следующим условиям $\beta_k = \beta_k(r) \rightarrow 0$ и

$\beta_{k+1}(r) = o(\beta_k(r))$ при $r \rightarrow 1$. В этом случае нетрудно получить, что при $r \rightarrow 1$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{\beta_q},$$

$$1 - \prod_{k=1}^j \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2u}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad u \in [\beta_{j+1}, \beta_j],$$

$$1 - \prod_{k=1}^q \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2\beta_1}{u}, \quad u \in [\beta_1, 1].$$

При этом (32) примет вид

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) \sim (1-r)\Phi_r^{(s)}(A_q), \quad r \rightarrow 1, \quad (42)$$

где

$$\Phi_r^{(s)}(A_q) = \frac{1}{1-s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left(\frac{2^{1-s} \pi (1-s)(1-r)^{s-1} \beta_q^s}{\sin \pi s} + \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{1-s}} + \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1} \right), \quad s \in (0, 1),$$

$$\Phi_r^{(1)}(A_q) = \beta_q \ln \frac{2}{1-r} + \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j \ln \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} + \frac{1}{3\beta_1}, \quad s = 1,$$

$c_1(s)$ из (41).

При каждом фиксированном $s \in (0, 1]$ правые части асимптотических равенств (42) представляют собой функции переменных β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, непрерывные в каждой точке q -мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(r) > 0$ – некоторая величина, зависящая от r , и при любом r ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса эти функции имеют строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*)$. Причем поскольку $\beta_k = 1, k = 1, \dots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k = \beta_k(r) \rightarrow 0, r \rightarrow 1$, достаточно большой скоростью эти функции неограниченно растут, то можно предположить, что β^* – внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того, чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства решим экстремальную задачу

$$\Phi_r^{(s)}(A_q) \xrightarrow{A_q} \inf.$$

Так, для случая $s \in (0, 1)$ приходим к задаче

$$\Phi_r^{(s)}(A_q) = \frac{1}{1-s} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \left(c_q \beta_q^s + \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-s}} + \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-s}} + \dots + \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-s}} + \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1} \right) \xrightarrow{A_q} \inf, \quad (43)$$

где для краткости положено

$$c_q = c_q(r, s) = \frac{2^{1-s} \pi (1-s)(1-r)^{s-1}}{\sin \pi s} \xrightarrow{r \rightarrow 1} \infty.$$

Функция $\Phi_r^{(s)}(A_q)$ переменных $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0, 1)^q$. Естественнo искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие

экстремума: $\partial \Phi_r^{(s)}(A_q)/\partial \beta_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} sc_q \beta_q^{s-1} - (1-s) \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-s}} = 0, \\ \frac{1}{\beta_q^{1-s}} - (1-s) \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-s}} = 0, \\ \frac{1}{\beta_{q-1}^{1-s}} - (1-s) \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}^{2-s}} = 0, \\ \dots \\ \frac{1}{\beta_3^{1-s}} - (1-s) \frac{\beta_1}{\beta_2^{2-s}} = 0, \\ \frac{1}{\beta_2^{1-s}} - (1-s) \frac{c_1(s)}{\beta_1^2} = 0, \end{cases} \quad (44)$$

из которой последовательно находим:

$$\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{1-s}} = \frac{sc_q \beta_q^s}{1-s}, \quad \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{1-s}} = \frac{sc_q \beta_q^s}{(1-s)^2}, \dots, \quad \frac{\beta_1}{\beta_2^{1-s}} = \frac{sc_q \beta_q^s}{(1-s)^{q-1}}, \quad \frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1} = \frac{sc_q \beta_q^s}{(1-s)^{q-1}}.$$

Подставив последние соотношения в правую часть (43), получим

$$\Phi_r^{(s)}(A_q^*) = \frac{1+s}{(1-s)^q} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| (\beta_q^*)^s c_q. \quad (45)$$

Осталось найти оптимальный параметр β_q^* . С этой целью снова обратимся к системе (44). Последовательно находим

$$\begin{cases} \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \frac{sc_q}{1-s}, \\ \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = \frac{1}{1-s} \left(\frac{sc_q}{1-s} \right)^{1-s} = \frac{(sc_q)^{1-s}}{(1-s)^{1+(1-s)}}, \\ \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{1-s} \left(\frac{sc_q}{1-s} \right)^{1-s} \right)^{1-s} = \frac{(sc_q)^{(1-s)^2}}{(1-s)^{1+(1-s)+(1-s)^2}}, \\ \dots \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(sc_q)^{(1-s)^{(q-2)}}}{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^{(q-1)}}{s}}}. \end{cases} \quad (46)$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (44) получим

