

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.968.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-74-89

К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений

Г. Джангибеков, Г. М. Козиев

Джангибеков Гулходжа — доктор физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (г. Душанбе).

Козиев Гулназар Мавлоназарович — кандидат физико-математических наук, Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана (г. Душанбе).

e-mail: gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru

Аннотация

В лебеговом пространстве с весом $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), где D — конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ , и содержащая внутри точку $z = 0$, рассматривается двумерный сингулярный интегральный оператор типа Михлина – Кальдерона – Зигмунда вида

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \\ + \iint_D \frac{\Omega_1(z, \theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta + \iint_D \frac{\Omega_2(z, \theta)}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

В зависимости от гомотопического класса $\mathfrak{M}_\nu$ ($\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m$) оператора A установлены эффективные необходимые и достаточные условия нётеровости оператора A в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$) и найдены формулы для подсчёта индекса оператора.

Полученные результаты применяются к задачам Дирихле и Неймана для общих эллиптических систем двух уравнений с двумя независимыми переменными высшего порядка.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, символ оператора, нётеровость, индекс оператора, эллиптическая система, задача Дирихле.

Библиография: 33 названий.

Для цитирования:

Джангибеков, Г., Козиев, Г. К теории двумерных сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем дифференциальных уравнений // Чебышёвский сборник, 2023, т. 25, вып. 5, с. 74–89.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.968.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-74-89

On the theory of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations

G. Jangibekov, G. M. Koziev

Jangibekov Gulkhoja — doctor of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

Koziev Gulnazar Mavlonazarovich — candidate of physical and mathematical sciences, International University of tourism and entrepreneurship of Tajikistan, (Dushanbe).

e-mail: gulkhoja@list.ru, gulnazar88@mail.ru

Abstract

In a Lebesgue space with weight $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$), where D is a finite singly connected domain of the complex plane bounded by a simple closed Lyapunov curve Γ and containing the point $z = 0$, we consider a two-dimensional singular integral operator of the Mikhlin – Calderon – Zygmund type of the form

$$(Af)(z) \equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \iint_D \frac{\Omega_1(z, \theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z, \theta)}}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} ds_\zeta, \quad \theta = \arg(\zeta - z).$$

Depending on the homotopy class $\mathfrak{M}_\nu$ ($\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m$) of the operator A , we establish effective necessary and sufficient conditions for the operator A to be Noetherian in $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$) and found formulas for calculating the index of an operator.

The results obtained are applied to the Dirichlet and Neumann problems for general elliptic systems of two equations with two higher-order independent variables.

Keywords: singular integral operator, operator symbol, Noetherian property, operator index, elliptic system, Dirichlet problem.

Bibliography: 33 titles.

For citation:

Jangibekov, G., Koziev, G.M. 2023, “On the theory of two-dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 74–89.

1. Введение

Основополагающие результаты по построению общей теории одномерных сингулярных интегральных уравнения были получены Ф. Нётером [1] и Ф. Карлеманом [2]. Изложение такой теории в гильбертовых классах функций дано в монографии одного из создателей этой теории Н.И. Мусхелишвили [3].

Первые исследования по многомерным сингулярным интегральным уравнениям принадлежат Ф. Трикоми [4], [5], который установил формулу дифференцирования двойных интегралов со слабой особенностью и правило композиции двойных сингулярных интегралов. В этом

направлении фундаментальное исследование принадлежит Ж. Жиро [6], [7], доказавшему справедливость теоремы Фредгольма для некоторых сингулярных интегральных уравнений на ляпуновских многообразиях.

Классические сингулярные интегральные операторы Михлина – Кальдерона – Зигмунда имеют вид

$$(Af)(x) = \int_D \frac{\Omega(x, \theta)}{r^n} f(y) dy, \quad (1)$$

где D – конечная или бесконечная область евклидова пространства E_n , $r = |x - y|$, $\theta = \frac{x-y}{r}$, функция $\Omega(x, \theta)$ называется характеристикой, а точка x – полюсом сингулярного интеграла (1).

Наиболее важные результаты по теории сингулярных интегральных операторов получены А. Кальдероном и А. Зигмундом в работе [8], где они доказали, что при определенных условиях на характеристику $\Omega(x, \theta)$, оператор A будет линейным (ограниченным) оператором, действующим из $L_p(E_n)$ в $L_p(E_n)$ $p > 1$. Общая теория многомерных сингулярных интегральных уравнений $(Af)(x) = g(x)$ по всему n – мерному пространству E_n в пространстве $L_2(E_n)$ построена С.Г. Михлиным [9]. Разлагая характеристику $\Omega(x, \theta)$ в ряд Фурье по сферическим функциям $Y_m^{(l)}(\theta)$ ($l = 1, \dots, \infty$; $m = 0, 1, 2, \dots$), С.Г. Михлин каждому оператору A из (1) ставил в соответствие непрерывную символическую функцию

$$\mathcal{A}(x, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_m^{(l)}(x) Y_m^{(l)}(\theta), \quad (2)$$

и доказал, что если символ (2) нигде не обращается в нуль, то для уравнения $(Af)(x) = g(x)$ с оператором A из (1) имеет место теория Фредгольма в пространстве $L_2(E_2)$. И.Ц. Гохберг [10] доказал необходимость этого условия для фредгольмовости уравнения, а И.Б. Симоненко [11] обобщил указанный результат на пространство $L_p(E_2)$, $p > 1$.

При исследовании сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области D возникает новая конструкция – граничные символы, связанные с границей Γ области D . В упомянутой выше работе [11], И.Б. Симоненко исследовал нетеровы свойства матричного сингулярного оператора A на гладком многообразии Γ с краем в пространстве $L_2^m(\Gamma)$ с помощью предложенного им локального принципа. Эти результаты были обобщены Р.В. Дудучавой [12] на случаи пространств $L_p^m(\Gamma)$ $p > 1$ и $W_p^s(\Gamma)$. Однако, как указывает И.Б. Симоненко (см. [11], стр. 758) найденные условия нетеровости, сформулированные в терминах частных индексов граничных матриц – символа оператора A , не являются эффективными.

В связи с этим приобретает интерес получение для общих классов двумерных сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области условий нетеровости и формулы для вычисления индекса в более простой доступной для применения формулы.

