

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.977

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-90-112

Периодическое управление биосообществом и гомеоморфизмы окружности

А. Н. Кириллов

Кириллов Александр Николаевич — доктор физико-математических наук, Институт прикладных математических исследований Карельского научного центра РАН (г. Петрозаводск).
e-mail: krllv1812@yandex.ru

Аннотация

Предлагается и исследуется математическая модель периодического процесса управления, предназначенная для решения экологической проблемы сохранения видовой структуры биосообщества «хищник-жертва». Модель основана на сведении непрерывной динамики к дискретной, порожденной гомеоморфизмами окружности.

Динамика взаимодействия видов описывается трехмерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Два уравнения задают систему Лотки – Вольтерры, а третье — динамику пищевой привлекательности участка, понятие которой введено в [1]. Специфика системы такова, что ее траектории принадлежат инвариантным цилиндрическим поверхностям, что позволяет провести полное качественное исследование системы.

Моделируется следующий процесс. В некоторый момент времени на участок вводится популяция хищника для уменьшения роста популяции жертвы, которая рассматривается как вредный вид. Это широко распространенная в практике процедура борьбы с вредными инвазивными видами. Если через некоторое время значение пищевой привлекательности участка становится меньше порогового значения, то популяция хищника покидает участок. Ставится задача управления, состоящая в изъятии части популяции хищника так, чтобы для оставшейся части значение пищевой привлекательности было больше порога.

Вводится понятие допустимого кусочно постоянного управления, которое учитывает возможность его практической реализации при наименьшей антропогенной нагрузке на участок. Для решения поставленной задачи предлагается метод касательных управлений, на основе которого построен периодический процесс управления, как наиболее естественный, если учесть периодичность свободной системы Лотки – Вольтерры.

При построении периодического процесса управления непрерывная динамика сводится к дискретной, которая порождает гомеоморфизмы окружности. Получены условия, при которых система периодична. Найдены явные выражения для периодов. Построено множество управляемости. Рассмотрено обобщение задачи, при котором непрерывная динамика индуцирует дискретную, порождающую двойные повороты окружности. Ставится задача нахождения периодических траекторий.

Ключевые слова: трехмерная динамическая система, биосообщество «хищник-жертва», периодическое управление, касательная траектория, гомеоморфизм окружности, множество управляемости, огибающая.

Библиография: 21 названий.

Для цитирования:

Кириллов, А. Н. Периодическое управление биосообществом и гомеоморфизмы окружности // Чебышевский сборник, 2019, т. 25, вып. 5, с. 90–112.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.977

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-90-112

Periodic control of biocommunity and circle homeomorphisms

A. N. Kirillov

Kirillov Aleksandr Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of RAS (Petrozavodsk).

e-mail: krlv1812@yandex.ru

Abstract

To solve a problem of preserving a predator-prey biocommunity species structure, a mathematical model of periodic control process is proposed and investigated. A model is based on reducing of continuous dynamics to a discrete one generated by circle homeomorphisms.

The biocommunity dynamics is described by a three dimensional system of ordinary differential equations. Two equations present the Lotka-Volterra system, and the third one describes the dynamics of food attractivity the notion of which was introduced in [1]. The specifics of the system is such that its trajectories belong to cylindrical surfaces. The latter permits to conduct a qualitative research of the system.

The following process is modeled. At some point of time, in order to diminish the growth of prey population, which is considered as a harmful one, a predator population is transferred to a patch. The latter procedure is widely spread in practice while controlling the growth of harmful, invasive, species. If, after a while, the value of food attractivity becomes less than some threshold then the predator population leaves the patch. Thus, there arises a control problem consisting in removal of some part of predator population in such a way that for the remaining part the patch attractivity value becomes more than a threshold.

A notion of admissible piecewise constant control is proposed. The latter takes into account a possibility of its realization with the less anthropogenic load on a patch. To solve the formulated problem, a method of tangent control is proposed. On the basis of this method, a periodic control process, as the most natural if one takes into account the periodicity of the free Lotka-Volterra system, is constructed. In this case, a continuous dynamical system is reduced to a discrete one which generates circle homeomorphisms. The conditions under which a dynamical system is periodic are obtained. The explicit expressions for periods are found. The set of attainability is constructed. Also, there is considered a generalization of the control problem consisting in generating of a discrete dynamics which induces double circle rotations. In this case, the problem of finding periodic trajectories is posed.

Keywords: three-dimensional dynamical system, predator-prey biocommunity, periodic control, tangent trajectory, circle homeomorphism, controllability set, envelope.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

Kirillov, A. N. 2024, "Periodic control of biocommunity and circle homeomorphisms", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 90–112.

1. Введение

Для сохранения видовой структуры биосообществ, что является важной экологической проблемой, в практике распространено изъятие некоторой части видов тех или иных популяций с одного участка и перенос их на другие участки. Такое антропогенное воздействие

регламентируется соответствующими документами (см. Рекомендации Комиссии по выживанию видов (SSC) Международный союз охраны природы (IUCN): Species Survival Commission Guidelines on the Use of Ex situ Management for Species Conservation. Approved by the Steering Committee of the IUCN Species Survival Commission, Tallinn, Estonia, 29 August 2014.).

В статье предлагается и исследуется математическая модель периодического процесса управления, позволяющая разрабатывать конкретные рекомендации по решению указанной выше экологической проблемы. Модель взаимодействия видов задается трехмерной системой дифференциальных уравнений, в основе которой понятие пищевой привлекательности участка [1]. Периодический процесс управления строится путем сведения непрерывной динамики к дискретной, которая порождает гомеоморфизмы окружности.

Следует отметить, что теория динамических систем с периодическим управлением активно развивается и применяется в различных прикладных задачах ([2]– [5]).

При учете в модели дополнительных ограничений, связанных с повышением надежности предлагаемого процесса управления, неожиданным образом возникает дискретная система, порожденная двойными (двухцветными) поворотами окружности [6], [7]. Таким образом, решение прикладной экологической проблемы, приводит к постановке новых задач эргодической теории. Некоторые задачи сформулированы в последнем разделе.

Настоящая работа продолжает исследования [8], [9], где построена модель взаимодействия хищник-жертва с переменной структурой, в которой популяция жертв не покидает участок, а популяция хищников может как покидать участок, так и возвращаться обратно в зависимости от значения пищевой привлекательности участка. Для удобства читателей, коротко поясним смысл этого понятия.

Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ – количественные характеристики находящихся на участке популяций жертв и хищников, соответственно, в момент времени t . Пусть $\lambda > 0$ – пороговая постоянная, характеризующая минимальное количество жертв, необходимое организму хищника в единицу времени для поддержания его жизненных функций. Величина $w(t) = \frac{x(t)}{y(t)} - \lambda$ характеризует недостаток ($w(t) < 0$) или избыток ($w(t) > 0$) пищевых ресурсов, приходящихся на одного хищника в момент времени t . Тогда величина

$$n(t) = \int_0^t y(\tau)w(\tau)d\tau. \quad (1)$$

характеризует накопление избытка или недостатка пищевого ресурса на участке, на промежутке $[0, t]$, для всей популяции хищников. Функция $n : t \rightarrow n(t)$, значение которой определяется формулой (1), введена в [1] и называется пищевой привлекательностью участка в момент времени $t \geq 0$. Появление множителя $y(\tau)$ под интегралом мотивируется принципом "стада себялюбцев"[10], объясняющим скопление особей во времени и пространстве. Величину $n(t)$ можно интерпретировать как память популяции хищников о питательных ресурсах участка на промежутке времени $[0, t]$.

Полагаем, что популяция хищников появляется на участке, в результате миграции или искусственного внедрения, в момент времени $t = 0$ и при этом выполняются условия

$$w(0) > \lambda, \quad n(0) = 0. \quad (2)$$

Смысл начальных условий (2): хищник появляется на участке, содержащем достаточное количество пищевых ресурсов ($w(0) > \lambda$); в начальный момент времени, $t = 0$, память популяции о пищевом ресурсе нулевая, что естественно ввиду отсутствия хищника на участке при $t < 0$.

Полагаем, что популяция хищников начинает покидать участок в момент времени $t = t^* > 0$ такой, что

$$n(t^*) = 0, \quad w(t^*) < 0, \quad n(t) > 0, \quad \text{при } t \in (0, t^*). \quad (3)$$

Динамика биосообщества с памятью, заданной выражением, отличным от (1), рассматривалась в [11], где проводилось исследование устойчивости равновесия по первому приближению. Отметим, что на значимость величины отношения x/y для описания динамики популяций обратили внимание Р. Ардити и Л. Гинзбург (R. Arditi и L. Ginzburg) в известной работе [12]. В [13], [14] отношение x/y использовано для построения двумерной модели системы с переключениями между режимами взаимодействия видов и ухода в убежища (refuge regime).

Задача управления биосообществом состоит в изъятии такого количества особей популяции хищников, чтобы для оставшихся особей участок был привлекательным (в пищевом смысле). Поддерживать некоторое количество хищников на участке требуется, в частности, для сдерживания роста инвазивного (вредного) вида жертв. В отсутствие хищников этот рост может быть экспоненциальным ([15], [16]). Формальная постановка задачи приведена ниже.

2. Модель и постановка задачи

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m - u), \\ \dot{n} = x - \lambda y, \end{cases} \quad (4)$$

в которой первые два уравнения задают управляемую вольтерровскую динамику взаимодействия хищник-жертва, а последнее — получено дифференцированием $n(t)$ (см. (1)). Здесь a, b, m, k — положительные постоянные, $k \in (0, 1)$, $u = u(t) \geq 0$ — управляющее воздействие, интенсивность изъятия особей популяции хищников.

Хищник, как отмечено выше, появляется на участке в момент времени $t = 0$, и поэтому система (4) рассматривается при $t \geq 0$.

Обозначим через $\mathbb{R}_+^n$ множество n -мерных векторов с положительными компонентами.

Пусть $r(t, M_0, u) = (x(t, M_0, u), y(t, M_0, u), n(t, M_0, u))$ — решение системы (4), при управлении u , где $r(0, M_0, u) = M_0 = (x_0, y_0, n_0)$, $r^+(M_0, u) = \{r(t, M_0, u), t \in \mathbb{R}_+\}$ — соответствующая положительная полутраектория.

