

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-57-73

О нулях периодических в среднем функций относительно
свёртки Бесселя¹

Вит. В. Волчков, Г. В. Краснощёких

Волчков Виталий Владимирович — доктор физико-математических наук, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (г. Донецк).

e-mail: volna936@gmail.com

Краснощёких Глеб Витальевич — аспирант, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (г. Донецк).

e-mail: wolverimred@mail.ru

Аннотация

В статье изучаются множества единственности для решений уравнения свёртки Бесселя $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$, $\alpha \in (-1/2, +\infty)$. Показано, в частности, что если $g = \chi_r$ — индикатор отрезка $[-r, r]$, а чётная функция $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет уравнению $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0$ и равна нулю на $(r - \varepsilon, r)$ или $(r, r + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. При этом интервал нулей $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, вообще говоря, расширить нельзя. Установлено, что подобное явление имеет место и для решений уравнения $f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0$, где δ_r — чётная мера, сопоставляющая чётной непрерывной функции φ на $\mathbb{R}$ число $\varphi(r)$. Найдены приложения этих результатов к теоремам единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, теоремам о нулевых множествах для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

Ключевые слова: обобщенная свёртка, сферическое преобразование, множества единственности, теоремы о замыкании сдвигов, лакунарные ряды.

Библиография: 34 названия.

Для цитирования:

Вит. В. Волчков, Г. В. Краснощёких. О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 57–73.

¹Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 124012400352-6).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-57-73

On the zeros of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution

Vit. V. Volchkov, G. V. Krasnoschekikh

Volchkov Vitaly Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Donetsk National University (Donetsk).*e-mail: volna936@gmail.com***Krasnoschekikh Gleb Vitalyevich** — postgraduate student, Donetsk National University (Donetsk).*e-mail: wolverimred@mail.ru***Abstract**

In paper, we study uniqueness sets for solutions to the Bessel convolution equation $f \overset{\alpha}{\star} g = 0$, $\alpha \in (-1/2, +\infty)$. It is shown, in particular, that if $g = \chi_r$ is an indicator function of the segment $[-r, r]$, and an even function $f \in C(\mathbb{R})$ satisfies the equation $f \overset{\alpha}{\star} \chi_r = 0$ and is zero on $(r - \varepsilon, r)$ or $(r, r + \varepsilon)$ for some $\varepsilon > 0$, then $f = 0$ on $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. In this case, the interval of zeros $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, cannot generally be extended. It has been established that a similar phenomenon occurs for solutions of the equation $f \overset{\alpha}{\star} \delta_r = 0$, where δ_r is an even measure that maps an even continuous function φ on $\mathbb{R}$ to a number $\varphi(r)$. Applications of these results to uniqueness theorems for convergent sequences of linear combinations of Bessel functions, the zero set theorem for solutions of the Cauchy problem of the generalized Euler-Poisson-Darboux equation and the closure theorem of generalized shifts are found.

Keywords: generalized convolution, spherical transformation, uniqueness sets, shift closure theorems, lacunar series.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

Krasnoschekikh, G.V., Volchkov, Vit.V. 2024, “On the zeros of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 57–73.

1. Введение

Первоначально понятие периодической в среднем функции (псф) было введено Ж. Дельсартом [1]. В дальнейшем оно варьировалось в работах разных авторов [2], [3], [4, § 11, п. 3], [5, § 2].

Пусть $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ — пространство распределений на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Функция $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ называется периодической в среднем относительно ненулевого распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, если f является решением уравнения свёртки

$$f * T = 0.$$

Некоторые свойства псф похожи на соответствующие свойства обычных периодических функций на вещественной оси. Так, скажем, ненулевые псф не стремятся к нулю на бесконечности и

не принадлежат пространству $L^p(\mathbb{R})$ при $1 \leq p < \infty$ [2, § 8, § 18]. Кроме того, отсутствие у непостоянной непрерывной функции двух несоизмеримых периодов имеет следующую аналогию для псф: если функция f периодична в среднем относительно распределений $T_1, T_2 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ и преобразования Фурье $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2$ не имеют общих нулей на $\mathbb{C}$, то $f = 0$. Это утверждение широко известно под названием теоремы Л. Шварца о спектральном анализе [5, § 2].

Ряд авторов изучали множества единственности для различных классов псф и их обобщений. К указанному направлению исследований относятся теорема Титчмарша о свёртке [6, гл. XI, § 11.11], различные теоремы об однозначном определении псф по своим значениям вблизи выпуклой оболочки носителя T [7, гл. VI], [8], [9, теорема 8], [10, § 3], [11, гл. 5], [12, § 6], [13, часть 3, §§ 1.3, 2.3], [14, часть III], [15]–[17], теорема Э. Т. Квинто о множествах единственности ядра обобщенного преобразования Помпейю с аналитическим весом [18], проблема Ж. П. Кахана о возможной длине ”люка” (интервала нулей) у ненулевых функций из заданного подпространства, инвариантного относительно сдвигов [4, § 11, п. 3], проблема Ю. И. Любича о существовании для псф множеств единственности специального вида [19], [20], [14, теорема 8.7], проблема о структуре спектра псф, удовлетворяющих условиям единственности типа Ф. Йона [13, часть 2, гл. 4, проблема 4.3], [14, §§ 14.2, 15.3, 16.2], [21], [22]. В этой связи также отметим теоремы об однозначном определении некоторых классов функций с нулевыми сферическими средними по своим значениям на тощих множествах [13, часть 2, § 1.5, следствие 1.4], [23, часть II, гл. 3, теорема 3.5], [24, теорема 3], изучение множеств единственности ядра преобразования Радона на сферах [13, часть 5, § 1.3], [23, часть II, § 7.5], [25, теорема 4], описание различных классов псф, равных нулю в некотором шаре [14, теоремы 14.10, 15.8, 16.5, 17.7], [21], теоремы о кольцевых областях единственности псф [14, следствия 14.2, 15.3], [26], и теорему единственности Д. А. Зарайского [27] для одномерных уравнений свёртки специального вида, в которой множеством единственности является объединение произвольно малых окрестностей двух точек, находящихся на расстоянии, равном длине носителя свёртывателя. Полученные результаты оказались важными ввиду их многочисленных применений в экстремальных задачах интегральной геометрии, в теории лакунарных рядов, в теории дифференциальных уравнений с частными производными, а также при изучении различных классов псф и их обобщений [7], [10], [13], [14], [23], [27].