Пусть D – конечная односвязанная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$. В банаховом пространстве $L_{\beta-2/p}^p(D)$,

$$L_{\beta-2/p}^p(D) = \{f(z) : |z|^{\beta-2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L_{\beta-2/p}^p} = \|F\|_{L^p}\},$$

где $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$, рассматривается оператор

$$\begin{aligned} (Af)(z) &\equiv a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \\ &+ \iint_D \frac{\Omega_1(z, \theta)}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) d\zeta + \iint_D \frac{\overline{\Omega_2(z, \theta)}}{|\zeta - z|^2} \overline{f(\zeta)} d\zeta, \end{aligned} \quad (3)$$

Разлагая характеристики $\Omega_j(z, \zeta)$ ($j = 1, 2$) в ряд Фурье по полярному углу θ , и выделяя вполне непрерывные операторы, оператор из (3) можно записать в виде

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum'_{n=-m}^m \left(a_n(z)I + b_n(z)K \right) S_n, \quad (4)$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$; I – тождественный оператор, операторы K и S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_n f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i |n|} \iint_D \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in \overline{D};$$

$n \neq 0$ – целое, $\theta = \arg(\zeta - z)$, $\overline{S}_n \equiv K S_n K = (-1)^n S_{-n}$, черта обозначает операцию комплексного сопряжения, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [9], $a_n(z), b_n(z)$ ($n = 0, \pm 1, \dots, \pm m$) – комплекснозначные непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ функции.

При этом, хотя функции, входящие в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, являются комплексно-значными, само пространство будем считать вещественным, т.е. рассматривать его как линейное множество над полем вещественных чисел. Тогда оператор A будет обычным линейным ограниченным оператором в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, что следует, например из [13].

Всякий линейный ограниченный функционал на рассматриваемом (вещественном) пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ единственным образом представим представим в виде.

$$(f, \psi) = \operatorname{Re} \iint_D f(z) \psi(z) ds_z, \quad \psi \in L^q_{2-\beta-2/q}(D), \quad 1/p + 1/q = 1.$$

В соответствии с этим сопряженным к оператору A в $L^q_{2-\beta-2/q}(D)$ будет

$$A^* \equiv a_0(z)I + \overline{b_0(z)}K + \sum'_{n=-m}^m \overline{S}_n \left(a_n(\zeta)I + \overline{b_n(\zeta)}K \right).$$

В случае нетеровости под индексом оператора A , как обычно, понимается разность между числом линейно-независимых решений однородного уравнения $(Af)(z) = 0$ в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и числом линейно-независимых решений сопряженного однородного уравнения $(A^*\psi)(z) = 0$ в $L^q_{2-\beta-2/q}(D)$.

2. Гомотопическая классификация и Нётерова свойства

Как известно [14] простейшие двумерные сингулярные интегральные уравнения (4) играют важную роль в теории обобщенных аналитических функций и построении гомеоморфизма системы Бельтрами, а более общие сингулярные интегральные операторы по ограниченной области (см. [16], [17], [18]) связаны с основными краевыми задачами эллиптических систем уравнений первого и второго порядка на плоскости. Не вдаваясь в подробности, отметим, что некоторые частные случаи оператора A из (4) исследованы в работах [14] – [31].

Прежде всего заметим, что уравнение (4) наряду с искомой функцией $f(z)$ также содержит комплексно сопряжённую функцию $\overline{f(z)}$ и уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных уравнений с двумя неизвестными функциями $f(z)$ и $\overline{f(z)}$, если присоединить к данному уравнению другое, полученное переходом к комплексно сопряжённым значениям. Для этого в векторном пространстве

$$L^{2,p}_{\beta-2/p}(D) = \{(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in L_{\beta-2/p}(D)\}, \quad 1 < p < \infty$$

рассмотрим оператор

$$U = \begin{pmatrix} a_0(z) + \sum_{n=-m}^m a_n(z)S_n & b_0(z) + \sum_{n=-m}^m (-1)^n b_n(z)S_{-n}K \\ \overline{b_0(z)} + \sum_{n=-m}^m \overline{b_n(z)}S_n & \overline{a_0(z)} + \sum_{n=-m}^m (-1)^n \overline{a_n(z)}S_{-n}K \end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 1. Нетеровость оператора $A : L_{\beta-2/p}^p(D) \longrightarrow L_{\beta-2/p}^p(D)$ эквивалентна нетеровости оператора $U : L_{\beta-2/p}^{2,p}(D) \longrightarrow L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$.

Действительно, если функция $f(z)$ является решением операторного уравнения $(Af)(z) = g(z)$ из $L_{\beta-2/p}^p(D)$, то вектор $F = (f, \bar{f})$ будет решением системы $UF = Q$ из $L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$, где $Q = (g, \bar{g})$ и обратно, если вектор $F = (f_1, f_2)$ является решением системы $UF = Q$ из $L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$, то вектор $(\bar{f}_2, \bar{f}_1)$ также будет решением. Но тогда решением системы $UF = Q$ из $L_{\beta-2/p}^{2,p}(D)$ будет вектор $(\frac{f_1+\bar{f}_2}{2}, \frac{f_2+\bar{f}_1}{2})$. Отсюда следует, что функция $\frac{f_1+\bar{f}_2}{2}$ будет решением уравнения (4) из $L_{\beta-2/p}^p(D)$.

Далее, пусть k -число линейно-независимых решений однородного уравнения $(Af)(z) = 0$ над полем вещественных чисел, l -число линейно независимых решений однородной системы $UF = 0$ над полем комплексных чисел. Покажем, что $k = l$. Пусть $\{f_j(z)\}, j = 1, 2, \dots, k$, - фундаментальная система решений однородного уравнения (2.1). Тогда векторы $F_j = (f_j, \bar{f}_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) будут линейно-независимыми решениями уравнения $UF = 0$. Действительно, если $\sum_{j=1}^n c_j F_j = 0$, то $\sum_{j=1}^n c_j f_j = 0$, $\sum_{j=1}^n c_j \bar{f}_j = 0$ или $\sum_{j=1}^n c_j f_j = 0$ и $\sum_{j=1}^n \bar{c}_j f_j = 0$. Отсюда $\sum_{j=1}^n (c_j + \bar{c}_j) f_j = 0$, $\sum_{j=1}^n (c_j - \bar{c}_j) f_j = 0$. Поэтому $c_j + \bar{c}_j = 0$, $c_j - \bar{c}_j = 0$, т.е. $c_j = 0$. Таким образом, $k \leq l$. Также, как в ([32], стр.276) доказывается обратное неравенство $k \geq l$.

Совершенно аналогично доказывается, что однородное сопряжённое уравнение $A^*\psi = 0$ в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(D)$ и соответствующая система уравнений $U^*\Psi = 0$ в векторном пространстве $L_{2-\beta-2/q}^{2,q}(D)$ имеют одинаковое число линейно независимых решений, определенным образом соответствующих друг другу.

Из установленного выше соответствия между решениями неоднородного уравнения $Af = g$ и неоднородной системы $UF = Q$ следует, что уравнение $Af = g$ и соответствующая система $UF = Q$ нормально разрешимы лишь одновременно. Лемма 1 доказана.