Пусть u — постоянная, $u \geq 0$. Тогда система

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by), \\ \dot{y} = y(kbx - m - u). \end{cases} \quad (5)$$

составленная из первых двух уравнений (4), является классической системой Лотки—Вольтерры. Пусть $r_v(t, z_0, u) = (x_v(t, z_0, u), y_v(t, z_0, u))$ — решение системы (5), где $r_v(0, z_0, u) = z_0 = (x_0, y_0)$,

$$\sigma(z_0, u) = \{r_v(t, z_0, u), t \in \mathbb{R}_+\}$$

— соответствующая положительная полутраектория, которую будем называть овалом.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Правые части системы (4) не содержат переменной n . Тогда при постоянном $u \geq 0$ положительные траектории системы (4) принадлежат цилиндрическим поверхностям, являясь винтовыми линиями. Образующие цилиндров параллельны координатной оси n . Будем полагать траектории системы (5) вложенными в плоскость $n = 0$, принадлежащую $\mathbb{R}^3$. Тогда направляющие цилиндрических поверхностей — овалы $\sigma(z_0, u)$, где $z_0 = (x_0, y_0)$ (см. Рис.1).

Обозначим через $C(z_0, u)$ цилиндр с направляющей $\sigma(z_0, u)$. Таким образом, имеем дизъюнктное объединение инвариантных поверхностей

$$\mathbb{R}_+^3 = \bigcup_u C(z_0, u), \text{ где } u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}.$$

Иначе говоря, семейство $\{C(z_0, u) : u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ является двумерным слоением.

В дальнейшем будем полагать выполненным условие

$$\lambda > \frac{m}{ak}, \quad (6)$$

из чего следует, что положение равновесия системы (5) при $u = 0$, $P = P(0)$, принадлежит области $\{(x, y) : x < \lambda y\}$. Экологический смысл этого условия в состоит том, что для нормального функционирования популяции хищника требуется достаточно большое число особей жертвы.

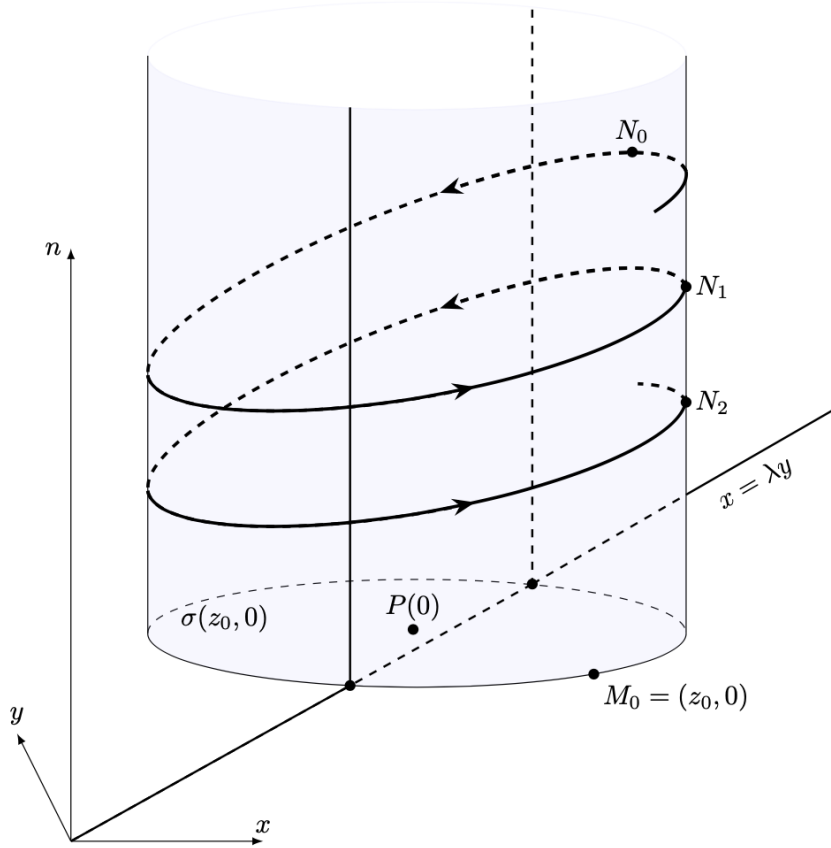


Рис. 1: Цилиндр траекторий при $\lambda > \frac{m}{ak}$, $u = 0$, $|N_1 N_2| = -\Delta(M_0, 0)$, $P(0) = (\frac{m}{bk}, \frac{a}{b})$.

Пусть u — неотрицательная постоянная: $u \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Пусть $T(z_0, u)$ — период решения $r_v(t, z_0, u)$ системы (5), $\Delta(t, M_0, u)$ — приращение координатной функции $n(t, M_0, u)$ решения $r(t, M_0, u)$ системы (4) на промежутке $[t, t + T(z_0, u)]$, то есть

$$\Delta(t, M_0, u) = n(t + T(z_0, u), M_0, u) - n(t, M_0, u).$$

В [8] доказано, что $\Delta(t, M_0, u)$ не зависит от t , и если обозначить $\Delta(t, M_0, u) = \Delta(M_0, u)$, то

$$\Delta(M_0, u) = \frac{aT(z_0, u)}{b} \left(\frac{m + u}{ak} - \lambda \right). \quad (7)$$

Из условия (6) следует, что $\Delta(M_0, 0) < 0$ (см. Рис.1). Это значит, что если не управлять системой (4), то за конечное время любая фазовая точка, принадлежащая $\mathbb{R}_+^3$, попадет на

плоскость $n = 0$ в точку $(x, y, 0)$, где $x < \lambda y$, то есть будут выполнены условия (3), и хищник покидает участок. Следовательно, для предотвращения ухода хищника требуется управлять системой.

Введем понятие допустимого управления, для чего определим начальный момент управления. Рассмотрим луч p и множества p^+ , p^- , где

$$p = \{(x, y, 0) : x = \lambda y, x > 0, y > 0\},$$

$$p^+ = \{(x, y, 0) : x > \lambda y, x > 0, y > 0\}, \quad p^- = \{(x, y, 0) : x < \lambda y, x > 0, y > 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть z_0 удовлетворяет (2); пусть $t(z_0) \geq 0$ такой момент времени, что $r_v(t(z_0), z_0, 0) \in p$ при условии $r_v(t, z_0, 0) \in p^+$, где $t \in [0, t(z_0))$. Тогда момент времени $t_u = t_u(z_0) \in [0, t(z_0)]$ называется начальным моментом управления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть z_0 удовлетворяет (2). Допустимым управлением для системы (4) с начальной точкой $M_0 = (z_0, 0)$ и начальным моментом управления $t_u = t_u(z_0)$ называется кусочно постоянная функция $u(t)$, определяемая постоянной $u^* > 0$ и последовательностями $t_i \in \mathbb{R}_+$, $u_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, где

$$t_i > t_{i-1}, \quad t_0 = t_u(z_0), \quad u_i \in \{0, u^*\}, \quad u_i \neq u_{i+1}, \quad u_1 = u^*,$$

так, что выполняются следующие условия.

1. $u(t) = u_i$ при $t \in [t_{i-1}, t_i)$, $u_1 = u^*$.
 2. Если $u_i = 0$, то $t_i - t_{i-1} = l_i \cdot T(z_0, 0)$ при $i \geq 2$.
 3. $u(t) = 0$ только в точках, принадлежащих цилиндру $C(z_0, 0)$.
 4. $u(t) = u^*$ только в области $\{(x, y, n) \in \mathbb{R}_+^3 : x \geq \lambda y\}$.
- Постоянную $u^* > 0$ будем называть допустимым значением управления.

Поясним смысл понятия допустимого управления. Управление $u = u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей одно из двух значений, что мотивируется простотой и возможностью реализации. Значения 0 и u^* чередуются, что понятно, поскольку если при всех $t \geq 0$ положить $u(t) = 0$, то, как отмечено выше, вследствие $\Delta(M_0, 0) < 0$, популяция хищника покидает участок, то есть задача управления не будет решена. Если же $u(t) = u^*$ при всех $t \geq 0$, то процесс управления становится нереализуемым: бесконечно долгое изъятие части особей хищника практически невозможно.

Условие 2 подразумевает, что время функционирования биосообщества без вмешательства должно быть достаточно велико, не меньше соответствующего периода свободной вольтерровской динамики, что будет способствовать восстановлению естественной динамики после внешнего воздействия. Последнему обстоятельству способствует и условие 3.

Условие 4 означает, что внешнее вмешательство в биосообщество происходит в безопасной области, то есть в области неубывания пищевой привлекательности участка, где $\dot{n} \geq 0$. Тем самым уменьшается риск ухода хищника из участка. Этот риск присутствует, так как при практической реализации управления происходят отклонения от управления, найденного теоретически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Допустимое управление $u(t)$ для системы (4) с начальной точкой $M_0 = (z_0, 0)$ и начальным моментом управления $t_u = t_u(z_0)$ называется финально периодическим, если существуют постоянная $\theta = \theta(z_0) > 0$ и момент времени $t' = t'(z_0) \geq t_u(z_0)$ такие, что

$$u(t) = u(t + \theta), \quad r(t, M_0, u(t)) = r(t + \theta, M_0, u(t + \theta)), \quad \text{при } t \geq t'(z_0).$$

При этом $\theta = \theta(t'(z_0))$ называется периодом управления.

Смысл финальной периодичности мотивируется желанием согласовать (синхронизировать) внешнее, антропогенное, вмешательство в сообщество с его свободной, вольтерровской, динамикой.

Постановка задачи. Даны начальная точка $M_0 = (x_0, y_0, 0)$, удовлетворяющая условиям (2), и начальный момент управления $t_u(z_0) \in [0, t(z_0)]$. Требуется построить допустимое финально периодическое управление $u(t)$ системой (4), при котором

$$n(t, M_0, u(t)) > 0 \quad \text{при любом } t > 0, \quad (8)$$

и допустимое значение управления $u^* > 0$ принимает наименьшее значение.