В работе [28] исследовались структурные свойства псф, связанных с операторами обобщенного сдвига. В частности, был установлен локальный аналог известной теоремы Л. Зальцмана о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана. Доказательство более сильного варианта теоремы о двух радиусах, полученного авторами в [29], существенно опиралось на теорему единственности для решений уравнения свёртки Бесселя

$$f \star^\alpha \chi_r = 0, \quad (1)$$

где $\alpha \in (-1/2, +\infty)$, χ_r – индикатор отрезка $[-r, r]$ (см. теорему 2 и лемму 14 в [29]).

Здесь мы продолжаем изучение нулевых множеств для решений уравнения (1), а также уравнения

$$f \star^\alpha \delta_r = 0, \quad (2)$$

где δ_r – чётная мера, сопоставляющая чётной непрерывной функции φ на $\mathbb{R}$ число $\varphi(r)$. Показано, в частности, что если чётная функция $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет (1) и равна нулю на $(r - \varepsilon, r)$ или $(r, r + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. При этом интервал нулей $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, вообще говоря, расширить нельзя. Установлено, что подобное явление имеет место и для решений уравнения (2). Найдены приложения этих результатов к теоремам единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, теоремам о нулевых множествах для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и теоремам о замыкании обобщенных сдвигов.

2. Формулировки основных результатов

Всюду в дальнейшем считаем, что α – фиксированное число из промежутка $(-1/2, +\infty)$. Пусть $L_{\natural, \alpha}(I_R)$ и $L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(I_R)$ – классы чётных комплекснозначных функций на промежутке $I_R = (-R, R)$, соответственно суммируемых и локально суммируемых по мере

$$d\mu_\alpha(x) = |x|^{2\alpha+1} dx,$$

$C_{\natural}^k(I_R)$ – множество всех чётных k раз непрерывно дифференцируемых функций на I_R , $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ – совокупность всех функций класса $C_{\natural}^\infty(I_R)$ с компактным носителем. Множество $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через $\mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$ пространство всех чётных распределений на I_R , т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_{\natural}(I_R)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ будем записывать $\langle f, \varphi \rangle$. Пространство $L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(I_R)$ вкладывается в $\mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$, если для $f \in L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(I_R)$ и $\varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_R)$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^R f(x) \varphi(x) d\mu_\alpha(x).$$

Пусть $\mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ – множество всех распределений класса $\mathcal{D}'_{\natural}(\mathbb{R})$ с компактным носителем. Для $g \in \mathcal{E}'_{\natural}(\mathbb{R})$ положим

$$r(g) = \inf\{r > 0 : \text{supp } g \subset \bar{I}_r\}$$

($\text{supp } g$ – носитель распределения g , $\bar{I}_r = [-r, r]$). Если $f \in \mathcal{D}'_{\natural}(I_R)$ и $R > r(g)$, то свёртка Бесселя $f \star^\alpha g$ определяется как распределение из $\mathcal{D}'_{\natural}(I_{R-r(g)})$, действующее по правилу

$$\langle f \star^\alpha g, \varphi \rangle = \left\langle f(x), \langle g(y), T_x^\alpha \varphi(y) \rangle \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\natural}(I_{R-r(g)}),$$

где

$$T_x^\alpha \varphi(y) = c_\alpha \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta}) (\sin \theta)^{2\alpha} d\theta, \quad (3)$$

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \quad (\Gamma – \text{гамма-функция}).$$

Основные свойства этой свёртки содержатся в [28, §§ 2, 3].

В случае, когда $f \in L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(I_R)$ и g – чётная комплексная мера Радона на $\mathbb{R}$ с носителем в $\bar{I}_{r(g)} \subset I_R$, имеем $f \star^\alpha g \in L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(I_{R-r(g)})$ и

$$(f \star^\alpha g)(y) = \int_0^{r(g)} (T_y^\alpha f)(x) dg(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \quad (4)$$

При этом, если $g \in L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$, то

$$(f \star^\alpha g)(y) = \int_0^{r(g)} (T_y^\alpha f)(x) g(x) d\mu_\alpha(x), \quad y \in I_{R-r(g)}. \quad (5)$$

Отметим также, что оператор $f \rightarrow f \star^\alpha g$ коммутирует с дифференциальным оператором Бесселя

$$L_\alpha = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(2\alpha + 1)}{x} \frac{d}{dx}, \quad (6)$$