Поскольку символ оператора S_n (см.[9]) равен $(\frac{\sigma}{|\sigma|})^n \equiv t^n$ ($\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$), то согласно [12], свойства оператора U определяются свойствами матрицы

$$\mathcal{G}_A(z, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z, t) & \mathcal{Q}_{2m}(z, t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t) & \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z, t) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2m}(z, t) &= \bar{t}^m \sum_{n=-m}^m a_n(z) t^{m+n}, \quad \mathcal{Q}_{2m}(z, t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m}^m (-1)^n b_n(z) t^{m-n}, \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t) &= t^m \sum_{n=-m}^m \overline{b_n(z)} \bar{t}^{m-n}, \quad \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z, t) = t^m \sum_{n=-m}^m (-1)^n \overline{a_n(z)} \bar{t}^{m+n}, \end{aligned}$$

и для нетеровости оператора A в $L_{\beta-2/p}^p(D)$ необходимо, чтобы

$$\det \mathcal{G}_A(z, t) \equiv \mathcal{P}_{2m}(z, t) \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z, t) - \mathcal{Q}_{2m}(z, t) \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t) \neq 0 \quad (5)$$

для всех $z \in \bar{D}$, $|t| = 1$.

Теперь введём следующие обозначения:

$$\Delta_n(z) = |a_n(z)|^2 - |b_n(z)|^2, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm m;$$

$$\begin{aligned}
M(z) &= \max_{|t|=1} \left[(a_m \bar{a}_{-m} - b_{-m} \bar{b}_m) t^{2m} + (a_{m-2} \bar{a}_{-m} - a_{m-1} \bar{a}_{-m+1} + a_m \bar{a}_{-m+2} - \right. \\
&\quad \left. - b_{-m} \bar{b}_{m-2} - b_{-m+1} \bar{b}_{m-1} - b_{-m+2} \bar{b}_m) t^{2m-2} + \dots \right], \\
-m(z) &= \min_{|t|=1} \left[(a_m \bar{a}_{-m} - b_{-m} \bar{b}_m) t^{2m} + (a_{m-2} \bar{a}_{-m} - a_{m-1} \bar{a}_{-m+1} + a_m \bar{a}_{-m+2} - \right. \\
&\quad \left. - b_{-m} \bar{b}_{m-2} - b_{-m+1} \bar{b}_{m-1} - b_{-m+2} \bar{b}_m) t^{2m-2} + \dots \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

ЛЕММА 2. Матрица $\mathcal{G}_A(z, t)$ невырождена для всех $z \in \bar{D}$ и $|t| = 1$ ($\det \mathcal{G}_A(z, t) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполнено одно из неравенств

$$\sum_{n=-m}^m (-1)^{|n|} \Delta_n(z) > 2M(z), \text{ при } \forall z \in \bar{D}, \tag{7}$$

$$\sum_{n=-m}^m (-1)^{|n|} \Delta_n(z) < -2m(z), \text{ при } \forall z \in \bar{D}. \tag{8}$$

Действительно, условие (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{G}_A(z, t) &= \sum_{n=-m}^m (-1)^n (|a_n|^2 - |b_n|^2) + \\
&+ 2\operatorname{Re} \left[(a_m \bar{a}_{-m} - b_{-m} \bar{b}_m) t^{2m} + (a_{m-2} \bar{a}_{-m} - a_{m-1} \bar{a}_{-m+1} + a_m \bar{a}_{-m+2} - \right. \\
&\quad \left. - b_{-m} \bar{b}_{m-2} - b_{-m+1} \bar{b}_{m-1} - b_{-m+2} \bar{b}_m) t^{2m-2} + \dots \right] + \\
&+ 2i\operatorname{Im} \left[(a_{m-1} \bar{a}_{-m} - a_m \bar{a}_{-m+1} + b_{m-1} \bar{b}_{-m} - b_m \bar{b}_{-m+1}) t^{2m-1} + \right. \\
&\quad \left. + (a_{m-3} \bar{a}_{-m} - a_{m-2} \bar{a}_{-m+1} + a_{m-1} \bar{a}_{-m+2} - a_m \bar{a}_{-m+3}) t^{2m-3} + \dots \right] \neq 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Как видно из (9) $\det \mathcal{G}_A(z, t)$ представляет собой комплексный тригонометрический полином порядка $2m$ по вещественной переменной $\vartheta : 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, t = e^{i\vartheta}$. Его мнимая часть является тригонометрическим полиномом порядка $2m - 1$ без свободного переменного и поэтому не может сохранять для всех значений ϑ постоянный знак. Поэтому неравенство (9) примет вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \det \mathcal{G}_A(z, t) &\equiv \sum_{n=-m}^m (-1)^n (|a_n|^2 - |b_n|^2) + \\
&+ 2\operatorname{Re} \left[(a_m \bar{a}_{-m} - b_{-m} \bar{b}_m) t^{2m} + (a_{m-2} \bar{a}_{-m} - a_{m-1} \bar{a}_{-m+1} + a_m \bar{a}_{-m+2} - \right. \\
&\quad \left. - b_{-m} \bar{b}_{m-2} - b_{-m+1} \bar{b}_{m-1} - b_{-m+2} \bar{b}_m) t^{2m-2} + \dots \right] \neq 0
\end{aligned} \tag{10}$$

для $\forall z \in \bar{D}, |t| = 1$. Тогда (10) эквивалентно выполнению одного из неравенств (7) или (8).

Множество комплексных матричных полиномов второго порядка, степени $2m$, удовлетворяющих условию (10), будем обозначать через $\mathcal{F}^2$. Два полинома $\mathcal{G}_1(t)$ и $\mathcal{G}_2(t)$ из $\mathcal{F}^2$ назовём гомотопными (пишется $\mathcal{G}_1(t) \sim \mathcal{G}_2(t)$), если существует семейство $\mathcal{G}(t; \tau)$ матричных полиномов из $\mathcal{F}^2$, непрерывно зависящих от действительного параметра $\tau, 0 \leq \tau \leq 1$, такое, что

$$\mathcal{G}(t; 0) \equiv \mathcal{G}_1(t), \quad \mathcal{G}(t; 1) \equiv \mathcal{G}_2(t).$$

Соотношение гомотопии (см. напр. [16]) разбивает $\mathcal{F}^2$ на классы гомотопии - связные, открытые компоненты множества $\mathcal{F}^2$.

Соответственно неравенству (10) возможны два случая:

$$\operatorname{Re} \det \mathcal{G}_A(z, t) > 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, |t| = 1, \quad (11)$$

$$\operatorname{Re} \det \mathcal{G}_A(z, t) < 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, |t| = 1. \quad (12)$$

Множество матричных полиномов, удовлетворяющих условию (11) или (12), будем обозначать соответственно через $\mathcal{F}_+^2$, $\mathcal{F}_-^2$. Если $\mathcal{G}_1(t) \sim \mathcal{G}_2(t)$, то $\mathcal{G}_1(t)$ и $\mathcal{G}_2(t)$ принадлежат одному и тому же из этих множеств. В дальнейшем будем рассматривать лишь $\mathcal{F}_+^2$.