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \left(\frac{(1-s)c_1(s)}{\beta_1^{1+s}} \right)^{\frac{1}{1-s}}.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (46) будем иметь

$$\beta_1 = (c_1(s))^{\frac{1}{1+s}} \frac{(1-s)^{\frac{1-(1-s)^q}{s(1+s)}}}{(sc_q)^{\frac{(1-s)^{(q-1)}}{1+s}}}.$$

Учитывая, что

$$\beta_q^s = \frac{(1-s)^q c_1(s)}{\beta_1 s c_q},$$

найдем

$$(\beta_q^*)^s = (c_1(s))^{\frac{s}{1+s}} \frac{(1-s)^{q-\frac{1-(1-s)^{q-1}}{s(1+s)}}}{(s c_q)^{1-\frac{(1-s)^{q-1}}{1+s}}}.$$

Из соотношений (42) и (45) с учетом полученного представления параметра β_q^* после необходимых алгебраических преобразований, приходим к первому асимптотическому равенству в (40).

Исследуем случай $s = 1$ (см. (42)). Тут приходим к задаче оптимизации

$$\Phi_r^{(1)}(A_q) = \beta_q \ln \frac{2}{1-r} + \sum_{j=1}^{q-1} \beta_j \ln \frac{\beta_j}{\beta_{j+1}} + \frac{1}{3\beta_1} \xrightarrow{A_q} \inf. \quad (47)$$

Для поиска оптимальных значений параметров β_k , $k = 1, 2, \dots, q$, запишем систему необходимых условий экстремума

$$\begin{cases} \ln \frac{2}{1-r} - \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 0, \\ \ln \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} + 1 - \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 0, \\ \ln \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} + 1 - \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 0, \\ \dots \\ \ln \frac{\beta_2}{\beta_3} + 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} = 0, \\ \ln \frac{\beta_1}{\beta_2} + 1 - \frac{1}{3\beta_1^2} = 0. \end{cases} \quad (48)$$

Из (47) и полученной системы находим, что

$$\begin{aligned} \Phi_r^{(1)}(A_q^*) &= \beta_q^* \ln \frac{2}{1-r} + \beta_{q-1} \left(\frac{\beta_{q-2}^*}{\beta_{q-1}^*} - 1 \right) + \beta_{q-2}^* \left(\frac{\beta_{q-3}^*}{\beta_{q-2}^*} - 1 \right) + \dots \\ &\dots + \beta_2^* \left(\frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} - 1 \right) + \beta_1^* \left(\frac{1}{3(\beta_1^*)^2} - 1 \right) + \frac{1}{3(\beta_1^*)^2} = \frac{2}{3\beta_1^*}. \end{aligned} \quad (49)$$

Осталось найти оптимальный параметр β_1^* . С этой целью снова обратимся к системе (48).

Имеем

$$\begin{cases} \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = \ln \frac{2}{1-r}, \\ \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln \frac{\beta_{q-1}}{\beta_q} = 1 + \ln \ln \frac{2}{1-r}, \\ \frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}} = 1 + \ln \frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}} = 1 + \ln \left(1 + \ln \ln \frac{2}{1-r} \right), \\ \dots \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} = 1 + \ln_{q-1} \frac{2}{1-r}, \\ \frac{1}{3\beta_1^2} = 1 + \ln_q \frac{2}{1-r}, \end{cases}$$

где величина $\ln_q 2/(1-r)$ определена в формулировке настоящей теоремы. Следовательно,

$$\beta_1^* = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{1 + \ln_q \frac{2}{1-r}}}, \quad r \rightarrow 1.$$

Из асимптотического равенства (42), соотношения (49) и найденного оптимального параметра β_1^* получим второе асимптотическое равенство в (40).

Пусть $s \in (1, +\infty)$. Тогда из (32) находим, что

$$\varepsilon_{r,q}^*(\hat{f}_s, A_{2q}) \sim 2 \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| (1-r) F_{s,q}(A_{2q}), \quad r \rightarrow \infty,$$

где величина $F_{s,q}(A_{2q})$ определена в формулировке настоящей теоремы. На основании этого представления заключаем, что в рассматриваемом случае оптимальный набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ не зависит от r и не влияет на скорость убывания мажоранты. Следовательно, приходим к третьему асимптотическому равенству в (40). Теорема 5 доказана. $\square$

Пусть $q = 1$. Другими словами аппроксимирующая функция имеет два геометрически-различных комплексно-сопряженных полюса в расширенной комплексной плоскости. В этом случае мы находимся в условиях следствия 4. Тогда для наилучшей мажоранты равномерных приближений справедливы асимптотические равенства

$$\varepsilon_{r,1}^*(\hat{f}_s) \sim \begin{cases} (1+s) \sin \frac{\pi s}{2} \left(\frac{(c_1(s))^s 2^{1-s} \pi}{s^s \sin \pi s} \right)^{\frac{1}{1+s}} (1-r)^{\frac{2s}{1+s}}, & s \in (0, 1), \\ \frac{2}{\sqrt{3}} (1-r) \sqrt{\ln \frac{2}{1-r}}, & s = 1, \\ 2 \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| \inf_{\beta} F_{s,1}(\beta) (1-r), & s \in (1, +\infty), \end{cases}$$