Решение поставленной задачи позволяет сохранить популяцию хищника на участке.

3. Обозначения и предварительные результаты

Введем следующие обозначения.

$\pi = \{(x, y, 0) : x > 0, y > 0\}$;

$z = \{(x, y)\}$, если $z \in \pi$;

$P(u) = (\frac{m+u}{bk}, \frac{a}{b})$ — положение равновесия системы (5) при постоянном $u \geq 0$;

$M = (x(M), y(M), n(M))$;

$[M\infty) = \{(x, y) : x = \lambda y, x \geq x(M), y \geq y(M)\} \subset p$;

$(M\infty) = \{(x, y) : x = \lambda y, x > x(M), y > y(M)\} \subset p$.

Упорядочим точки $A, B \in p$. Будем писать $A < B$, если $x(A) < x(B)$ (или $y(A) < y(B)$).

Ниже доказывается важное свойство траекторий системы (5), или овалов $\sigma(z_0, u)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть овалы $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma(z^*, v)$ имеют общую точку $z^* = (x^*, y^*)$ при постоянных $u, v > 0, u \neq v$. Тогда

– если $y^* = \frac{a}{b}$, то z^* единственная общая точка, являющаяся точкой касания овалов;

– если $y^* \neq \frac{a}{b}$, то овалы пересекаются в двух точках, z^* и $z^{**} = (x^{**}, y^{**})$, с одинаковыми абсциссами (см. Рис.2), то есть

$$x^* = x^{**}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Траектория $\sigma(z^*, u)$ системы (5) при постоянном $u > 0$ задается уравнением

$$f(x, y, z^*, u) = a \ln y - by + (m + u) \ln x - kbx - c(z^*, u) = 0, \quad (9)$$

где

$$c(z^*, u) = a \ln y^* - by^* + (m + u) \ln x^* - kbx^*.$$

Предположим, что траектории $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma(z^*, v)$, кроме z^* , имеют еще одну общую точку $z^{**} = (x^{**}, y^{**})$. Тогда из (9)

$$f(x^{**}, y^{**}, z^*, u) = 0, \quad f(x^{**}, y^{**}, z^*, v) = 0.$$

Вычитая из одного последнего равенства другое, получаем

$$(u - v)(\ln x^{**} - \ln x^*) = 0,$$

откуда следует равенство $x^{**} = x^*$, то есть абсциссы общих точек овалов $\sigma(z^*, u)$ и $\sigma(z^{**}, v)$ равны. При этом количество общих точек не более двух. Действительно, подставив $y = y^{**}$, $x = x^{**}$ в уравнение (9) и учитывая, что $x^{**} = x^*$, получим уравнение относительно y^{**} при фиксированном y^*

$$a \ln y^{**} - by^{**} = a \ln y^* - by^*. \quad (10)$$

Уравнение (10) имеет не более двух решений. Это следует из того, что функция $h(y) = a \ln y - by$ имеет единственное максимальное значение при $y = \frac{a}{b}$. При этом максимальное значение равно $h(\frac{a}{b}) = a(\ln \frac{a}{b} - 1)$, что является значением правой части (10) при $y^* = \frac{a}{b}$. Таким образом, если $y^* = \frac{a}{b}$, то решение уравнения (10) единственно, а именно, $y^{**} = y^*$. При этом точка $z^* = (x^*, \frac{a}{b})$ является точкой касания овалов, поскольку векторные поля, задаваемые правыми частями уравнения (5) при $u \neq v$ коллинеарны только в точках прямой $y = \frac{a}{b}$. Соответственно, если $y^* \neq \frac{a}{b}$, то два решения уравнения (10), одно из которых y^* , являются ординатами двух точек пересечения.

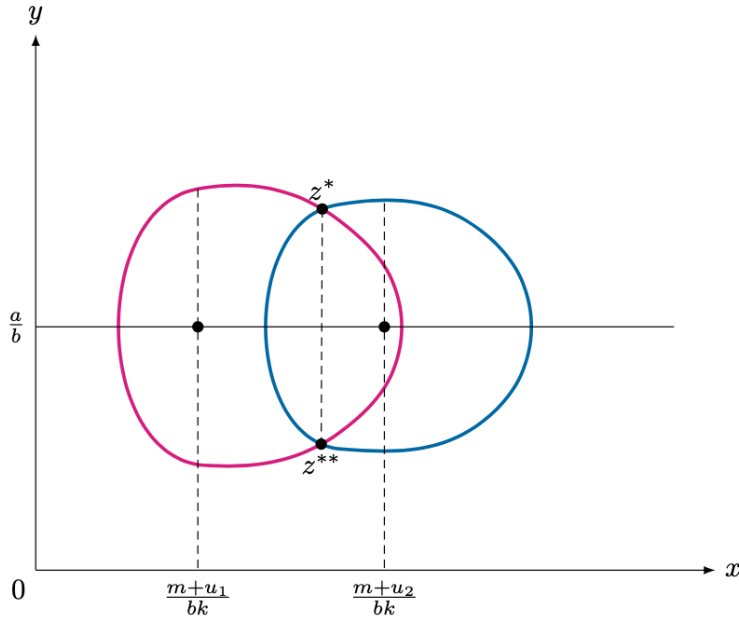


Рис. 2: Пересечение овалов $\sigma(z^*, u_i)$, $i = 1, 2$, $y^* \neq \frac{a}{b}$, $z^* = (x^*, y^*)$.

4. Касательные управления

Введем понятия касательных овалов и управлений, которые будут основным инструментом при решении поставленной задачи. Рассмотрим систему (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Постоянная $u > 0$ называется касательным управлением для точки $z_0 \in p^+ \cup p$, если траектория $\sigma(z_0, u)$ системы (5) касается луча p в некоторой точке $Q \in p$. При этом $\sigma(z_0, u)$ называется касательной траекторией, или касательным овалом.*

Для касательного управления введем обозначения $u_\tau = u_\tau(Q)$ или $u_\tau = u_\tau(z_0)$.

Очевидно, $\sigma(z_0, u_\tau(Q)) \subset p^+ \cup p$ при $z_0 \in p^+ \cup p$.

Вопросы существования и единственности касательного овала, проходящего через точку $z_0 \in p^+$, будут обсуждаться ниже.

Рассмотрим точку $\tilde{Q}$ пересечения луча p и прямой $y = \frac{a}{b}$

$$\tilde{Q} = \left(\frac{\lambda a}{b}, \frac{a}{b} \right) \in p, \quad (11)$$

и луч $(\tilde{Q}\infty) \subset p$. Имеет место следующее очевидное утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Любая точка $Q = (x(Q), y(Q)) \in (\tilde{Q}\infty)$ является точкой касания единственного овала $\sigma(Q, u_\tau(Q)) \subset p^+ \cup p$ и луча p . При этом касательное управление $u_\tau(Q)$ имеет вид

$$u_\tau(Q) = (1 + \lambda k)by(Q) - (a + m). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Координаты $x(Q) = x, y(Q) = y$ удовлетворяют системе уравнений

$$x = \lambda y, \quad \frac{y(kbx - m - u)}{x(a - by)} = \frac{1}{\lambda},$$

из которой следует (12).

Из Утверждения 2 получаем выражение для координат точки касания $Q(u)$, где $u = u_\tau$

$$Q(u) = \left(\lambda \cdot \frac{a + m + u}{b(1 + \lambda k)}, \frac{a + m + u}{b(1 + \lambda k)} \right). \quad (13)$$

Касательные управления будут решать поставленную задачу, поэтому изучим их подробнее.

Пусть D — множество всех точек $z \in p^+ \cup p$, для которых существует касательное управление, или через которые проходят касательные овалы:

$$D = \{z \in p^+ \cup p : z \in \sigma(Q, u_\tau(Q))\}. \quad (14)$$

Последующая часть Раздела 4 посвящена нахождению множества D .

Семейство касательных овалов, принадлежащих $p^+ \cup p$, параметризуем ординатой $y(Q)$ точки касания $Q \in (\tilde{Q}\infty)$, что возможно в силу Утверждения 2. Обозначим $y(Q) = y_Q$, откуда $x(Q) = \lambda y_Q$. Семейство касательных овалов, $\sigma(Q, u_\tau(Q))$, задается семейством уравнений $f(x, y, Q, u_\tau(Q)) = 0$ (см. (9)), а именно

$$f(x, y, Q, u_\tau(Q)) = a \ln y - by + (m + u_\tau(Q)) \ln x - kbx - c(Q, u_\tau(Q)) = 0, \quad (15)$$

где $u_\tau(Q)$ имеет вид (12), $Q = (x_Q, y_Q)$. Найдем огибающую семейства $\{\sigma(Q, u_\tau(Q))\}$. Очевидно, луч $(\tilde{Q}\infty)$ является одной из ветвей огибающей. Дискриминанта семейства касательных овалов задается следующим уравнением

$$\frac{\partial f(x, y, Q, u_\tau(Q))}{\partial y_Q} = 0,$$

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$x = \lambda y_Q. \quad (16)$$

Подставив $x = \lambda y_Q$ в (15), с учетом (12) получим

$$a \ln y - by + ((1 + \lambda k)by_Q - a) \ln \lambda y_Q - kb\lambda y_Q - (a \ln y_Q - by_Q + ((1 + \lambda k)by_Q - a) \ln \lambda y_Q - kb\lambda y_Q) = 0.$$

Обедняя с (16) уравнение, полученное из последнего в результате элементарных преобразований, получим систему уравнений, задающих в параметрической форме огибающую семейства касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$

$$\begin{cases} a \ln y - by = a \ln y_Q - by_Q, \\ x = \lambda y_Q, \end{cases} \quad (17)$$

где $y_Q > \frac{a}{b}$ (см. Утверждение 2).

Ниже будет показано, что система (17), помимо $x = \lambda y$, задает еще одну ветвь огибающей. Из второго уравнения системы (17) получаем следующий любопытный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Точки касательного овала $\sigma(Q, u_\tau(Q))$, принадлежащие различным ветвям огибающей, имеют одну и ту же абсциссу, равную x_Q (см. Рис.3).