Из (10) следует, что $P_{2m}(z, t) \equiv t^m \mathcal{P}_{2m}(z, t) = \sum_{n=-m}^m a_n(z) t^{m+n}$ — есть комплексный невырождающийся полином степени $2m$. Пусть $q_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, 2m$) комплексные корни уравнения $P_{2m}(z, t) = 0$. Согласно (10), а) эти корни не лежат на окружности $|t| = 1$, т.е. $|q_k(z)| \neq 1$, либо $|q_k(z)| < 1$, либо $|q_k(z)| > 1$. Корни первой группы обозначим через $q_k^+(z)$, $k = 1, 2, \dots, l^+$, корни второй группы — через $q_k^-(z)$, $k = 1, 2, \dots, l^-$, $l^+ + l^- = 2m$. В зависимости от количества нулей внутри единичного круга $|t| = 1$ возможно, априори $2m + 1$ случаев. Класс матричных полиномов из $\mathcal{F}_+^2$, для которого имеет место один из возможных случаев, будем обозначать через $\mathfrak{M}_\nu$, $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m$.

Определение. Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$ ($-m \leq \nu \leq m$), если для любых $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$ выполнено неравенство (11) и

$$\nu = \operatorname{Ind}_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t) = l^+ - m.$$

Введём обозначения

$$\lambda_{\nu,n} = \bar{a}_\nu a_n - b_\nu \bar{b}_n, \quad \mu_{\nu,n} = \bar{a}_\nu b_n - b_\nu \bar{a}_n$$

и отметим, что имеют место тождества $|\lambda_{\nu,n}(z)|^2 - |\mu_{\nu,n}(z)|^2 = \Delta_\nu(z) \Delta_n(z)$, где $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m$; $n = \pm 1, \dots, \pm m$, $\nu \neq n$.

ТЕОРЕМА 1. Для нётеровости оператора A в лебеговых пространствах $L_{\beta-2/p}^p(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий

$$\Delta_0(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-m, n \neq 0}^m (-1)^{|n|} (|\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2) \right)^{1/2} \text{ для } \forall z \in \overline{D}, \quad (13)$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m (-1)^{|n|} (|\mu_{\nu,n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu,n}(z)|^2) \right)^{1/2} \quad (14)$$

$$\text{и } \mu_{\nu,0}(\tau) \neq 0 \text{ для } \forall z \in \overline{D}, \tau \in \Gamma, \nu = \pm 1, \dots, \pm m.$$

При этом, если выполнено (13), то индекс оператора A равен нулю, а если выполнено (14), то

$$\varkappa = -\nu \operatorname{Ind}_\Gamma \mu_{\nu,0}(\tau),$$

где

$$\mu_{\nu,0}(\tau) = \overline{a_\nu(\tau)} b_0(\tau) - b_\nu(\tau) \overline{a_0(\tau)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в операторе A из (4) сингулярный интеграл распространён по комплексной плоскости E_2 :

$$(S_n^{E_2} f)(z) = \frac{|n|}{2\pi i |n|} \iint_{E_2} \frac{e^{in\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta, \quad z \in E_2,$$

то для фредгольмовости уравнения $(Af)(z) = g(z)$ в $L_{\beta-2/p}^p(D)$, $1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих неравенств

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m (-1)^{|n|} (|\mu_{\nu,n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu,n}(z)|^2) \right)^{1/2}, \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m.$$

3. Схема доказательства теоремы

1). Пусть оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$, то есть $Ind_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t) = 0$, и многочлен $P_{2m}(z, t)$ внутри круга $|t| = 1$ имеет ровно m корней. Тогда $\Delta_0(z) > 0$ и легко видеть, что исходный оператор A эквивалентен оператору

$$A_0 \equiv \bar{a}_0(z)A - b_0(z)\bar{A} = \Delta_0(z)I + \sum_{n=-m, n \neq 0}^m (\lambda_{0,n}(z)S_n - \mu_{0,n}(z)S_{-n}K, \quad (15)$$

и его коэффициенты удовлетворяют условию (13). Поскольку в этом случае рациональные функции $\mathcal{P}_{2m}(z, t)$, $\mathcal{Q}_{2m}(z, t)$ принимают вид

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t) = \Delta_0(z) + \bar{t}^m \sum_{n=-m, n \neq 0}^m \lambda_{0,n}(z)t^{m+n},$$

$$\mathcal{Q}_{2m}(z, t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m, n \neq 0}^m (-1)^n \mu_{0,n}(z)t^{m-n},$$

то по символу $\mathcal{G}_{A_0}(z, t)$ построим матрицу $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$, где $\tau \in \Gamma$, $|t| = 1$. Пользуясь результатами [32], показывается, что для $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ справедливо представление:

$$\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t) = R_0^-(\tau, t)R_0^+(\tau, t),$$

где $R_0^-(\tau, t)$ по переменной t аналитически продолжима в нижнюю, а $R_0^+(\tau, t)$ – в верхнюю полуплоскость, причем их определители нигде в нуль не обращаются, т.е. матрица $\mathcal{G}_{A_0}(\tau, t)$ имеет нулевые частные индексы. Тогда из [12] следует, что оператор A_0 нетеров в $L_{\beta-2/p}^p(D)$ ($1 < p < \infty$, $0 < \beta < 2$).

Вычислим теперь индекс оператора A_0 . Обозначим через $q_\nu^+(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots, l^+$) и $q_\nu^-(z)$ ($\nu = 1, 2, \dots, l^-$) все нули (с учётом их кратностей) полинома $P_{2m}(z, t)$, лежащие соответственно внутри и вне единичного круга $|t| = 1$. Оператор A_0 принадлежит классу $\mathfrak{M}_0$ т.е. выполнено (11) и $Ind_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t) = 0$. Тогда рациональная функция $\mathcal{P}_{2m}(z, t)$ имеет внутри единичного круга $|t| = 1$ одинаковое количество нулей и полюсов и $l^+ = l^- = m$. Поэтому $\mathcal{P}_{2m}(z, t)$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t) = \lambda_{0,n}(z)t^{-m} \prod_{\nu=1}^m (t - q_\nu^+(z)) \prod_{\nu=1}^m (t - q_\nu^-(z)),$$

где $\lambda_{0,n}(z) \neq 0$ в $\bar{D}$. Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_0^\tau}(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho) & \mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t, \rho) & \hat{\mathcal{P}}_2(z, t, \rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$, где