т.е.

$$L_\alpha(f \star^\alpha g) = (L_\alpha f) \star^\alpha g = f \star^\alpha (L_\alpha g) \quad \text{на } I_{R-r(g)}. \quad (7)$$

Для $0 < r < R$ определим классы $V_r(I_R)$ и $U_r(I_R)$ равенствами

$$V_r(I_R) = \{f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R) : f \star^\alpha \chi_r = 0 \text{ на } I_{R-r}\},$$

$$U_r(I_R) = \{f \in L_{b,\alpha}^{1,\text{loc}}(I_R) : f \star^\alpha \delta_r = 0 \text{ на } I_{R-r}\}.$$

Положим

$$V_r^\infty(I_R) = V_r(I_R) \cap C^\infty(I_R), \quad U_r^\infty(I_R) = U_r(I_R) \cap C^\infty(I_R).$$

В [29, § 5] было установлено, что

$$\text{если } f \in V_r(I_R) \text{ и } f = 0 \text{ на } I_r, \text{ то } f = 0 \text{ на } I_R. \quad (8)$$

Следующий результат является уточнением этого свойства класса $V_r(I_R)$.

ТЕОРЕМА 1. (i) Пусть $f \in V_r(I_R)$, $\varepsilon \in (0, R-r)$. Тогда если $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.

(ii) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует функция $f \in V_r^\infty(\mathbb{R})$, такая что $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ и $r \pm \varepsilon \in \text{supp } f$.

Второе утверждение теоремы 1 показывает, что интервал нулей $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ в утверждении (i), вообще говоря, расширить нельзя.

Аналогичный результат имеет место и для класса $U_r(I_R)$.

ТЕОРЕМА 2. (i) Пусть $f \in U_r(I_R)$, $\varepsilon \in (0, R-r)$. Тогда если $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r)$ или $(r, r+\varepsilon)$, то $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$.

(ii) Для любого $\varepsilon \in (0, r)$ существует функция $f \in U_r^\infty(\mathbb{R})$, такая что $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$ и $r \pm \varepsilon \in \text{supp } f$.

Отметим, что несмотря на схожесть формулировок теорем 1 и 2, рассуждения для классов $V_r(I_R)$ и $U_r(I_R)$ несколько отличаются (см. § 4 ниже).

Теоремы 1 и 2 позволяют получить соответствующие результаты о замыкании обобщенных сдвигов. Приведем одно такое утверждение, демонстрирующее применение теоремы 1.

Пусть $\text{cl}_X M$ – замыкание множества M в топологическом векторном пространстве X , $\mathcal{L}in M$ – линейная оболочка M .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in V_r(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$,

$$E_{a,b} = \text{cl}_{C(\mathbb{R})} \mathcal{L}in \{T_x^\alpha f : x \in (a,b)\}, \quad a < b.$$

Тогда

$$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r} = E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}, \quad \text{если } 0 < \varepsilon < r,$$

и

$$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r} = E_{0,+\infty}, \quad \text{если } \varepsilon \geq r.$$

Насколько нам известно, результаты такого типа для обычных сдвигов впервые встречаются у Ж.П. Кахана, изучавшему задачу о возможной длине интервала нулей у ненулевых функций из заданного подпространства, инвариантного относительно сдвигов (см., например, [4, § 11, п. 3]).

Свойство (8) можно распространить на решения уравнения свертки Бесселя более общего вида (см. лемму 3 ниже). Это дает возможность получить новую теорему единственности для

сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, а также теорему единственности для решений задачи Коши обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу. Приведем точные формулировки указанных результатов.

Пусть $d > 0$. Последовательность $\{r_q\}_{q=1}^{\infty}$ положительных чисел будем называть d -последовательностью (см. [13, часть 5, гл. 3], [30]), если существует возрастающая функция $\psi : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q\psi(q)} < +\infty \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq m \leq q} \left| r_m - \frac{\pi m}{d} \right| \leq \gamma \frac{q}{\psi^2(q)},$$

где постоянная $\gamma > 0$ не зависит от q .

Положим

$$\mathbf{I}_{\alpha}(z) = J_{\alpha}(z)z^{-\alpha}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где J_{α} – функция Бесселя первого рода порядка α .

Следующий результат относится к так называемым "gar"-теоремам, восходящим к Н. Винеру [31, гл. 7], Н. Левинсону [32, гл. 1, 2] и др.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha > -1/2$,

$$f_n(x) = \sum_{q=1}^n \gamma_{q,n} \mathbf{I}_{\alpha}(r_q x), \quad \gamma_{q,n} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}),$$

где $\{r_q\}_{q=1}^{\infty}$ – d -последовательность. Предположим, что $R > d$ и f_n сходится в $L_{\natural,\alpha}(I_R)$ к функции $f \in L_{\natural,\alpha}(I_R)$. Тогда если $f = 0$ на $I_{d+\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon \in (0, R-d)$, то $f = 0$ на I_R .

Некоторые аналоги теоремы 3 для целых и полуцелых значений α были установлены в [30]. Относительно теорем единственности для негармонических рядов Фурье и их обобщений см. также [4, § 11, п. 3], [13, часть 5, гл. 3], [14, часть 3, комментарии] и имеющиеся там ссылки.