Покажем, что при фиксированном y_Q первое уравнение в (17), помимо очевидного решения $y = y_Q$, имеет еще одно решение. Обозначим $w(y) = a \ln y - by$. Несложно получить, что $\max w(y) = w(\frac{a}{b})$. Поскольку $y_Q > \frac{a}{b}$ (Утверждение 2), то $a \ln y_Q - by_Q < w(\frac{a}{b})$, откуда и получаем существование двух решений y первого уравнения системы (17).

Изучим вторую ветвь огибающей, расположенную ниже прямой $y = \frac{a}{b}$. Такое ее расположение следует из того, что центры овалов (положения равновесия траекторий системы (5)) принадлежат прямой $y = \frac{a}{b}$. Подставив $y_Q = \frac{x}{\lambda}$ в первое уравнение системы (17), получим уравнение, задающее в неявном виде две ветви огибающей

$$a \ln y - by = a \ln \frac{x}{\lambda} - b \frac{x}{\lambda}. \quad (18)$$

Продифференцировав (18) по x , получим

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\lambda x} \cdot \frac{\lambda a - bx}{a - by},$$

откуда следует, что $y' < 0$ при $y < \frac{a}{b}$.

Далее, имеем $\lim_{x \rightarrow \infty} (a \ln \frac{x}{\lambda} - b \frac{x}{\lambda}) = -\infty$. Отсюда получаем, что $\lim_{x \rightarrow \infty} (a \ln y - by) = -\infty$, что равносильно соотношению $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, поскольку $y < \frac{a}{b}$.

Обозначим через $y = \varphi(x)$, где $x > \frac{\lambda a}{b}$, второе, помимо $x = \lambda y$, решение уравнения (18).

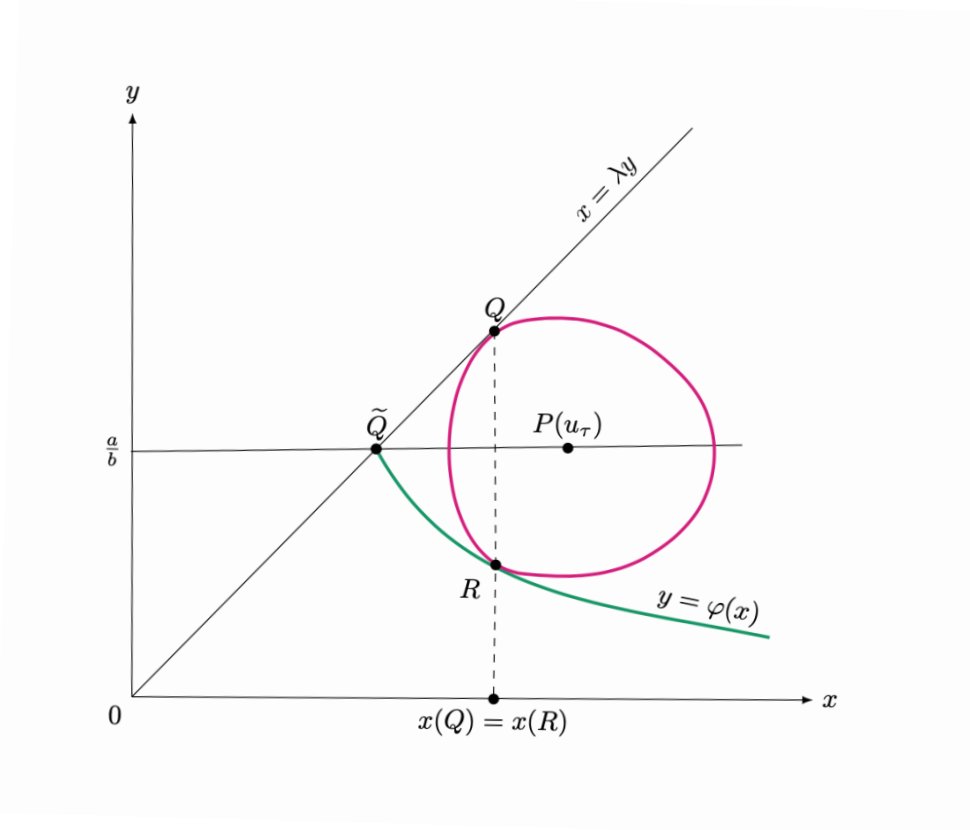


Рис. 3: Касательный овал $\sigma(z_0, u_\tau)$, огибающая $y = \varphi(x)$.

Подводя итог, можно сформулировать следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Семейство касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$ имеет огибающую, состоящую из двух ветвей, задаваемых системой (17) при $x > \frac{\lambda a}{b}$. При этом, при $y > \frac{a}{b}$ имеем ветвь $x = \lambda y$, а при $y < \frac{a}{b}$ — ветвь $y = \varphi(x)$, где обе ветви определяются либо параметрически (17), либо уравнением (18). При этом функция $\varphi(x)$ монотонно убывает к 0 при $x \rightarrow \infty$ (см. Рис.3).

Таким образом, семейство касательных овалов $\sigma(Q, u_\tau(Q))$ принадлежит множеству

$$\{z = (x, y) : x > \frac{\lambda a}{b}, \varphi(x) \leq y \leq \frac{x}{\lambda}\} \equiv \tilde{D}. \quad (19)$$

Вернемся к задаче нахождения множества D (14).

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место равенство*

$$D = \tilde{D}. \quad (20)$$

При этом, если $z_0 \in D \setminus \partial D$, то через точку z_0 проходят два касательных овала, а если $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$, то — один касательный овал (см. Рис.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q = (x_Q, y_Q)$ — точка касания. Подставим в уравнение овала $f(x, y, z_0, u_\tau(Q)) = 0$ (см. (9)) $x = x_Q = \lambda y_Q$, $y = y_Q$, $u = u_\tau(Q)$ из (12). При этом, для сокращения записи, сохраним обозначения x , y для координат точки Q . После несложных преобразований получим

$$y \ln y + \left(\ln \frac{\lambda}{x_0} - 1 \right) y + B(z_0) = 0, \quad (21)$$

где

$$B(z_0) = \frac{1}{b(1 + \lambda k)} \left(a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(kx_0 + y_0) \right).$$

Поскольку, по предположению, $z_0 \in p^+ \cup p$, то $B(z_0) > 0$.

Пусть $z_0 \in D \setminus \partial D$. Докажем, что уравнение (21) имеет два различных решения y_1 , y_2 , удовлетворяющие условию $\frac{a}{b} < y_1$, если считать, что $y_1 < y_2$.

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $y_0 \geq \frac{a}{b}$, что следует из Утверждения 1. Обозначим левую часть уравнения (21) через $w = w(y)$. Нетрудно видеть, что $\lim_{y \rightarrow +0} w = B(z_0)$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} w = +\infty$.

Далее, $w'(y) = \ln \frac{\lambda y}{x_0}$, $w''(y) = \frac{1}{y} > 0$. Тогда $y = \frac{x_0}{\lambda}$ — точка минимума функции $w(y)$, причем $\frac{x_0}{\lambda} > y_0 \geq \frac{a}{b}$. При этом $w(\frac{x_0}{\lambda}) = -\frac{x_0}{\lambda} + B(z_0) = \min w(y)$ при $y_0 \geq \frac{a}{b}$.

Покажем, что минимальное значение $w(\frac{x_0}{\lambda}) < 0$, то есть

$$-\frac{x_0}{\lambda} < -\frac{1}{b(1 + \lambda k)} \left(a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(kx_0 + y_0) \right). \quad (22)$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x_0}{\lambda} - y_0 > \frac{a}{b} \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}. \quad (23)$$

Поскольку $y_0 \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} \geq \frac{a}{b} \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}$, то для доказательства (23) достаточно доказать неравенство

$$\frac{x_0}{\lambda} - y_0 > y_0 \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}, \quad (24)$$

которое следует из очевидного неравенства $\frac{x_0}{\lambda y_0} - 1 > \ln \frac{x_0}{\lambda y_0}$ при $x_0 > \lambda y_0$. Тогда (23) следует из (24), из которого получаем (22). Итак, неравенство $w(\frac{x_0}{\lambda}) < 0$ доказано. Подводя итог, получаем, что уравнение (21) имеет два решения, $y_1 = y(Q_1)$, $y_2 = y(Q_2)$, где Q_1, Q_2 — точки касания, $Q_1 < Q_2$. Из доказательства следует, что $y_1 < \frac{x_0}{\lambda} < y_2$.

Осталось доказать, что $\frac{a}{b} < y_1$. Для этого, учитывая, что точка минимума функции $w(y)$ удовлетворяет условию $\frac{x_0}{\lambda} > \frac{a}{b}$, достаточно доказать, что $w(\frac{a}{b}) > 0$, то есть (см. (21))

$$\frac{a}{b} \ln \frac{a}{b} + \left(\ln \frac{\lambda}{x_0} - 1 \right) \frac{a}{b} + \frac{1}{b(1 + \lambda k)} \left(a \ln \frac{x_0}{\lambda y_0} + b(kx_0 + y_0) \right) > 0. \quad (25)$$

Для этого рассмотрим случай $x_0 = \lambda y_0$, то есть $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$. Тогда из (25) получаем равенство

$$w\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b} \left(\frac{by_0}{a} - 1 - \ln \frac{by_0}{a} \right) \geq 0,$$

которое очевидно. Обозначим левую часть неравенства (25) как $h(x_0)$, то есть рассматриваем ее как функцию x_0 при фиксированном y_0 . Тогда $h'(x_0) = \frac{k}{1 + \lambda k} \left(1 - \frac{a\lambda}{bx_0} \right) > 0$, при $x_0 > \lambda y_0 \geq \frac{\lambda a}{b}$ (см. выше). В итоге, получаем (25), то есть $\frac{a}{b} < y_1$. Случай $z_0 \in D \setminus \partial D$ доказан.

Для случая $z_0 \in \partial D \setminus \tilde{Q}$ доказательство аналогично и значительно проще.