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho) = \lambda_{0,n}(z)t^{-m} \prod_{\nu=1}^m (t - \rho q_\nu^+(z)) \prod_{\nu=1}^m (\rho t - q_\nu^-(z))$$

$$\mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho) = \tau \varphi(\rho) \mathcal{Q}_{2m}(z, t), \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{N}, & \text{когда } 0 \leq \rho \leq \rho_0 < 1, \\ \frac{1}{N} \left(\varepsilon + \frac{N-\varepsilon}{1-\rho_0} \right) (\rho - \rho_0), & \text{когда } \rho_0 \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

rho_0 – вещественное число близкое к 1,

$$N = \sup |P_{2m}(z, t, \rho)|, \quad \varepsilon = \inf |\mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho)|,$$

где супремум (инфимум) берется по всем $z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $0 \leq \rho \leq 1$. По матрицам $\mathcal{G}_{A_0^o}(z, t, \rho)$ построим семейство интегральных операторов $\mathcal{A}_\rho^o$, $0 \leq \rho \leq 1$, вида (1). Не трудно заметить, что

$$|\mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho)| > |\mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho)|,$$

и $Ind_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho) = 0$, $\forall z \in \overline{D}$, $|t| = 1$, $0 \leq \rho \leq 1$, то есть операторы $\mathcal{A}_\rho^o$ нётеровы. Поскольку $\mathcal{A}_1^0 = A$ и $\mathcal{A}_0^0 = (-1)^m c(z) q_1^-(z) \cdot \dots \cdot q_m^-(z) I$, то индекс оператора A_0 равен нулю.

2). Пусть теперь оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, $\nu \neq 0$ т.е. выполнено (11), причём $Ind_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t) = \nu \neq 0$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$). Будем пока считать, что $\nu \geq 1$. Тогда $\Delta_\nu(z) > 0$ и легко показать, что оператор A эквивалентен оператору

$$A_\nu \equiv \bar{a}_\nu(z)A - b_\nu(z)\bar{A} = \Delta_\nu(z)S_\nu + \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m (\lambda_{\nu,n}(z)S_n + \mu_{\nu,n}(z)S_{-n}K), \quad (16)$$

а его коэффициенты удовлетворяют неравенству из (14). Отметим, что в формуле (16) под символом S_0 подразумевается единичный оператор I . Далее по символу $\mathcal{G}_{A_\nu}(z, t)$ построим граничную матрицу-функцию

$$\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(\tau, t) & \mathcal{Q}_{2m}(\tau, t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(\tau, t) & \hat{\mathcal{P}}_2(\tau, t) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2m}(\tau, t) &= \Delta_\nu(\tau)t^\nu + \bar{t}^m \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m \lambda_{\nu,n}(\tau)t^{m+n}, \\ \mathcal{Q}_{2m}(\tau, t) &= \bar{t}^m \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m (-1)^n \mu_{\nu,n}(\tau)t^{m-n}, \quad \tau \in \Gamma, \quad |t| = 1. \end{aligned}$$

Устанавливается, что матрица $\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau, t)$ при выполнении условия

$$\mu_{\nu,0}(\tau) = \overline{a_\nu(\tau)b_0(\tau)} - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \quad \forall \tau \in \Gamma$$

факторизуется с нулевыми частными индексами $\mathcal{G}_{A_\nu}(\tau, t) = R_\nu^-(\tau, t)R_\nu^+(\tau, t)$, где матрица $R_\nu^+(\tau, t)$ аналитически продолжима внутри единичного круга $|t| = 1$, и нули ее определителя лежат вне круга, а $R_\nu^-(\tau, t)$ аналитически продолжима вне единичного круга $|t| = 1$, и нули её определителя лежат внутри круга $|t| = 1$, причём условие $\mu_{\nu,0}(\tau) \neq 0$ $\tau \in \Gamma$ необходимо для нетеровости оператора A_ν в пространстве $L_{\beta-2/p}^p(D)$.

Перейдём теперь к вычислению индекса оператора A_ν . Оператор A принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, причём выполнено условие (10) и $Ind_{|t|=1} \mathcal{P}_{2m}(z, t) = \nu \neq 0$, ($\nu = 1, 2, \dots, m$). Тогда многочлен $P_{2m}(z, t)$ имеет ν нулей $q_j^+(z)$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$) внутри круга $|t| = 1$ и $2m - \nu$ нулей $q_j^-(z)$ ($j = 1, 2, \dots, 2m - \nu$) вне круга $|t| = 1$. Поэтому $\mathcal{P}_{2m}(z, t)$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t) = \lambda_{\nu,m}(z)t^{-m} \prod_{j=1}^{\nu} (t - q_j^+(z)) \prod_{j=1}^{2m-\nu} (t - q_j^-(z)),$$

Учитывая это, построим семейство матриц-функций

$$\mathcal{G}_{A_\nu}(z, t, \rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho) & \mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t, \rho) & \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z, t, \rho) \end{pmatrix},$$

непрерывно зависящее от параметра $\rho : 0 \leq \rho \leq 1$, где

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho) = \lambda_{\nu, m}(z) t^{-m} \prod_{j=1}^{\nu} (t - \rho q_j^+(z)) \prod_{j=1}^{2m-\nu} (\rho t - q_j^-(z)),$$

$$\mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho) = \mu_{\nu, 0}(z) + \rho \varphi(\rho) \left(\bar{t}^m \sum_{n=-m, n \neq 0, \nu}^m (-1)^n \mu_{\nu, n}(z) t^{m-n} \right), \quad z \in \bar{D},$$

а $\varphi(\rho)$ определяется также, как в предыдущем случае.

Построив теперь по матрицам $\mathcal{G}_{A_\nu^\rho}(z, t, \rho)$ семейство интегральных операторов A_ν^ρ , $0 \leq \rho \leq 1$, типа (1), заметим, что они нётеровы, ибо

$$|\mathcal{P}_{2m}(z, t, \rho)| > |\mathcal{Q}_{2m}(z, t, \rho)|, \quad \forall z \in \bar{D}, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

и $\mu_{\nu, 0}(z) \neq 0$, $z \in \Gamma$.

Так как $A_\nu^1 = A_\nu$ и

$$A_\nu^0 = (-1)^{2m-\nu} \lambda_{\nu, n}(z) q_1^-(z) q_2^-(z) \dots q_{2m-\nu}^-(z) S_{\nu-m} + \mu_{\nu, 0}(z) K,$$

то, применив к оператору A_ν^0 результаты работ [21], [23] получим, что индекс оператора A равен $\varkappa = 2(m - \nu) \text{Ind}_\Gamma \mu_{\nu, 0}(z)$.

Остается заметить, что в случае, когда оператор A_ν принадлежит классу $\mathfrak{M}_\nu$, где $-m \leq \nu \leq -1$, то следует перейти от оператора A_ν к оператору $KA_\nu K$.