Наш заключительный результат основан на упомянутом выше обобщении свойства (8) и известной связи между решением задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу и операторами (3) (см. [33, гл. 4, §§ 4.4, 4.5]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\beta \geq \alpha > -1/2$, $f \in C_{\natural}^2(\mathbb{R})$, U – классическое решение задачи Коши

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{(2\alpha+1)}{x} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{(2\beta+1)}{t} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (9)$$

$$U(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \geq 0. \quad (10)$$

Предположим, что $r > 0$, $\varepsilon > 0$,

$$U(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, \varepsilon) \quad \text{и} \quad U(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (0, r).$$

Тогда $U = 0$ на треугольнике $T = \{0 < x < r + \varepsilon, 0 < t < r + \varepsilon - x\}$.

Справедливость теорем 1–5 будет установлена в § 4 ниже. В § 3 приводятся вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов.

3. Вспомогательные утверждения

Пусть

$$\varphi_\lambda(x) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция φ_λ является собственной функцией оператора L_α , причем

$$L_\alpha \varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda. \quad (11)$$

Кроме того, при $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$)

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^n \varphi_\lambda(x) \right| \leq \frac{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma((n + 1)/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + n/2 + 1)} \lambda^n \quad (12)$$

(см., например, [29, лемма 6]).

Сферическое преобразование (преобразование Бесселя) распределения $f \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\tilde{f}(\lambda) = \langle f, \varphi_\lambda \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 1 ([28]). *Чётная целая функция w является сферическим преобразованием финитной функции класса $C_b^\infty(\mathbb{R})$ с носителем на $\bar{I}_r$ тогда и только тогда, когда для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существует константа $C_N > 0$, такая что*

$$|w(z)| \leq C_N \frac{e^{r|\operatorname{Im} z|}}{(1 + |z|)^N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 2 ([29]). *Пусть $f \in \mathcal{D}'_b(I_R)$ и $L_\alpha f = -\lambda^2 f$ на I_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Предположим, что $g \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R})$ и $r(g) < R$. Тогда*

$$f \star^\alpha g = \tilde{g}(\lambda) f \quad \text{на} \quad I_{R-r(g)}.$$

В частности,

$$\varphi_\lambda \star^\alpha \chi_r = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) r^{2\alpha+2} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \varphi_\lambda. \quad (13)$$

ЛЕММА 3. *Пусть g – ненулевая функция с компактным носителем класса $L_{b,\alpha}^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ и $R \in (r(g), +\infty]$. Предположим, что $f \in L_{b,\alpha}^{\text{loc}}(I_R)$, $f \star^\alpha g = 0$ на $I_{R-r(g)}$ и $f = 0$ на $I_{r(g)}$. Тогда $f = 0$ на I_R .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция g является индикатором промежутка I_r , утверждение леммы получено в [29]. В общем случае доказательство проводится аналогично. $\square$

Положим

$$\mathcal{N}_{r,\alpha} = \{\lambda > 0 : J_\alpha(\lambda r) = 0\}.$$

Детальная информация о нулях функций Бесселя содержится в [34, гл. 7, п. 7.9]. В частности, из асимптотики нулей бesselевой функции следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}} \frac{1}{\lambda^{1+\varepsilon}} < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

ЛЕММА 4. *Пусть $\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}$,*

$$G_\lambda(x) = A_{\alpha,\lambda,r} \varphi_\lambda(x) \chi_r(x), \quad \text{где} \quad A_{\alpha,\lambda,r} = \frac{r^{-2\alpha-2} \lambda^{-2}}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)}.$$

Тогда

$$(L_\alpha + \lambda^2)(G_\lambda) = \delta_r \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'_b(\mathbb{R}). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции $\psi \in \mathcal{D}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{R})$ имеем

$$\begin{aligned} \langle (L_\alpha + \lambda^2)(G_\lambda), \psi \rangle &= \langle G_\lambda, (L_\alpha + \lambda^2)\psi \rangle = \\ &= \frac{r^{-2\alpha-2}\lambda^{-2}}{\mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r)} \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x)(L_\alpha + \lambda^2)\psi(x)d\mu_\alpha(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразуем этот интеграл с помощью повторного интегрирования по частям и равенств

$$\mathbf{I}_\alpha(\lambda r) = 0, \quad (\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))' = -\lambda^2 x \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda x),$$

$$L_\alpha = \frac{1}{x^{2\alpha+1}} \frac{d}{dx} \left(x^{2\alpha+1} \frac{d}{dx} \right), \quad L_\alpha \varphi_\lambda = -\lambda^2 \varphi_\lambda$$

(см. (6), (11)). Находим

$$\begin{aligned} \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) L_\alpha \psi(x) d\mu_\alpha(x) &= \int_0^r \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d(x^{2\alpha+1} \psi'(x)) = - \int_0^r x^{2\alpha+1} (\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))' d\psi(x) = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \psi(r) + \int_0^r \psi(x) (x^{2\alpha+1} (\mathbf{I}_\alpha(\lambda x))')' dx = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \psi(r) + \int_0^r \psi(x) L_\alpha (\mathbf{I}_\alpha(\lambda x)) d\mu_\alpha(x) = \\ &= \lambda^2 r^{2\alpha+2} \mathbf{I}_{\alpha+1}(\lambda r) \psi(r) - \lambda^2 \int_0^r \psi(x) \mathbf{I}_\alpha(\lambda x) d\mu_\alpha(x). \end{aligned}$$