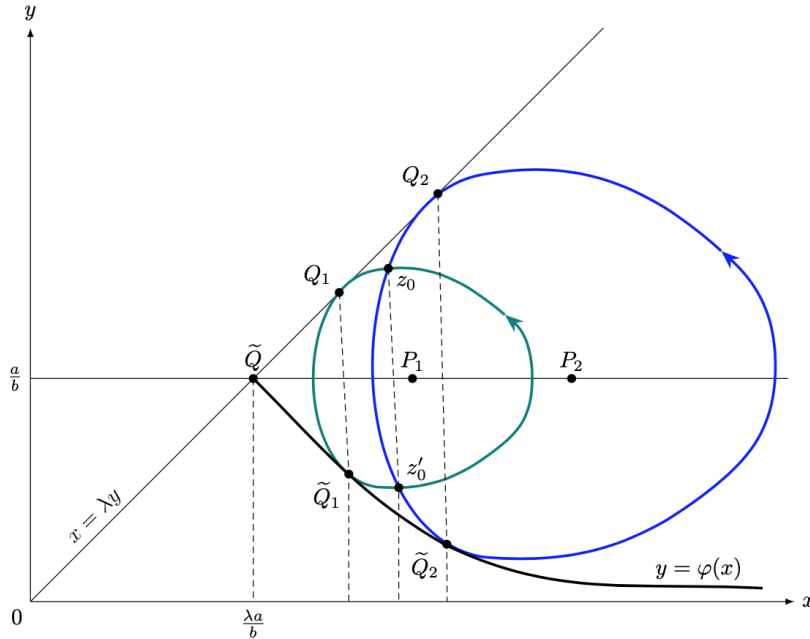


Рис. 4: Два касательных овала, проходящих через точку z_0 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть $z_0 \in D \setminus \partial D$, Q_1, Q_2 — точки касания овалов $\sigma(z_0, u_\tau(Q_1))$, $\sigma(z_0, u_\tau(Q_2))$ с лучом p . Пусть $Q_1 < Q_2$. Тогда $u_\tau(Q_1)$ — наименьшее допустимое значение управления (см. Рис.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно рассмотреть точку z_0 , для которой $y_0 > \frac{a}{b}$ (см. Рис.5). Поскольку положение равновесия $P(0) \in p^-$, то существуют две точки $R_i(0) = \sigma(z_0, 0) \cap p$, $i = 1, 2$, где $R_1(0) < R_2(0)$. Из (5) в точке z_0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_0(kbx_0 - m - u)}{x_0(a - by_0)} \equiv \tan(z_0, u),$$

откуда

$$\tan(z_0, u) = \tan(z_0, 0) - \frac{y_0}{x_0(a - by_0)}u.$$

Из условия следует, что функция $\tan(z_0, u)$, при фиксированном z_0 , возрастает относительно u . Тогда $R_1 < Q_1 < R_2$, поскольку траектории $\sigma(z_0, 0)$ и $\sigma(z_0, u)$, при $u > 0$, пересекаются только в двух точках z_0, z'_0 таких, что $x(z_0) = x(z'_0)$ (Утверждение 1). По той же причине, для любого $u \in (0, u_\tau(Q_1))$ существуют две точки $R_1(u), R_2(u)$ пересечения $\sigma(z_0, u)$ с лучом p : $\{R_1(u), R_2(u)\} = \sigma(z_0, u) \cap p$. Пусть $R_1(u) < R_2(u)$. Тогда нетрудно убедиться, что $Q_1 < R_2(u) < R_2(0)$. Следовательно, $\sigma(z_0, u) \cap p^- = \widehat{R_2(u)R_1(u)}$ — дуга овала $\sigma(z_0, u)$, принадлежащая области p^- . Таким образом, при любых $u \in (0, u_\tau(Q_1))$, n_1, n_2 , $0 \leq n_1 < n_2$, переход из точки $M_1 = (z_0, n_1)$ в точку $M_2 = (z_0, n_2)$ в области p^+ невозможен. Следовательно $u \in (0, u_\tau(Q_1))$ не является допустимым значением управления (см. Определение 1). Утверждение 5 доказано.

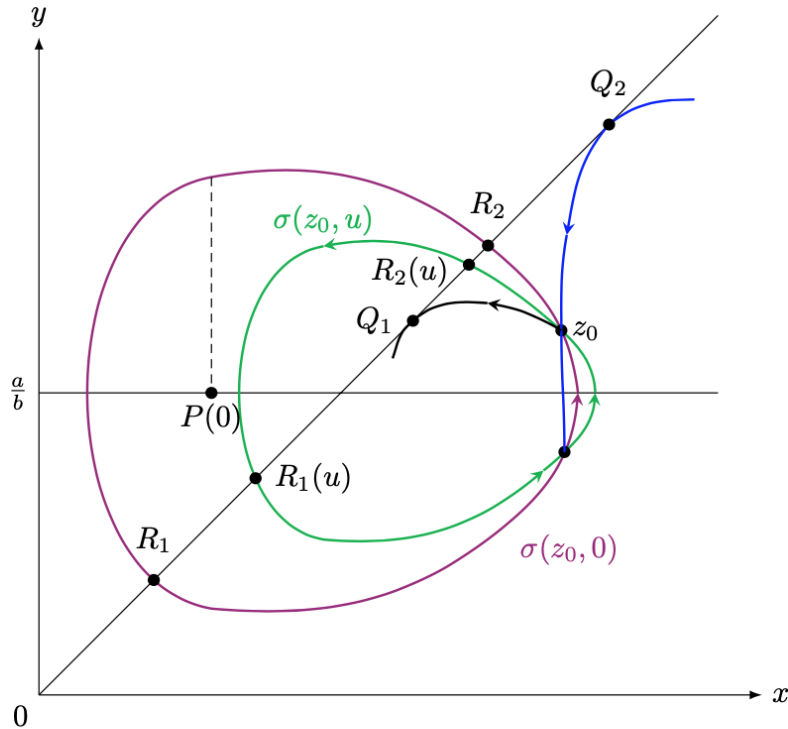


Рис. 5: К доказательству Утверждения 5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Утверждение 5 мотивирует использование касательное управление $u_\tau(Q_1)$ для решения поставленной задачи, что и будет сделано в следующем разделе.

Найдем множество точек $z_0 \in p^+ \setminus D$, которые попадают в D вдоль траекторий системы (5) при $u = 0$. Пусть $\{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}\} = \sigma(\tilde{Q}, 0) \cap p$, $\tilde{Q}_1 < \tilde{Q}$, где $\tilde{Q}$ определена в (11). Существование этих точек гарантировано условием $P(0) \in p^-$, или (6).

Рассмотрим дугу $\widehat{\tilde{Q}_1 \tilde{Q}} = (p^+ \cup p) \cap \sigma(\tilde{Q}, 0)$ траектории $\sigma(\tilde{Q}, 0)$.

Пусть $p^+ \setminus D = D^- \cup D^+$, где D^+ , D^- такие множества, что из D^+ фазовая точка попадает в D вдоль траекторий системы (5) при $u = 0$, а из D^- — не попадает. Это значит, что если $z_0 \in D^+$, то $\sigma(z_0, 0) \cap D \neq \emptyset$, а если $z_0 \in D^-$, то $\sigma(z_0, 0) \cap D = \emptyset$.

Нетрудно видеть, в силу взаимной вложенности траекторий системы (5) при фиксированном $u > 0$, что $\partial D^- = [\tilde{Q}_1 \tilde{Q}] \cup \widehat{\tilde{Q}_1 \tilde{Q}}$ (см. Рис.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Множество управляемости, $D_u \in p^+$, это множество точек z_0 , для которых существует допустимое управление, решающее задачу, поставленную в разделе 2.*

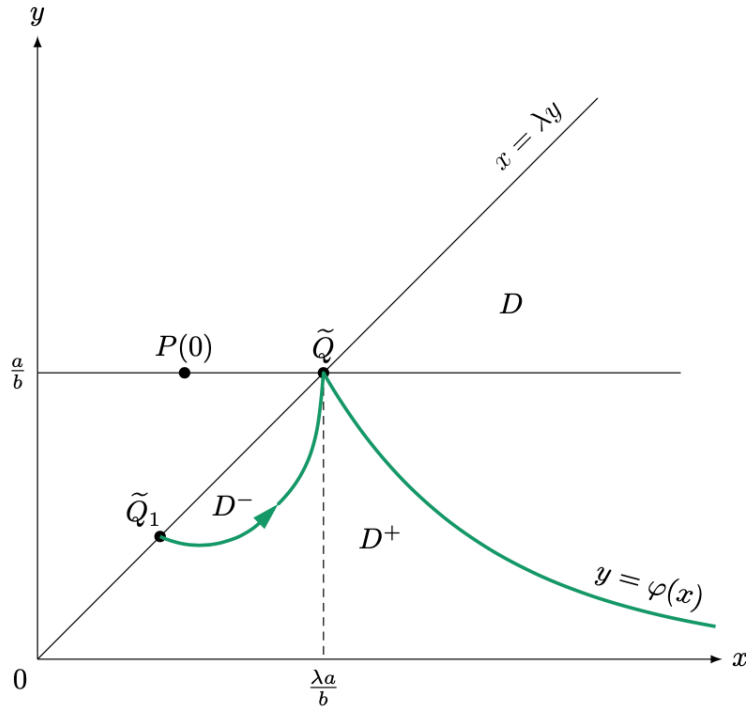


Рис. 6: Множество управляемости $D_u = D \cup D^+$.

В следующем разделе будет показано, что $D_u = D \cup D^+$, то есть для любой точки $z_0 \in D \cup D^+$ будет найдено решение поставленной задачи.

5. Решение задачи

В дальнейшем полагаем, что

$$z_0 \in D_u \quad (26)$$

Кроме того, пусть

$$r_v(t_u(z_0), z_0) \in p^+ \cap \{(x, y) : y > \frac{a}{b}\}, \quad (27)$$

то есть управление начинается в точке с достаточно большим значением ординаты. Это естественно и соответствует постановке задачи. С точки зрения излагаемого метода управления, данное условие не вносит изменений по существу: идея метода не изменяется.