где величина $c_1(s)$ определена в теореме 5, функция $F_{s,1}(A_2)$ определена в следствии 4. Поскольку величина $2s/(1+s) > s$, $s \in (0, 1)$, то полученная скорость равномерных приближений в этом случае является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. следствие (3)). Аналогичный вывод следует и в случае $s = 1$. При $s \in (1, +\infty)$ скорость убывания наилучшей мажоранты имеет тот же порядок малости, что и в полиномиальном случае, а набор параметров является оптимальным в том смысле, что он минимизирует константу.

7. Заключение

Исследованы рациональные аппроксимации класса функций на отрезке $[-1, 1]$, задаваемых сингулярным интегралом вида (1). Аппаратом приближений выступают суммы Абеля – Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышёва с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1, 1]$ сингулярных интегралов вида (1) с плотностью $|x|^s$, $s \in (0, +\infty)$, введенными суммами Абеля – Пуассона. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $r \rightarrow 1$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. Следствием полученных результатов являются оценки приближений и асимптотическое выражение мажоранты приближений сингулярных интегралов вида (1) с плотностью $|x|^s$, $s \in (0, +\infty)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля – Пуассона полиномиальных рядов Фурье – Чебышёва.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции в некоторых случаях возможно добиться скорости равномерных приближений рациональными суммами Абеля – Пуассона выше в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот результат справедлив уже в случае аппроксимирующей функции с двумя комплексно-сопряженными полюсами.

Автор выражает особую благодарность доктору физико-математических наук, профессору Ровбе Евгению Алексеевичу за помощь при написании настоящей статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 543 с.
2. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. // М.: Наука, 1968. 513 с.
3. Моторный В. П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр. мат. жур. 2001. Т. 53, № 3. С. 331-345.
4. Elliott D., Paget D. On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals // Numer. Math. 1975. Vol. 23, № 4. P. 311-319.
5. Шешко М. А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла // Изв. вузов. Матем. 1976. № 12. С. 108-118.
6. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши // Владикавказский матем. жур. 2008. Т. 10, № 4. С. 61-75.
7. Саакян А. В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов // Проблемы механики тонких деформируемых тел, посв. 80-летию акад. С. А. Амбарцумяна. Ереван. 2002. С. 259-265.
8. Габдулхаев Б. Г. Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1980. Т. 18. С. 251-307.

9. Русак В. Н. Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1993. № 2. С. 22–26.
10. Бокша А. Н. Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физ. Мат. Инф. 1997. № 3. С. 68-71.
11. Русак В. Н., Узис А. Х. Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью // Изв. БГПУ. Сер 3. Физ. Матем. Инф. Биол. Геогр. 2009. № 1(59). С. 8-11.
12. Поцейко, П. Г., Ровба Е. А. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье-Чебышева // Математический сборник. 2024. Т. 215. № 7. С. 96– 137.
13. Ровба Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968-971.
14. Натансон И. П. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 72, № 1. С. 11-14.
15. Тиман А. Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Доклады АН СССР. 1950. Т. 74, № 1. С. 17-20.
16. Жук В. В. О порядке приближения непрерывной 2π -периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье // Математические заметки. – 1968. – Т. 4, № 1. – С. 21–32.
17. Штарк Э. Л. Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из $Lip\ 1$ от сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Математические заметки. 1973. Т. 13, № 1. С. 21–28.
18. Русецкий Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона // Сибирский математический журнал. 1968. Т. 9, № 1. С. 136-144.
19. Жигалло Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышёва // Проблемы управления и информатики. 2018. Т. 3. С. 1-14.
20. Китбальян, А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам // Известия АН АССР. 1963. Т. XVI, № 6. С. 3-24.
21. Джрбашян М. М. К теории рядов Фурье по рациональным функциям // Известия АН Армянской ССР. Сер. Математика. 1956. Т. 9, № 7. С. 1-27.
22. Поцейко, П. Г., Ровба Е. А. О рациональных суммах Абеля – Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6-24.
23. Лунгу К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Математический сборник. 1971. Т. 86(128), № 2(10). С. 314-324.
24. Лунгу К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 15, № 2. С. 151-160.
25. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения // Минск: БГУ, 1979. 178 с.