Отсюда и из (15) получаем

$$\langle (L_\alpha + \lambda^2)(G_\lambda), \psi \rangle = \langle \delta_r, \psi \rangle,$$

что и требовалось. $\square$

ЛЕММА 5. Если $f \in U_r(I_R)$ и $f = 0$ на I_r , то $f = 0$ на I_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\lambda \in \mathcal{N}_{r,\alpha}$ и представим δ_r в виде (14). Тогда из условия и (7) следует, что

$$(L_\alpha + \lambda^2)(f \star^\alpha G_\lambda) = 0 \quad \text{на} \quad I_{R-r}.$$

Отсюда (см. [29, лемма 9])

$$f \star^\alpha G_\lambda = a_\lambda \varphi_\lambda \quad \text{на} \quad I_{R-r},$$

где $a_\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $\varphi_\lambda(0) = 1$ и $f = 0$ на $(0, r)$, то

$$a_\lambda = (f \star^\alpha G_\lambda)(0) = \int_0^r G_\lambda(x) f(x) d\mu_\alpha(x) = 0.$$

Таким образом, $f \star^\alpha G_\lambda = 0$ на I_{R-r} . Теперь используя лемму 3, получаем требуемое. $\square$

Для $f \in L_{\natural, \alpha}(I_r)$ положим

$$c_\lambda(f, r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-2}}{\Gamma^2(\alpha+1) \mathbf{I}_\alpha^2(\lambda r)} \int_0^r f(x) \varphi_\lambda(x) d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r, \alpha+1},$$

$$d_\lambda(f, r) = \frac{2^{1-2\alpha} r^{-2\alpha-4} \lambda^{-2}}{\Gamma^2(\alpha+1) \mathbf{I}_{\alpha+1}^2(\lambda r)} \int_0^r f(x) \varphi_\lambda(x) d\mu_\alpha(x), \quad \lambda \in \mathcal{N}_{r, \alpha}.$$

ЛЕММА 6. (i) Для того чтобы $f \in V_r^\infty(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r, \alpha+1}} c_\lambda(f, r) \varphi_\lambda(x), \quad x \in I_R,$$

где ряд сходится в $C^\infty(I_R)$ и $c_\lambda(f, r) = O(\lambda^{-N})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ для любого $N > 0$.

(ii) Для того чтобы $f \in U_r^\infty(I_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathcal{N}_{r, \alpha}} d_\lambda(f, r) \varphi_\lambda(x), \quad x \in I_R,$$

где ряд сходится в $C^\infty(I_R)$ и $d_\lambda(f, r) = O(\lambda^{-N})$ при $\lambda \rightarrow +\infty$ для любого $N > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы является частным случаем теоремы 3 в [29]. Утверждение (ii) доказывается подобными рассуждениями с использованием леммы 5. $\square$

ЛЕММА 7. Пусть $\{r_q\}_{q=1}^\infty$ – d -последовательность. Тогда для любого $\delta > 0$ найдётся ненулевая функция $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\delta})$, такая что $\tilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В лемме 3.1 из [13, часть 5, гл. 3] (см. также [30, лемма 1]) построена ненулевая функция $g \in \mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$ с носителем в $I_{d+\delta}$, для которой

$$\widehat{g}(r_q) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ir_q x} dx = 0, \quad q \in \mathbb{N}.$$

При этом для любого N существует константа $b_N > 0$, такая что

$$|\widehat{g}(z)| \leq b_N \frac{e^{r(g)|\operatorname{Im} z|}}{(1+|z|)^N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда и из леммы 1 получаем, что $\widehat{g}(z) = \tilde{h}(z)$ для некоторой функции $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\delta})$. Поэтому $\tilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$. $\square$

4. Доказательство теорем 1–5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 1] (i) Сначала рассмотрим случай, когда $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r)$. В силу леммы 3 можно считать, что $\varepsilon < r$. Положим

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in I_r \\ 0, & \text{если } r \leq |x| < r + \varepsilon. \end{cases}$$

Покажем, что $F \in V_r(I_{r+\varepsilon})$. Преобразуем $F \star^\alpha \chi_r$, используя (5) и формулу

$$\gamma_\alpha(xy)^{2\alpha} T_x^\alpha F(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} tf(t)k_\alpha(t, x, y)dt,$$

где $\gamma_\alpha = 2^{2\alpha-1}/c_\alpha$,

$$k_\alpha(t, x, y) = (y^2 - (t-x)^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}((t+x)^2 - y^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

(см. (3)). При $0 < x < \varepsilon$ имеем

$$\gamma_\alpha x^{2\alpha} (F \star^\alpha \chi_r)(x) = \int_0^r \int_{|x-y|}^{x+y} ytF(t)k_\alpha(t, x, y)dtdy.$$

Меняя порядок интегрирования и учитывая, что $F = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, находим

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha x^{2\alpha} (F \star^\alpha \chi_r)(x) &= \int_0^{r+x} tF(t) \int_{|x-t|}^{\min\{r, x+t\}} yk_\alpha(t, x, y)dydt = \\ &= \int_0^{r-x} tF(t) \int_{|x-t|}^{x+t} yk_\alpha(t, x, y)dydt. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл вычисляется с помощью формул

$$\int_a^b y((y^2 - a^2)(b^2 - y^2))^{\alpha-\frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma^2(\alpha + \frac{1}{2})}{2\Gamma(2\alpha + 1)}(b^2 - a^2)^{2\alpha},$$

$$2^{2\alpha}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha + 1)$$

(см. [34, гл. 1, § 1.5.1, формула (13); § 1.2, формула (15)]). Тогда

$$(F \star^\alpha \chi_r)(x) = \int_0^{r-x} F(t)d\mu_\alpha(t) = \int_0^r f(t)d\mu_\alpha(t) = (f \star^\alpha \chi_r)(0) = 0.$$