5.1. Значение u^*

Через точку $B = r_v(t_u(z_0), z_0)$ проходят два касательных овала, $\sigma(B, u_\tau(Q_i))$. Пусть Q_1, Q_2 — точки касания этих овалов с лучом p , где $Q_1 \leq Q_2$.

Постановка задачи требует в качестве u^* (см. Определение 2) брать наименьшее значение. Тогда из Утверждение 5 следует, что

$$u^* = u_\tau(Q_1), \quad (28)$$

где Q_1, Q_2 — точки касания овала $\sigma(B, 0)$ и луча p , причем $Q_1 < Q_2$ (см. Утверждение 5).

5.2. Луч L

Используя управление (28), построим финально периодичный процесс управления и получены условия его существования.

Поскольку траектории системы (4) при постоянном $u \geq 0$ принадлежат цилиндрическим поверхностям, $C(z, u)$, то будем говорить, что на промежутке времени $[t, t+T(z, u)]$ траектория делает оборот. Тогда $l \in \mathbb{N}$ оборотов траектория делает на промежутке $[t, t+lT(z, u)]$.

Пусть даны начальная точка $M_0 = (z_0, 0) \in D_u$ и начальный момент управления $t_u(z_0)$, удовлетворяющие (26), (27).

Введем в рассмотрение луч $L = L(t_u(z_0))$, на котором будет происходить переключение значений допустимого управления

$$L = \{(x, y, n) : x = x(B), y = y(B), n \geq 0\}, \quad B = r_v(t_u(z_0), z_0). \quad (29)$$

Идея метода управления состоит в следующем. Через точку B могут проходить два или один касательный овал, $\sigma(B, u_\tau(Q_i))$. Пусть Q_1, Q_2 — точки касания этих овалов с лучом p , где $Q_1 \leq Q_2$. В момент попадания фазовой точки на луч L , полагаем $u = u_\tau(Q_1) \equiv u_\tau$ (см. (12)) и сохраняем это значения управления в течение некоторого времени, кратного периоду $T(B, u_\tau)$. В результате, после каждого оборота, фазовая точка поднимается (возрастает n) на величину $\Delta(B, u_\tau) > 0$ (см. (7)).

Далее, в момент некоторого очередного попадания на луч L , полагаем $u = 0$. Тогда после каждого оборота, фазовая точка спускается (убывает n) на величину $\Delta(B, 0) < 0$. Далее, значения $u = 0$ и $u = u_\tau$ чередуются, и переключения между ними происходят на луче L . В результате, непрерывная динамика порождает на луче L дискретную динамическую систему, для которой будут получены условия периодичности траекторий. При этом процесс управления строится так, чтобы обеспечить выполнение условия $n(t) > 0$, что дает решение поставленной задачи.

Перейдем к подробному построению метода управления, решающего задачу.

5.3. Разбиение луча L

Упорядочим точки луча L (29). Пусть $E_1, E_2 \in L$. Будем писать $E_1 < E_2$, если $n(E_1) < n(E_2)$.

Пусть $\{A, A'\} = \sigma(z_0, 0) \cap p$, $A < A'$.

Введем точки $B_0, B_1 \in L$ и момент времени t_A такие, что

$$B_0 = r(t_A, A, 0), \quad n(t, A, 0) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, T(z_0, 0)),$$

$$n(B_1) = n(B_0) + |\Delta(M_0, 0)|.$$

Здесь t_A — первый момент времени попадания фазовой точки из A в B_0 .

Тогда

$$B_0 = r(T(z_0, 0), B_1, 0) = r(t_A + T(z_0, 0), A, 0),$$

то есть траектория при $u = 0$, сделав полный оборот, попадет из B_1 в B_0 .

Обозначим $\Delta_0 = |\Delta(M_0, 0)|$, $n(B_0) = n_0$, $n(B_1) = n_1$. Введем последовательность $\{n_i\}$ такую, что

$$n_i = n_{i-1} + \Delta_0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Обозначим $B_i = (x(B), y(B), n_i) \in L$ (тогда $B_{i-1} < B_i$). Таким образом, получаем разбиение луча L (см. Рис.7)

$$L = [B, B_0) \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} [B_i, B_{i+1}),$$

где длина $[B_i, B_{i+1}) = \Delta_0$.

Заметим, что любая точка $M \in \sigma(z_0, 0) \cap p^+$ впервые возвращается на плоскость $n = 0$ вдоль соответствующей траектории при $u = 0$ в область p^- .

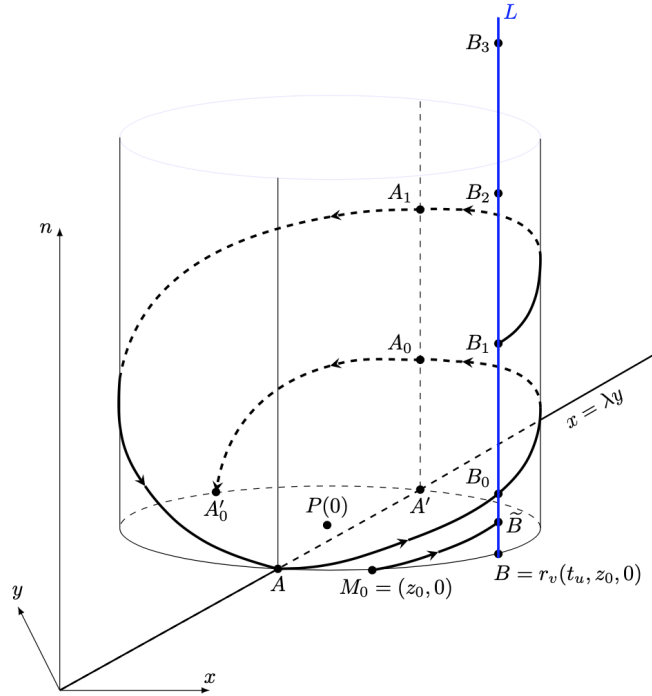


Рис. 7: Разбиение луча L точками B_i , $i = 0, 1, 2, \dots$.

5.4. Перевод точки M_0 на промежуток $[B_0, B_1) \in L$

Построим управление системой (4), переводящее за конечное время точку M_0 на промежуток $[B_0, B_1)$.

Пусть фазовая точка из положения M_0 впервые попадает на луч L в точку $\tilde{B} \in L$, то есть

$$\tilde{B} = r(t_u(z_0), M_0, 0) \in L, \quad 0 \leq n(t, M_0, 0) < n(\tilde{B}) \quad \text{при} \quad t \in [0, t_u(z_0)).$$

Очевидно, $\tilde{B} \in (BB_0)$.

Заметим, что любая точка $M \in \sigma(z_0, 0) \cap p^+$ впервые возвращается на плоскость $n = 0$ вдоль соответствующей траектории при $u = 0$ в область p^- .

В момент попадания фазовой точки на луч L , полагаем $u = u_\tau(Q_1) \equiv u_\tau$ (см. (12) и подраздел 5.1) и сохраняем это значение управления до тех пор пока фазовая точка из положения $\tilde{B}$ либо поднимется за конечное время в точку, принадлежащую $[B_0, B_1)$ (что возможно при достаточно малом $\Delta(M_0, u_\tau(B)) > 0$), либо поднимется в точку, расположенную выше B_1 (что возможно при достаточно большом $\Delta(M_0, u_\tau(B)) > 0$). В последнем случае полагаем $u = 0$ до момента попадания фазовой точки в $[B_0, B_1)$, что произойдет за конечное время, так как $\Delta(M_0, 0) < 0$ и длина $|[B_0, B_1]| = |\Delta(M_0, 0)|$.

Итак, получили точку R_0 первого попадания из M_0 в $[B_0, B_1)$

$$R_0 \in [B_0, B_1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из определения допустимого управления (условие 2) и из (27) следует, что при переводе точки M_0 на промежуток $[B_0, B_1) \in L$ при $u = 0$ и $u = u^*$ траектория делает целое число оборотов.

5.5. Построение гомеоморфизма G_u

Построим гомеоморфизм

$$G_u : [B_0, B_1) \rightarrow [B_0, B_1)$$

как композицию двух гомеоморфизмов, F_u и G_0 .

1) Гомеоморфизм F_u . В момент попадания фазовой точки в $[B_0, B_1)$, в точку R_0 , полагаем $u = u_\tau(B)$. Выбираем некоторое $s_u \in \mathbb{N}$ такое, что

$$n(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_0, u_\tau(B)) > n_1. \quad (31)$$

Тогда существует единственное $i^* = i(s_u) \in \mathbb{N}$, $i^* > 1$, такое, что

$$r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_0, u_\tau(B)) \leq B_{i^*} < r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), B_1, u_\tau(B)). \quad (32)$$

Таким образом, введено отображение сдвига вверх вдоль луча L , которое обозначим через F_u (см. Рис.8)

$$F_u : [B_0, B_1) \rightarrow F_u[B_0, B_1),$$

$$F_u(M) = r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), M, u_\tau(B)), \quad \text{если} \quad M \in [B_0, B_1). \quad (33)$$

Геометрический смысл данного этапа управления состоит в том, что промежуток $[B_0, B_1)$ поднимается вдоль луча L на расстояние $s(u) \cdot \Delta(R_0, u_\tau(B))$, и его образ, $F_u[B_0, B_1)$, накрывает точку B_{i^*} : $B_{i^*} \in F_u[B_0, B_1)$.

Поскольку величина $\Delta(M, u_\tau(B))$ одна и та же для любой точки $M \in L$, то введем обозначение $\Delta_u = \Delta(M, u_\tau(B))$. Очевидно, $\Delta_u > 0$. Таким образом, фазовая точка, двигаясь по цилиндру $C(B, 0) = C(z_0, 0)$, поднимается при каждом обороте на величину Δ_u .

Величина s_u является параметром процесса управления, удовлетворяющим (32).

Обозначим

$$\tilde{R}_1 \equiv F_u(R_0) = r(s_u \cdot T(B, u_\tau(B)), R_0, u_\tau(B)).$$

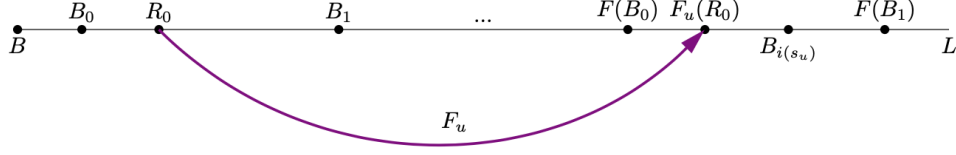


Рис. 8: Гомеоморфизм F_u .