REFERENCES

1. Gakhov, F.D. 1958, "Boundary value problems", *M.: State Publishing House of Physics and Mathematics. lit.*, 543 p., (in russian).
2. Muskhelishvili, N.I. 1968, "Singular integral equations. 3rd ed", *M.: Science*, 513 p., (in russian).
3. Motorny, V.P., 2001, "Approximation of some classes of singular integrals by algebraic polynomials", *Ukr. mat. Journal*, vol. 53, no. 3, pp. 331-345, (in russian).
4. Elliott, D., Paget, D., 1975, "On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals" *Numer. Math.*, vol. 23, no 4. pp. 311-319.
5. Sheshko, M.A., 1976, "On the convergence of quadrature processes for a singular integral", *Izv. vuzov. Matem.*, no. 12, pp. 108-118, (in russian).
6. Hubezhty, Sh.S., 2008, "Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy kernel", *Vladikavkazsky math. Jour.*, vol. 10, no. 4, pp. 61-75, (in russian).
7. Sahakyan, A.V., 2002, "Quadrature formulas of the Gauss type for singular integrals", «*Problems of mechanics of thin deformable bodies*», dedicated to the 80th anniversary of Academician S.A.Ambartsumyan. Yerevan, pp. 259-265, (in russian).
8. Gabdulkhayev, B. G., 1980, "Finite-dimensional approximations of singular integrals and direct methods for solving special integral and integro-differential equations", *Results of science and technology. Mat. anal.*, vol. 18, pp. 251-307, (in russian).
9. Rusak, V.N., 1993, "Uniform rational approximation of singular integrals", *Izv. NAS of Belarus. Ser. phys.-mat. sciences*, no. 2, pp. 22-26, (in russian).
10. Boksha, A.N. 1997, "Approximation of singular integrals by rational functions in a uniform metric", *Vestn. Bel. gos. un. Ser. 1, Phys. Mat. Inf.*, no. 3, pp. 68-71, (in russian).
11. Rusak, V.N., Uasis, A.H., 2009, "Rational approximation of singular integrals with differentiable density", *Izv. BSPU. Ser 3. Phys. Math. Inf. Biol. Geogr.*, no. 1(59), pp. 8-11, (in russian).
12. Potseiko, P. G., Rovba, E. A., 2024, "Approximations of one singular integral on an interval by Fourier–Chebyshev rational integral operators", *Sb. Math.*, vol. 215, no. 7, pp. 953–992.
13. Rovba, E. A., 1979, "On one direct method in rational approximation", *Dokl. AN OF the BSSR*, vol. 23, no. 11, pp. 968-971, (in russian).
14. Natanson, I. P., 1950, "On the order of approximation of a continuous 2π -periodic function using its Poisson integral" *Reports of the USSR Academy of Sciences*, vol. 72, no. 1, pp. 11-14, (in russian).
15. Timan, A.F., 1950, "An accurate estimation of the remainder when approximating periodic differentiable functions by Poisson integrals", *Reports of the USSR Academy of Sciences* vol. 74, no. 1, pp. 17-20, (in russian).
16. Zhuk, V. V., 1968, "On the order of approximation of a continuous 2π -periodic function using Feyer and Poisson averages of its Fourier series", *Mathematical Notes*, vol. 4, no. 1, pp. 21-32, (in russian).

17. Stark, E. L., 1973, "Complete asymptotic decomposition for the upper face of the deviation of functions from Lip 1 from the singular integral of Abel – Poisson", *Mathematical notes*, vol. 13, no. 1. pp. 21–28, (in russian).
18. Rusetsky, Yu. I., 1968, "On the approximation of continuous functions on a segment by Abel – Poisson sums", *Siberian Mathematical Journal* vol. 9, no. 1, pp. 136-144, (in russian).
19. Zhigallo, T. V., 2018, "Approximation of functions satisfying the Lipschitz condition on a finite segment of the real axis by Poisson – Chebyshev integrals", *Problems of management and computer science*, vol. 3. pp. 1-14, (in russian).
20. Kitbalyan, A. A., 1963, "Decompositions by generalized trigonometric systems", *Izvestiya AN ASSR*, Vol. XVI, no. 6, pp. 3-24, (in russian).
21. Djrbashyan, M. M., 1956, "On the theory of Fourier series for rational functions", *Izvestiya AN of the Armenian SSR, Ser. matematika*, vol. 9, no. 7, pp. 1-27, (in russian).
22. Potseiko, P. G., Rovba, E. A., 2021, "On rational Abel – Poisson sums on a segment and approximation of Markov functions", *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science*, vol. 3, pp. 6-24, (in russian).
23. Lungu, K. N., 1971 "On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles", *Mathematical collection*, vol. 86(128), no 2(10), pp. 314-324, (in russian).
24. Lungu, K. N., 1984, "On the best approximations by rational functions with a fixed number of poles", *Siberian Mathematical Journal*, vol. 15, no. 2, pp. 151-160.
25. Rusak, V. N., 1979, "Rational functions as an approximation apparatus", Mn.: BSU, 178 p.

Получено: 10.06.24

Принято в печать: 26.12.2024