Тем самым $F \in V_r(I_{r+\varepsilon})$. Теперь учитывая, что $f \in V_r(I_{r+\varepsilon})$, $F - f = 0$ на I_r и применяя лемму 3, получаем $f = F$ на $I_{r+\varepsilon}$. В частности, $f = 0$ на $(r-\varepsilon, r+\varepsilon)$, что и требовалось.

Пусть теперь $f = 0$ на $(r, r+\varepsilon)$. Как и выше, можно считать, что $\varepsilon < r$. Положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in I_{r+\varepsilon} \\ 0, & \text{если } |x| \geq r + \varepsilon. \end{cases} \quad (16)$$

Тогда

$$\Phi \star^\alpha \chi_r = f \star^\alpha \chi_r = 0 \quad \text{на} \quad I_\varepsilon. \quad (17)$$

Далее, для любого $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\Phi \star^\alpha 1)(x) = \int_0^\infty (T_x^\alpha 1)(y)\Phi(y)d\mu_\alpha(y) = \int_0^r \Phi(y)d\mu_\alpha(y) =$$

$$= \int_0^r f(y) d\mu_\alpha(y) = (f \star^\alpha \chi_r)(0) = 0.$$

Поэтому

$$(1 - \chi_r) \star^\alpha \Phi = -\Phi \star^\alpha \chi_r \quad \text{на } \mathbb{R}$$

и, в частности, $(1 - \chi_r) \star^\alpha \Phi = 0$ на I_ε (см. (17)). Поскольку $1 - \chi_r = 0$ на $I_r \supset I_{r(\Phi)}$, это соотношение и лемма 3 показывают, что $r(\Phi) \leq r - \varepsilon$. Значит, $\Phi = 0$ на $(r - \varepsilon, +\infty)$, откуда следует, что $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$.

(ii) Пусть функция $\Psi \in C_b^\infty(I_{r+\varepsilon})$ удовлетворяет следующим условиям: $\Psi = 0$ на промежутке $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, $r - \varepsilon \in \text{supp } \Psi$,

$$\int_0^r \Psi(x) d\mu_\alpha(x) = 0.$$

Повторяя рассуждения из доказательства утверждения (i), получаем $\Psi \in V_r^\infty(I_{r+\varepsilon})$. В силу (12), (13) и леммы 6 (i) функцию Ψ можно продолжить на $\mathbb{R}$ до функции f класса $V_r^\infty(\mathbb{R})$. Это продолжение обладает требуемыми свойствами (см. утверждение (i)). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 2] Используя рассуждения из первого утверждения теоремы 1 и лемму 5, получаем (i) в случае, когда $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r)$. Докажем (i) при условии, что $f = 0$ на $(r, r + \varepsilon)$. В силу леммы 5 можно считать, что $\varepsilon < r$. Определим функцию Φ равенством (16). Тогда из условия и (7) следует, что

$$(L_\alpha + \lambda^2)(G_\lambda \star^\alpha \Phi) = 0 \quad \text{на } I_\varepsilon.$$

Как и в лемме 5, отсюда находим

$$(G_\lambda \star^\alpha \Phi)(x) = A_{\alpha, \lambda, r} \tilde{\Phi}(\lambda) \varphi_\lambda(x), \quad x \in I_\varepsilon. \quad (18)$$

С другой стороны, по лемме 2

$$A_{\alpha, \lambda, r}(\varphi_\lambda \star^\alpha \Phi)(x) = A_{\alpha, \lambda, r} \tilde{\Phi}(\lambda) \varphi_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Сопоставляя (18) и (19), приходим к уравнению

$$(A_{\alpha, \lambda, r} \varphi_\lambda - G_\lambda) \star^\alpha \Phi = 0 \quad \text{на } I_\varepsilon.$$

Поскольку $A_{\alpha, \lambda, r} \varphi_\lambda - G_\lambda = 0$ на $I_r \supset I_{r(\Phi)}$ и $G_\lambda = 0$ при $|x| > r$, это соотношение и лемма 3 показывают, что $r(\Phi) \leq r - \varepsilon$. Поэтому $\Phi = 0$ на $(r - \varepsilon, +\infty)$ и $f = 0$ на $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Таким образом, первое утверждение теоремы 2 доказано.