2) Гомеоморфизм F_0 . Далее, в момент времени $t = s_u \cdot T(B, u_\tau(B))$ полагаем $u = 0$, до тех пока при некотором $s_0 \in \mathbb{N}$ не будет выполняться условие

$$r(s_0 \cdot T(B, 0), \tilde{R}_1, 0) \equiv R_1 \in [B_0, B_1].$$

Существование такого s_0 обеспечено условием (32) и тем, что $\Delta(M_0, 0) < 0$, $|[B_{i-1}, B_i]| = |\Delta(M_0, 0)|$. При этом величина s_0 определяется следующим образом

$$s_0 = \begin{cases} i^* - 1, & \text{если } \tilde{R}_1 \in [F_u(B_0)B_{i^*}), \\ i^*, & \text{если } \tilde{R}_1 \in [B_{i^*}F_u(B_1)). \end{cases} \quad (34)$$

Геометрически, на описанном этапе управления, фазовая точка делает s_0 шагов из положения $\tilde{R}_1$ вниз по лучу L в положение R_1 . При этом каждый шаг имеет величину $|\Delta(\tilde{R}_1, 0)|$. Поскольку для любой точки $M \in L$ величина $\Delta(M, 0)$ имеет одно и то же значение, то введем обозначение $\Delta_0 = |\Delta(M, 0)|$. Таким образом, фазовая точка, двигаясь по цилиндру $C(B, 0) = C(z_0, 0)$, опускается при каждом обороте на величину Δ_0 .

Обозначим через F_0 построенное отображение сдвига вниз по лучу L (см. Рис.9), то есть

$$F_0 : F_u[B_0B_1] \rightarrow [B_0B_1],$$

$$F_0(M) = r(s_0 \cdot T(B, 0), M, 0), \quad \text{если } M \in F_u[B_0B_1]. \quad (35)$$

Тогда получаем

$$R_1 = F_0(F_u(R_0)). \quad (36)$$

Тем самым построенная композиция $F_0 \circ F_u$ является требуемым гомеоморфизмом, который обозначим G_u (см. Рис.9)

$$G_u = F_0 \circ F_u : [B_0B_1] \rightarrow [B_0B_1]. \quad (37)$$

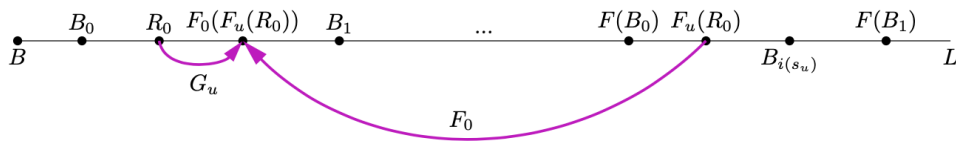


Рис. 9: Гомеоморфизмы F_0 и G_u .

5.6. Гомеоморфизмы окружности

Получим координатную запись отображения G_u . Учитывая, что $F_u, G_u : L \rightarrow L$ и (30), введем функции

$$f_u : [n_0, n_1) \rightarrow [n(F_u(B_0)), n(F_u(B_1))), \quad f_0 : [n(F_u(B_0)), n(F_u(B_1))) \rightarrow [n_0, n_1)$$

следующим образом

$$F_u(R) = F_u(x(B), y(B), n) = ((x(B), y(B), f_u(n)),$$

$$F_0(R') = F_0(x(B), y(B), n) = ((x(B), y(B), f_0(n')),$$

где $R \in [B_0, B_1)$, $R' \in F_u([B_0, B_1))$, $n \in [n_0, n_1)$, $n' \in [n(F_u(B_0)), n(F_u(B_1)))$. Следовательно

$$f_u(n) = n + s_u \Delta_u, \quad f_0(n') = n' - s_0 \Delta_0.$$

Обозначим $c_u = f_u^{-1}(n(B_{i^*})) \in [n_0, n_1)$. Тогда, если $g_u = f_0 \circ f_u : [n_0, n_1) \rightarrow [n_0, n_1)$, то

$$g_u(n) = \begin{cases} f_u(n) - (i^* - 1)\Delta_0, & \text{если } n \in [n_0, c_u), \\ f_u(n) - i^*\Delta_0, & \text{если } n \in [c_u, n_1). \end{cases} \quad (38)$$

Подставляя в (38) выражение для $f_u(n)$, получим

$$g_u(n) = \begin{cases} n + s_u \Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0 = n + \gamma_u, & \text{если } n \in [n_0, c_u), \\ n + s_u \Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0 - \Delta_0 = n + \gamma_u - \Delta_0, & \text{если } n \in [c_u, n_1), \end{cases} \quad (39)$$

где $\gamma_u = s_u \Delta_u - (i^* - 1)\Delta_0$. Окончательно получаем

$$g_u(n) = n + s_u \Delta_u \pmod{\Delta_0}, \quad (40)$$

где $n \in [n_0, n_1)$.

Сделаем замену $n \rightarrow \frac{n}{\Delta_0} = v \in [0, 1)$. Тогда вместо g_u получаем $\tilde{g}_u : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$

$$\tilde{g}_u(v) = v + \frac{s_u \Delta_u}{\Delta_0} \pmod{1}. \quad (41)$$

Если полуинтервал $[0, 1)$ отождествить с единичной окружностью S^1 , то можно рассматривать $\tilde{g}_u$ как гомеоморфизм $\tilde{g}_u : S^1 \rightarrow S^1$, а именно, поворот S^1 на угол $2\pi \cdot \frac{s_u \Delta_u}{\Delta_0}$.

Таким образом, построенный процесс управления порождает дискретную динамическую систему, задаваемую гомеоморфизмом поворота окружности $\tilde{g}_u : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$.

Пусть $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\{\tilde{g}_u^j(v), j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ – положительная полутраектория точки $v \in [0, 1)$, порожденная отображением $\tilde{g}_u$. Тогда получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Полутраектория $\{\tilde{g}_u^j(v), j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ периодична для любой точки $v \in [0, 1)$ тогда и только тогда, когда $\frac{\Delta_u}{\Delta_0} \in \mathbb{Q}$.*

При этом, если $\frac{s_u \Delta_u}{\Delta_0} = \frac{m_1}{m_2}$ – несократимая рациональная дробь, где $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, то период полутраектории $\{\tilde{g}_u^j(v), j \in \mathbb{Z}_+ \cup 0\}$ равен m_2 для любой точки $v \in [0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку гомеоморфизм $\tilde{g}_u$ является поворотом окружности на постоянный угол $2\pi \cdot \frac{s_u \Delta_u}{\Delta_0}$, то утверждение теоремы очевидно (см., например, [17]).

Полученный результат позволяет найти период θ финально периодического решения системы (4). Пусть $i_l = s_0$ – количество сдвигов вниз при l -ой итерации, то есть $i_l \in \{i^* - 1, i^*\}$,

$l = 1, 2, \dots, m_2$, где m_2 – период управляемой полутраектории $\{\tilde{g}_u^j\}$. Под итерацией понимается однократное применение гомеоморфизма G_u . Тогда

$$\theta = s_u \cdot m_2 \cdot T(B, u_\tau(B)) + T(B, 0) \cdot \sum_{l=1}^{m_2} i_l. \quad (42)$$

Пусть фазовая точка впервые попадает на промежуток $[B_0, B_1)$, в точку R_0 (см. подраздел 5.2), в момент времени $t = t'(z_0)$. Тогда

$$u(t) = u(t + \theta), \quad r(t, R_0, u(t)) = r(t + \theta, R_0, u(t + \theta)), \quad t \in [t'(z_0), \infty). \quad (43)$$

Таким образом, построено допустимое управление, решающее задачу, поставленную в разделе 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для нахождения периодов системы Лотки-Вольтерра, которые входят как в выражения (42), (43), так и в условие Теоремы 2, разработаны методы (см. [9], [18], [19]), позволяющие получить приближенно их значения.

ПРИМЕР 6. Пусть $\frac{\Delta_u}{\Delta_0} = \frac{1}{4}$, $i^* = 2$, $s_u = 4, 5, 6, 7, 8$ – все значения s_u , для которых справедливо условие (32). Тогда получаем следующие наборы значений m_2 и i_l , в зависимости от выбранного значения s_u

$$\begin{aligned} s_u = 4, \quad m_2 = 1, \quad i_1 = 1, & \quad s_u = 5, \quad m_2 = 4, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 1, \quad i_3 = 1, \quad i_4 = 2, \\ s_u = 6, \quad m_2 = 2, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 2, & \quad s_u = 7, \quad m_2 = 4, \quad i_1 = 1, \quad i_2 = 2, \quad i_3 = 2, \quad i_4 = 2, \\ s_u = 8, \quad m_2 = 1, \quad i_1 = 2. & \end{aligned}$$

5.7. Обобщение допустимого управления

Обобщим понятие допустимого управления, сформулированное в Определении 2. Расширим множество значений допустимого управления: $u_i \in \{v_j : v_j > 0, j = 1, \dots, m\}$. Кроме того, отбросим условие 2. Тогда появляется возможность строить дискретную периодическую динамику, организуя переключения управления на лучах $L(\hat{z}) = \{(\hat{z}, n) : \hat{z} \in D, n \geq 0\}$, где $\hat{z} \in \sigma(z_0, 0)$. При этом в качестве значений v_j по-прежнему используются касательные управления.

Для доказательства существования периодических траекторий естественно использовать теорему Пуанкаре об ориентированных гомеоморфизмах окружности, которые уже могут не являться поворотами на постоянный угол. Периодичность обеспечивается рациональностью числа вращения. В этом случае возникает задача о нахождении периодических траекторий. Заметим, что приведенные изменения сохраняют возможность практической реализации метода управления.