4. Редукция задачи Дирихле для общей эллиптической системы к сингулярным интегральным уравнениям по ограниченной области

Рассмотрим теперь общую эллиптическую систему уравнений порядка $2m$ на плоскости, комплексная запись которой имеет вид

$$\sum_{n=-m}^m a_n(z) \frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \bar{z}^{m+n} \partial z^{m-n}} + b_n(z) \frac{\partial^{2m} \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^{n-m} \partial z^{n+m}} +$$

$$+ \sum_{0 \leq l+j \leq 2m-1} a_{l,j}(z) \frac{\partial^{l+j} \omega}{\partial \bar{z}^l \partial z^j} + b_{l,j}(z) \frac{\partial^{l+j} \bar{\omega}}{\partial \bar{z}^l \partial z^j} = g(z), \quad (17)$$

где $z = x + iy$, $\omega = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (17) являются непрерывными в $\bar{D}$ функциями, а $g(z) \in L^p(D)$, $2 < p < \infty$. По главной части системы (17) построим матрицу-функцию

$$\mathcal{G}(z, \sigma) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z, \sigma) & \mathcal{Q}_{2m}(z, \sigma) \\ \mathcal{Q}_{2m}(z, \sigma) & \mathcal{P}_{2m}(z, \sigma) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{P}_{2m}(z, \sigma) = \sum_{n=-m}^m a_n(z) \sigma^{m+n} \bar{\sigma}^{m-n}, \quad \mathcal{Q}_{2m}(z, \sigma) = \sum_{n=-m}^m b_n(z) \sigma^{m-n} \bar{\sigma}^{m+n}.$$

Эллиптичность системы (17) означает, что для любой точки $z \in \bar{D}$ и любого не равного нулю комплексного числа $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ должно выполняться неравенство $\det \mathcal{G}_z(\sigma) \neq 0$.

$$\det \mathcal{G}(z, \sigma) \equiv |\mathcal{P}_{2m}(z, \sigma)|^2 - |\mathcal{Q}_{2m}(z, \sigma)|^2 \neq 0 \quad (18)$$

для всех $z \in \bar{D}$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0$. В дальнейшем, для удобства введя обозначение $t = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}}$, матрицу-функцию $\mathcal{G}_{2m}(z, \sigma)$ запишем в виде

$$\mathcal{G}(z, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{2m}(z, t) & \mathcal{Q}_{2m}(z, t) \\ \hat{\mathcal{Q}}_{2m}(z, t) & \hat{\mathcal{P}}_{2m}(z, t) \end{pmatrix}, \quad |t| = 1, \quad z \in \bar{D},$$

где

$$\mathcal{P}_{2m}(z, t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m}^m a_n(z) t^{m+n}, \quad \mathcal{Q}_{2m}(z, t) = \bar{t}^m \sum_{n=-m}^m b_n(z) t^{m-n},$$

Без ограничения общности будем считать, что $D = \{z : |z| < 1\}$. Для общего уравнения (17) будем исследовать краевую задачу Дирихле:

Задача Дирихле. Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\bar{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (17), а на её границе Γ – краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^j \omega}{\partial n^j} \right|_{\Gamma} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (19)$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - означает производную функции $\omega(z)$ по направлению внешней нормали в точках контура Γ .

Известно [14],[15],[17], что любая комплекснозначная функция класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\bar{D})$, ($p > 2$) удовлетворяющая на границе Γ однородным краевым условиям (2), представляется в виде

$$\omega(z) = \iint_D G_m(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\zeta, \quad (20)$$

с произвольной комплекснозначной плотностью $f(z) \in L_p(D)$, $p > 1$, где $G_m(z, \zeta)$ [15] функция Грина уравнения $\Delta^m \omega \equiv \frac{\partial^m \omega}{\partial z^m \partial \bar{z}^m} = 0$ в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$:

$$G_m(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi[(m-1)!]^2} |\zeta - z|^{2(m-1)} \ln \left| \frac{\zeta - z}{1 - z\bar{\zeta}} \right|^2 + \\ + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^k}{k} |\zeta - z|^{2(m-k-1)} [(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)]^k.$$

Тогда для производных $\frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \bar{z}^{m+n} \partial z^{m-n}}$, $n = 0, 1, 2, \dots, m$ имеем выражения

$$\frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \bar{z}^m \partial z^m} = f(z) \quad \text{при} \quad n = 0, \\ \frac{\partial^{2m} \omega}{\partial \bar{z}^{m+n} \partial z^{m-n}} = \iint_D K_n(z, \zeta) f(\zeta) d\zeta \equiv (S_{2n}^* f)(z) \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

где

$$K_n(z, \zeta) = \frac{(-1)^n n}{\pi} \cdot \frac{(\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1}}{(\zeta - z)^{n+1}} + \frac{(-1)^{m-n}}{\pi(m-1)!(n-1)!} \sum_{k=0}^{m-1} C_{m+n}^k (-1)^k! \times \\ \times (m-1)(m-2) \dots (m-k) \cdot (m+n-1-k)! \frac{(\zeta - z)^{m-1-k} (\bar{\zeta} - \bar{z})^{n-1} \bar{\zeta}^{m+n-k}}{(1 - z\bar{\zeta})^{m+n-k}}, \quad (22)$$

причём ядро $K(z, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \Gamma$ и интегральный оператор S_{2n}^* локально эквивалентен сингулярному оператору S_{2n} . Очевидно, что все производные от функции $\omega(z)$ по z и по $\bar{z}$ до $2m - 1$ -го порядка дают интегральные операторы с непрерывными ядрами или с ядрами, имеющими слабую особенность и, следовательно, являются вполне непрерывными в $L_p(D)$ ($2 < p < \infty$) операторами.

В силу формул (21) для определения комплекснозначной функции $f(z) \in L_p(D)$ ($2 < p < \infty$) из (17) получим следующее двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$a_0(z)f(z) + b_0(z)\overline{f(z)} + \sum_{n=-m}^{m'} a_n(z)(S_{2n}^*f)(z) + b_n(z)\overline{(S_{2n}^*f)(z)} + (Tf)(z) = g(z). \quad (23)$$

Применяя к уравнениям (23) теорему 1, получим что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы задача Дирихле (19) для любой эллиптической системы (17) с непрерывными коэффициентами в классе $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\bar{D})$, была нётеровой, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-m, n \neq 0}^m (|\mu_{0,n}(z)|^2 - |\lambda_{0,n}(z)|^2) \right)^{1/2} \text{ для } \forall z \in \bar{D}, \quad (24)$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \left(M^2(z) + \sum_{n=-m, n \neq \nu}^m (|\mu_{\nu,n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu,n}(z)|^2) \right)^{1/2} \quad (25)$$

$$\text{и } \overline{a_\nu(\tau)b_0(\tau)} - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \neq 0 \text{ для } \forall z \in \bar{D}, \tau \in \Gamma, \nu = \pm 1, \dots, \pm m.$$