Наконец, используя лемму 6 (ii), утверждение (i) и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получаем (ii). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 3] Пусть $0 < \varepsilon < r$ и A – линейный непрерывный функционал на $E_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}$, равный нулю на $E_{r, r+\varepsilon}$. В силу теоремы Хана-Банаха для доказательства равенства $E_{r, r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}$ нужно установить, что $A = 0$. По теореме Рисса-Маркова об описании пространства, сопряженного к $C(\mathbb{R})$, функционал A является чётной комплексной мерой Радона на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Тогда условие $A|_{E_{r, r+\varepsilon}} = 0$ и формула (4) влекут соотношение

$$f \star^\alpha A = 0 \quad \text{на } (r, r + \varepsilon).$$

С другой стороны, из условия $f \in V_r(\mathbb{R})$ следует, что $f \star^\alpha A \in V_r(\mathbb{R})$. Теперь применяя к функции $f \star^\alpha A$ теорему 1 (i), получаем $f \star^\alpha A = 0$ на $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$. Значит, $A = 0$ на $E_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}$ и

$E_{r,r+\varepsilon} = E_{r-\varepsilon,r+\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon < r$. Остальные равенства в теореме доказываются аналогично (см. лемму 3). $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 4] Запишем f_n в виде

$$f_n(x) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \sum_{q=1}^n \gamma_{q,n} \varphi_{r_q}(x).$$

В силу леммы 7 существует ненулевая функция $h \in \mathcal{D}_\natural(I_{d+\frac{\varepsilon}{2}})$, такая что $\tilde{h}(r_q) = 0$, $q \in \mathbb{N}$. Для этой функции h имеем (см. лемму 2)

$$(f_n \star h)(x) = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \sum_{q=1}^n \gamma_{q,n} \tilde{h}(r_q) \varphi_{r_q}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда используя сходимость f_n к f , получаем $f \star h = 0$ на $I_{R-r(h)}$. Учитывая, что $f = 0$ на $I_{d+\varepsilon} \supset I_{r(h)}$, отсюда и из леммы 3 следует, что $f = 0$ на I_R . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 5] Как известно (см. [33, гл. 4, §§ 4.4, 4.5]),

$$U(x, t) = \frac{2\Gamma(\beta + 1)t^{-2\beta}}{\Gamma(\beta - \alpha)\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^t (t^2 - y^2)^{\beta - \alpha - 1} T_x^\alpha f(y) d\mu_\alpha(y),$$

если $\beta > \alpha$, и $U(x, t) = T_x^\alpha f(t)$, если $\alpha = \beta$. Эти равенства можно записать в виде

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{2\Gamma(\beta+1)t^{-2\beta}}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)} (f \star g_t)(x), & \beta > \alpha \\ (f \star \delta_t)(x), & \beta = \alpha, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$g_t(x) = (t^2 - x^2)^{\beta - \alpha - 1} \chi_t(x).$$

Пусть $\beta > \alpha$. Тогда по условию $f = 0$ на $(0, r)$ и $f \star g_r = 0$ на $(0, \varepsilon)$. Учитывая чётность функций f , g_r и используя лемму 3, получаем $f = 0$ на $(0, r + \varepsilon)$. Отсюда и из (20) следует требуемое утверждение при $\beta > \alpha$. Случай $\alpha = \beta$ рассматривается аналогично (см. лемму 5). $\square$

5. Заключение

Результаты §§ 2, 3 и рассуждения в § 4 позволяют получить другие версии теорем 3 и 5. Например, из леммы 3 следует равенство

$$\text{cl}_{C^\infty(\mathbb{R})} \mathcal{Lin}\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < r(g)\} = \text{cl}_{C^\infty(\mathbb{R})} \mathcal{Lin}\{T_x^\alpha f : 0 \leq x < +\infty\},$$

где g – произвольная ненулевая функция класса $L_{\natural, \alpha}^{\text{loc}}(\mathbb{R})$ с компактным носителем, а функция $f \in C_\natural^\infty(\mathbb{R})$ является решением уравнения $f \star g = 0$. Кроме того, используя теорему 1, можно установить, что решение задачи (9), (10) для $\beta = \alpha + 1$ обладает следующим свойством: если $0 < \varepsilon < r$, $U(x, r) = 0$ при $0 < x < \varepsilon$ и $U(x, 0) = 0$ на $(r - \varepsilon, r)$ или $(r, r + \varepsilon)$, то $U(x, t) = 0$ при $x \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, $0 < t < \min\{x - r + \varepsilon, r + \varepsilon - x\}$.

Другие свойства решений дифференциальных уравнений, содержащих оператор Бесселя, могут быть найдены в [13, часть 5, гл. 6], [33].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Delsarte, J. Les fonctions 'moyenne-périodiques' / J. Delsarte // J. Math. Pures Appl. – 1935. – V. 14, №. 9. – P. 403–453.
2. Schwartz, L. Theorie générale des fonctions moyenne-periodiqué / L. Schawrtz // Annals of Mathematics. – 1947. – V. 48. – P. 857–928.
3. Kahane, J.P. Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées / J.P. Kahane // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1957. – V. 7. – P. 293–314.
4. Никольский, Н.К. Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций / Н.К. Никольский // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. – 1974. – Т. 12. – С. 199–412. – DOI 10.1007/BF01247397.
5. Беренштейн, К.А. Комплексный анализ и уравнения в свёртках / К.А. Беренштейн, Д. Струппа // Итоги науки и техники. Совр. матем. и прил. – 1989. – Т. 54. – С. 5–111. DOI 10.1007/978-3-652-58011-6.
6. Титчмарш, Э.Ч. Введение в теорию интегралов Фурье / Э.Ч. Титчмарш. – Москва: ГИТТЛ, 1948. – 418 с.
7. Йон, Ф. Плоские волновые и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными / Ф. Йон. – Москва: ИЛ, 1958. – 158 с. – DOI 10.1007/978-1-4613-9453-2.
8. Любич, Ю.И. Об одном классе интегральных уравнений / Ю.И. Любич // Матем. сб. – 1956. – Т. 38(80), № 2. – С. 183–202.
9. Леонтьев, А.Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси / А.Ф. Леонтьев // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 269–328.
10. Smith, J.D. Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ / J.D. Smith // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1972. – V. 72. – P. 403–416. – DOI 10.1017/S0305004100047241.
11. Леонтьев, А.Ф. Последовательности полиномов из экспонент / А.Ф. Леонтьев. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
12. Волчков, В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах / В.В. Волчков // Мат. сб. – 1995. – Т. 186, № 6. – С. 15–34. – DOI 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.
13. Volchkov, V.V. Integral Geometry and Convolution Equations / V.V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p. – DOI 10.1007/978-94-010-0023-9.
14. Volchkov, V.V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V.V. Volchkov, Vit.V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p. – DOI 10.1007/978-1-84882-533-8.
15. Зарайский, Д.А. Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 77–83.
16. Зарайский, Д.А. Класс функций, периодических в среднем, однозначно определяющихся своими значениями на "периоде" / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ. – 2019. – Т. 33. – С. 38–41.