5.8. Двойное вращение

Рассмотрим следующее обобщение процесса управления, построенного в Разделе 5. Введем пороговую точку $C \in (B_0, B_1)$. Фиксируем два значения $s'_u, s''_u \in \mathbb{N}$, $s'_u < s''_u$, удовлетворяющие условию (31). Этим значениям соответствуют точки $B_{i^*}, B_{j^*} \in L$, для которых $i^*, j^* \in \mathbb{N}$, $1 < i^* < j^*$, и, соответственно, $B_{i^*} < B_{j^*}$, удовлетворяющие (32).

Пусть $s_u = s'_u$, если $R_0 \in [B_0, C)$, или $s_u = s''_u$, если $R_0 \in [C, B_1)$. Смысл такого управления состоит в следующем. При более близком расположении точки R_0 к плоскости $n = 0$, то есть при $R_0 \in [B_0, C)$, естественно "подстраховаться" и строить отображение F_u , поднимающее точку R_0 выше, чем в случае $R_0 \in [C, B_1)$, то есть когда точка R_0 расположена дальше от плоскости $n = 0$.

Тогда вместо отображения (41) получаем отображение

$$\tilde{h}_u(v) = \begin{cases} v + \frac{s'_u \Delta_u}{\Delta_0} (\text{mod } 1), & \text{если } v \in [0, \frac{n(C)}{\Delta_0}), \\ v + \frac{s''_u \Delta_u}{\Delta_0} (\text{mod } 1), & \text{если } v \in [\frac{n(C)}{\Delta_0}, 1), \end{cases} \quad (44)$$

называемое двойным поворотом (double rotation), или двухцветным поворотом окружности ([6], [7]). Отображение $\tilde{h}_u$ уже не является гомеоморфизмом: в общем случае оно необратимо и разрывно. При этом возникает вопрос: найдутся ли такие i^* , j^* , s'_u , s''_u , для которых управляемый процесс будет финально периодичным? Если ответ положительный, то для каких точек промежутка $[B_0, B_1)$ будет иметь место периодичность?

Говорят, что двойной поворот относится к конечному типу, если его аттрактор — интервал, а к бесконечному — если замыкание аттрактора является канторовым множеством ([20]). При этом ограничение двойного поворота конечного типа на его аттрактор является обычным поворотом. Тогда для построения периодического процесса управления актуальной становится задача нахождения соответствующего аттрактора. Последнее подкрепляется тем, что двойной поворот почти для всех, в смысле меры Лебега, точек пространства параметров, $\frac{s'_u \Delta_u}{\Delta_0}$, $\frac{s''_u \Delta_u}{\Delta_0}$, $\frac{n(C)}{\Delta_0}$, задающих поворот, относится к конечному типу [21].

6. Заключение

Построена и исследована модель управления непрерывной динамикой биосообщества, которая порождает дискретную динамическую систему, индуцирующую гомеоморфизмы окружности. Получены условия, в терминах коэффициентов и вольтерровских периодов, существования периодических траекторий управляемых непрерывной и дискретной систем. Для модели управления, порождающей двойные повороты окружности, сформулированы задачи нахождения ее аттрактора и периодических траекторий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кириллов, А.Н. Экологические системы с переменной размерностью // Обозр. прикл. промышл. мат. 1999. Т. 6, №2. С. 819-836.
2. Colonius, F. Optimal periodic control. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1988. 177 p.
3. Арнольд, В. И. Выпуклые оболочки и повышение производительности систем при пульсирующей загрузке // Сиб. матем. журн. 1987. Т. 28, №4. С. 29-31.
4. Давыдов, А. А., Мельник, Д. А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // Тр. ИММ УрО РАН. 2021. Т. 27, №2. С. 99-107.
5. Hausrath, A. R., Manasevich R. F. Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems // Revista Colombiana de Matematica. 1987. Vol. 21. P. 337-346.
6. Suzuki, H., Ito, S., Aihara, K. Double rotations // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2005. Vol. 13, iss. 2. P. 515-532.
7. Журавлев, В. Г. Двухцветные повороты единичной окружности // Изв. РАН. Сер. Матем. 2009. Т. 73, в. 1. С. 79-120.
8. Кириллов, А. Н., Иванова, А. С. Периодический и квазипериодический процессы управления в задаче сохранения видового состава биосообщества // Труды Карельского научного центра РАН. 2015. №10. С. 99-106.

9. Кириллов, А. Н., Иванова, А. С. Численное моделирование периодического процесса, сохраняющего видовую структуру биосообщества // Математическое моделирование. 2021. Т. 33, №6. С. 59-72.
10. Hamilton, W. Geometry for the selfish herd // J. Theor. Biology. 1971. Vol. 31, iss. 2. P. 295-311.
11. Gorcke, A. The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect // Eur. Phys. J. Plus. 2022. Vol. 137, article number 200. P. 1-11.
12. Arditi, R., Ginzburg, L. R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence // J. Theor. Biology. 1989. Vol. 139, iss. 3. P. 311-326.
13. Chen, X., Huang, L. A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator-prey model // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 428, iss. 2. P. 817-837.
14. Hamdallah, S. A, Arafa, A. A. Stability analysis of Filippov prey-predator model with fear effect and prey refuge // J. Appl. Math. Comput. 2023. URL: <https://doi.org/10.1007/s12190-023-01934-z>.
15. Ivanova, A. S., Kirillov, A. N. Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem // Autom. Remote Control. 2017. Vol. 78, №8. P. 1500-1511.
16. Кириллов, А. Н., Сазонов, А. М. Гибридная модель динамики популяций с режимом убежища: регуляризация и самоорганизация // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, в. 3. С. 467-482.
17. Каток, А. Б., Хасселблат, Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО, 2005. 464 с.
18. Shagi-Di S. The period of a Lotka—Volterra system // Taiwanese J. Math. 1997. Vol. 1, №4. P. 451-470.
19. Waldvogel, J. The period in the Lotka—Volterra system is monotonic // Journal of mathematical analysis and applications. 1986. Vol. 114, iss. 1. P. 178-184.
20. Artigiani, M., Fougeron, Ch., Hubert, P., Skripchenko, A. A note on double rotations of infinite type // Труды ММО. 2021. Т. 82, в. 1. С. 185-203.
21. Bruin, H., Clack, G. Inducing and unique ergodicity of double rotations // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2012. Vol. 32, iss. 12. P. 4133–4147.

REFERENCES

1. Kirillov, A. N. 1999, “Ecological systems with variable dimension”, *Obozr. Prikl. Promyshl. Mat.*, vol. 6, no. 2, pp. 819-836 (in Russian).
2. Colonius, F. 1988, “Optimal periodic control”, *Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag*, 177 p.
3. Arnold, V. I. 1987, “Convex hulls and the increase of efficiency of systems under impulse loading”, *Siberian Mathematical Journal*, vol. 28, issue 4, pp. 540-542.
4. Davydov, A. A., Melnik, D. A. 2021, “Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse selection”, *Tr. IMM UrO RAN*, vol. 27, no. 2. pp. 99-107.
5. Hausrath, A. R., Manasevich, R. F. 1987, “Periodic solutions of periodically harvested Lotka-Volterra systems”, *IREvista Colombiana de Matematica*, vol. 21, pp. 337-346.

6. Suzuki, H., Ito S. & Aihara, K. 2005, “Double rotations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 13, issue 2, pp. 515-532.
7. Zhuravlev, V. G. 2009, “Two-colour rotations of the unit circle”, *Izvestiya: Mathematics*, vol. 73, issue 1, pp. 79-120.
8. Kirillov, A. N., Ivanova, A. S. 2015, “Periodic and quasiperiodic control processes in the biocommunity species composition preserving problem”, *Tr. Karel. Res. Centr. RAS*, no. 10, pp. 99-106.
9. Kirillov, A. N., Ivanova, A. S. 2022, “Numerical Modeling of a Periodic Process That Preserves the Species Structure of a Biocommunity”, *Math. Models Comput Simul.*, vol. 14, no. 1, pp. 38-46.
10. Hamilton, W. 1971, “Geometry for the selfish herd”, *J. Theor. Biology*, vol. 31, issue 2, pp. 295-311.
11. Gorcke, A. 2022, “The influence of past in a population system involving intraspecific competition and Allee effect”, *Eur. Phys. J. Plus*, vol. 137, article number 200, pp. 1-11.
12. Arditi, R., Ginzburg, L. R. 1989, “Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence”, *J. Theor. Biology*, vol. 139, issue 3, pp. 311-326.
13. Chen, X., Huang, L. 2015, “A Filippov system describing the effect of prey refuge use on a ratio-dependent predator–prey model”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 428, issue 2, pp. 817-837.
14. Hamdallah, S. A., Arafa, A. A. 2023, “Stability analysis of Filippov prey–predator model with fear effect and prey refuge”, *J. Appl. Math. Comput.*, <https://doi.org/10.1007/s12190-023-01934-z>.
15. Ivanova, A. S., Kirillov, A. N. 2017, “Equilibrium and control in the biocommunity species composition preservation problem”, *Autom. Remote Control* vol. 78, no. 8, pp. 1500-1511.
16. Kirillov, A. N., Sazonov, A. M. 2023, “A hybrid model of population dynamics with refuge-regime: regularization and self-organization”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, vol. 33, issue 3, pp. 467-482.
17. Hasselblatt, B., Katok, A. 2003, “A first course in dynamics”, *Cambridge: Cambridge University Press*, 424 p.
18. Shagi-Di, S. 1997, “The period of a Lotka–Volterra system”, *Taiwanese J. Math.*, vol. 1, no. 4, pp. 451-470.
19. Waldvogel, J. 1986, “The period in the Lotka–Volterra system is monotonic”, *J. MATH. ANAL. APPL.*, vol. 114, issue 1, pp. 178-184.
20. Artigiani, M., Fougeron, Ch., Hubert, P. & Skripchenko, A. 2021, “A note on double rotations of infinite type”, *Tr. Moskov. Matem. Obsh.*, vol. 82, issue 1, pp. 185-203.
21. Bruin H., Clack, G. 2012, “Inducing and unique ergodicity of double rotations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, vol. 32, issue 12, pp. 4133–4147.

Получено: 30.05.24

Принято в печать: 26.12.2024