При этом, если выполнено (24), то задача фредгольмова, а если выполнено (25), то

$$\kappa = -2\nu \text{Ind}_\Gamma \left(\overline{a_\nu(\tau)b_0(\tau)} - b_\nu(\tau)\overline{a_0(\tau)} \right).$$

Задача Неймана. Найти функцию $\omega(z)$ из класса $W_p^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\bar{D})$, удовлетворяющую внутри D уравнению (17), а на ее границе Γ краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^j \omega}{\partial n^j} \right|_\Gamma = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (26)$$

где $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ - означает производную функции $\omega(z)$ по направлению внешней нормали в точках контура Γ . Теперь вместо представления (20) воспользуемся представлением [15], [33] функций, удовлетворяющих m условиям (26) по формуле

$$\omega(z) = \iint_D N_m(z, \bar{\zeta}) f(\zeta) d\zeta, \quad (27)$$

где

$$N_m(z, \bar{\zeta}) = \frac{1}{\pi[(m-1)!]^2} |\zeta - z|^{2(m-1)} \ln |(\zeta - z)(1 - z\bar{\zeta})|^2 + g_m(z, \bar{\zeta})$$

функция Неймана уравнения $\Delta^m \omega \equiv \frac{\partial^m \omega}{\partial z^m \partial \bar{z}^m} = 0$ в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$, причем при $m \geq 2$ эти функции определяются по рекуррентной формуле

$$\frac{\partial^2 N_m(z, \bar{\zeta})}{\partial z \partial \bar{z}} = N_{m-1}(z, \bar{\zeta}).$$

Также как в случае Задачи Дирихле, Задача Неймана (26), (27) эквивалентным образом приводится к сингулярным интегральным уравнениям вида (23).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nother F., *Über eine Klasse singularer Integralgleichungen* // Math. Ann., 1921, 82, 42 – 63.
2. Carleman T., *Sur la resolution de certaines equations integrales* // Ark. Math., 1922, 16, № 26, 1–19.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* // М.: Наука, 1968, 511 с.
4. Tricomi F.G. *Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie "con asterisco"* // Rend. Accad. Naz. Lincei, III, ser. 6a, fasc. 9, 1926, 535 – 539.
5. Tricomi F.G. *Equazioni integrall contenenti il valor principale di un integrale doppio* // Math. Z., 27, 1928, 87 – 133.
6. Giraund G. *Equations a integrales principales* // Ann. Scient. Ecole norm. super., 51, fasc. 3 et, 1934, 251 – 372.
7. Giraund G. *Sur une classe generale d'equations a interrales principales* // C. r. Acad. sci., 202, № 26, 1936, 2124 – 2126.
8. Calderon A. P. and Zygmund A., *On singular integrals* // Amer. J. Math., 78, № 2, (1956), 289 – 309.
9. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения* // М.: Физматгиз, 1962, 254 с.
10. Гохберг И.Ц. *К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений* // ДАН СССР, 133, № 6, 1960, 1279 – 1282.
11. Симоненко И.Б. *Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений* // Изв. АН СССР, сер. матем. I-II, т. 29, № 3, 4, 1965, с. 567 – 580, 757 – 782.
12. Duduchava R. *On multidimensional singular integral operators. I-II* // Journal of Operator Theory, 11, 1984, 41 – 76, 199 – 214.
13. Stein E.M. *Note on singular integrals* // Proc. Amer. Math. Soc., 1957, vol. 8. p. 250–254.
14. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции* // М.: Физматгиз, 1959, 628 с.
15. Векуа И.Н. *Новые методы эллиптических уравнений* // М.-Л.: Тех.лит, 1959, 298 с.
16. Джураев А.Д. *Об одном методе исследования сингулярных интегральных уравнений по ограниченной области* // ДАН СССР, т. 197, № 46, 1971, с. 1251 – 1254.
17. Джураев А.Д. *Метод сингулярных интегральных уравнений* // М.: Наука, 1987, 415 с.
18. Боярский Б.В. *Исследования по уравнениям эллиптического типа на плоскости и граничным задачам теории функций* // Дисс. докт. физ.-мат. наук. Москва, 1960.
19. Комяк И.И. *Об условиях нетеровости и формуле индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений* // Докл. АН БССР, т. 22, № 6, 1978, с. 488 – 491.
20. Комяк И.И. *Условия нетеровости и формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений по круговой области* // Дифференц. уравнения, 1980, том 16, № 2, 328 – 343

21. Бильман Б.М., Джангибеков Г. Об условиях нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами по ограниченной односвязной области // ДАН СССР, т. 288, № 4, 1986, с. 792 – 797.
22. Бойматов К.Х., Джангибеков Г. Об одном сингулярном интегральном операторе // Успехи математических наук. т. 43, вып.3 (261), 1988, с. 171 – 172.
23. Джангибеков Г. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов // ДАН СССР, т. 300, № 42, 1988, с. 272 – 276.
24. Джангибеков Г. Об одном классе сингулярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем на плоскости // ДАН СССР, т. 330, № 4, 1993, с. 415 – 419.
25. Джангибеков Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторах по ограниченной области // ДАН СССР, т. 383, № 1, 2002, с. 7 – 9. 415 – 419.
26. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов по ограниченной области // ДАН России, т. 396, № 4, 2004, с. 449 – 454.
27. Джангибеков Г., Худжаназарова Г.Х. О задаче Дирихле для эллиптической системы двух уравнений четвертого порядка на плоскости // ДАН России, т. 398, № 2, 2004, с. 151 – 155.
28. Джангибеков Г., Валиев Н.Г. О некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с характеристиками зависящими от полюса // ДАН РТ, т. 57, № 7, 2014, с. 556 – 562.
29. Джангибеков Г., Козиев Г.М. Об одном двумерном сингулярном интегральном операторе с нечетной характеристикой // ДАН РТ, т. 58, № 10, 2015, с. 886 – 893.
30. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М., Худжаназарова Г.Х. Об условиях нетеровости и индексе одного класса сингулярных интегральных операторов по ограниченной односвязной области // Вестник Московского университета. Сер. 1. Матем., мех., 2019, № 2, с. 9 – 14.
31. Джангибеков Г., Одинабеков Д.М. К теории Нетера двумерных сингулярных интегральных операторов с четной характеристикой по ограниченной области // В сб. Современные проблемы математики и механики. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2019, с. 50 – 53.
32. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи // М.: Наука, 1970, 379 с.
33. Begehr H., Vanegas C.J., Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation // Math. Nachr. 279 (2006) 38–57.

REFERENCES

1. Nother F., 1921, “Über eine Klasse singularer Integralgleichungen”, *Math. Ann.*, 82, pp. 42 – 63.
2. Carleman T. 1922, “Sur la resolution de certaines equations integrales”, *Ark. Math.*, 16, vol 26, pp. 1 – 19.
3. Muskhelishvili N. I. 1968, “Singular integral equation”, *M.; Nauka*, 511 p. (English transl.: Noordh., Groningen, 1953.)

4. Tricomi F. G. 1926, "Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie "con asterisco", *Rend. Accad. Naz. Lincei*, III, ser. 6a, fasc. 9, pp. 535 – 539.
5. Tricomi F. G. 1928, "Equazioni integrall contenenti il valor principale di un integrale doppio", *Math. Z.*, 27, pp. 87 – 133.
6. Giraund G. 1934, "Equations a integrales principales", *Ann. Scient. Ecole norm. super.*, 51, fasc. 3 et, pp. 251 – 372.
7. Giraund G. 1936, "Sur une classe generale d'equations a interrales principales", *C. r. Acad. sci.*, 202, vol 26, pp. 2124 – 2126.
8. Calderon A. P. and Zygmund A., 1956, "On singular integrals", *Amer. J. Math.*, 78, vol 2, pp. 289 – 309.
9. Mikhlin C. Г. 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations", *Fizmatgiz, Moscow* (Russian);(English transl.: Pergamon Press, New York 1965.)
10. Gocheberg I. Z. 1960, "On the theory of multidimensional singular integral equations ". *C. R. (Dokl.) Acad. Sci. USSR, n. Ser.*, 133, vol. 6, pp. 1279 – 1282(Russian).
11. Simonenko I. B . 1965, "A new general method for the investigatoin of linear operator integral equations". (Russian). *I. Izv. Akad.Nauk SSSR, Ser. Mat.. I-II*, 29, vol. 3, 4, 567 – 580, pp. 757 – 782. (Russian)
12. Duduchava R. 1984, "On multidimensional singular integral operators". I-II, *Journal of Operator Theory*, 11, 1984, 41 – 76, pp. 199 – 214.
13. Stein E. M. 1957, "Note on singular integrals" *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, pp. 250 – 254.
14. Vekua И. N. 1959, "Generalized Analytic Functions", *M.: Fizmat.* 628 p. (Russian) (English transl.: Pergamon Press, Oxford, 1962.)
15. Vekua И. N. 1948, "New methods of solving elliptic equations", *M.-L: Tekh.lit.*, 298 p.(Russian) (English transl.:North Holland, Amsterdam, 1967.)
16. Dzuraev A.D. 1971, "On the one method of Singular Integral Equations on a boueddomain ", *Dokl. Acad. Sci. USSR*, т. 197, vol 46, pp. 1251 – 1254 (Russian).
17. Dzhuraev A. D. 1987, " Method of Singular Integral Equations", *M.: Hayka* (Russian) Longman, Harlow, 1992. 1987, 415 c.(English transl.:Longman, Harlow, 1992).
18. Bojarski B. 1960, " Studies on elliptic equations in plane domains and boundary value problems of function theory. *Dr. sci. thesis, Steklov Inst. Math., Moscow* (Russian).
19. Komyak I. I. 1978, "The noether property and the index of a class of two-dimensional singular integral equations", *Dokl. Acad. Sci. BSSR*, Ser. 22, vol 6, pp. 488 – 491 (Russian).
20. Komyak I. I. 1980, "The noether property and the index of a class of two-dimensional singular integral equations in the ", *Differential equations*, Ser. 16, vol 2, pp. 328 – 343 (Russian).
21. Bilman B. M., & Dzangibekov G. 1986, "Noethericity conditions and index for some two-dimensional singular integral equations with discontinuous coefficients over a bounded simply connected domain", *Dokl. Acad. Sci. USSR*, Ser. 288, vol 4, p. 792 – 797.(Russian) (English transl.:Soviet Math. Dokl. 33 vol. 3, pp. 752 – 757.)

22. Boimatov K. H., & Dzangibekov G. 1988, "On a singular integral operator", *Uspekhi math.nauk* 43, vyp. 3 (261), pp. 171 – 172. (Russian) (English transl.: Math. Surveys 43 (1988), vol 3, pp. 199 – 200.).
23. Dzangibekov G. 1988, "On the Noethericity and index of a class of two – dimensional singular integral equation with discontinuous coefficients" *Dokl. Acad. Sci. USSR*, Ser.300,vol 42, pp. 272 – 276.(Russian) (English transl.: Soviet Math. Dokl. 37 1988, vol 3, pp. 639 – 643.)
24. Dzangibekov G. 1993, "On a class of two – dimensional singular integral operators and its applications to boundary value problems for elliptic systems of equations in the plane", *Dokl.Akad.Nauk* 330, no.4, pp. 415–419. (Russian). (English transl.: Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 47, (1993), no 3, pp. 498 – 503.)
25. Dzangibekov G. 2002 "On some two-dimensional singular integral operators on a bounded domain", *Dokl.Akad.Nauk*, т. 383, vol 1, pp. 415 – 419.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2002)
26. Dzangibekov G., & Khudzhanazarova G. Kh. 2004, "On the Noethericity and index of some two-dimensional singular integral operators over bounded domain", *Dokl.Akad.Nauk*, 396, no 4, pp. 449 – 454.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2004)
27. Dzangibekov G., & Khudzhanazarova G. Kh. 2004, "On the Dirichlet problem for an elliptic system of two fourth-order equations on a plane", *Dokl.Akad.Nauk* 398, vol 2, 2004, c. pp. 151 – 155.(Russian) (English transl.:Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 2004).
28. Dzangibekov G., & Valiev N. G. 2014, "On some two-dimensional singular integrals operators with characteristics depending on the pole", *Dokl. Acad. Sci. Taj.*, Ser. 57, vol 7, pp. 556 – 562.(Russian).
29. Dzangibekov G., & Koziev G. M. 2015, "The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *Dokl. Acad. Sci. Taj.*, т. 58, vol 10, pp. 886 – 893. (Russian).
30. Dzangibekov G., & Одинабеков Д. М., & Khudzhanazarova G. Kh. 2019, "On the Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 74:2 (2019), 49 – 54. Ser. 1.(Russian). (English transl.:Moscow University Mathematics Bulletin Mathem., meh., vol 2, pp. 9 – 14).(Russian).
31. Dzangibekov G., & Odinabekov D. M. 2019, "The Noetherian conditions and the index of some class of singular integral operators over a bounded simply connected domain", *On Sat. Modern problems of mathematics and mechanics. Moscow State University M.V. Lomonosov*, pp. 50 – 53.(Russian).
32. Vekua N. P. 1970, "Systems of singular integral equations and some boundary problems", *M.: Science*, 379 p.
33. Begehr H., & Vanegas C. J., 2006, "Iterated Neumann problem for higher order Poisson equation", *Math. Nachr.* 279, pp. 38 – 57.

Получено: 23.05.2024

Принято в печать: 26.12.2024