17. Зарайский, Д.А. Теорема единственности для решений уравнения свертки с радиальным свертывателем / Д.А. Зарайский // Материалы IV Межд. науч. конф. «Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Том 1 Физико-математические и технические науки, Часть 1. – 2019. – С. 127–128.
18. Quinto, E.T. Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds / E.T. Quinto // Israel J. Math. – 1993. – V. 84. – P. 353–363. – DOI 10.1007/BF02760947.
19. Любич, Ю.И. К теореме единственности для функций, периодических в среднем / Ю.И. Любич // Зап. науч. сем. ЛОМИ. – 1978. – Т. 81. – С. 166. – DOI 10.1007/BF01221539.
20. Каргаев, П.П. О нулях функций, периодических в среднем / П.П. Каргаев // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, № 3. – С. 322–325. – DOI 10.1007/BF01158736.
21. Зарайский, Д.А. Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свертки / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 12. – С. 69–75.
22. Волчков, В.В. Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф. Йона / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков // Алгебра и анализ. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 37–69. – DOI 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0.
23. Volchkov, V.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V.V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592 p. – DOI 10.1007/978-3-0348-0572-8.
24. Волчков, В.В. Сферические средние на двухточечно-однорожных пространствах и их приложения / В.В. Волчков, Вит.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2013. – Т. 77, № 2. – С. 3–34. – DOI 10.4213/im7956.
25. Волчков, В.В. О множествах инъективности преобразования Радона на сферах / В.В. Волчков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т. 63, № 3. – С. 63–76. – DOI 10.4213/im248.
26. Волчков, В.В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю / В.В. Волчков // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59, № 5. – С. 671–680. – DOI 10.4213/mzm1761.
27. Зарайский, Д.А. Новая теорема единственности для одномерного уравнения свертки / Д.А. Зарайский // Труды ИПММ. – 2020. – Т. 34. – С. 63–67.
28. Selmi, B. A Local Two Radii Theorem on the Chébli-Trimèche Hypergroup / B. Selmi, M.M. Nessibi // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – V. 329, № 1. – P. 163–190. – DOI 10.1016/j.jmaa.2006.06.061.
29. Волчков, Вит.В. Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана / Вит.В. Волчков, Г.В. Краснощёких // Мат. заметки. – 2024. – Т. 116, № 2. – С. 212–228. – DOI 10.4213/mzm14184.
30. Волчков, В.В. Теоремы единственности для кратных лакунарных тригонометрических рядов / В.В. Волчков // Мат. заметки. – 1992. – Т. 51, № 6. – С. 27–31. – DOI 10.1007/BF01263296.
31. Винер, Н. Преобразование Фурье в комплексной плоскости // Н. Винер, Р. Пэли. – Москва: Наука, 1964. – 268 с. – DOI 10.1007/BF01699343.
32. Levinson, N. Gap and density theorems // N. Levinson. – Providence: Amer. Math. Soc., 1940. – 243 p.

33. Ситник, С.М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя // С.М. Ситник, Э.Л. Шишкина. – Москва: Физматлит, 2019. – 224 с.
34. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1, 2 // Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Москва: Наука, 1973, 1974. – 294, 296 с.

REFERENCES

1. Delsarte, J. 1935, “Les fonctions ‘moyenne-périodiques’”, *J. Math. Pures Appl.*, vol. 14, no. 9, pp. 403–453.
2. Schwartz, L. 1947, “Theorie générale des fonctions moyenne-periodique”, *Annals of Mathematics*, vol. 48, pp. 857–928.
3. Kahane, J.P. 1957, “Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 7, pp. 293–314.
4. Nikol’skii, N.K. 1976, “Invariant subspaces in the theory of operators and theory of functions”, *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 7, no. 2, pp. 129–249. doi: 10.1007/BF01247397/
5. Berenstein, K., Struppa, D. 1989, “Complex analysis and convolution equations”, *Itogi Nauki i Tekhniki*, vol. 54, pp. 5–111. doi: 10.1007/978-3-652-58011-6/
6. Titchmarsh, E.C. 1937, “Introduction to the theory of Fourier integrals”, *Clarendon Press*, Oxford, 390 p.
7. John, F. 1955, “Plane waves and spherical means applied to partial differential equations”, *Dover Publications*, Mineola, NY, 172 p. doi: 10.1007/978-1-4613-9453-2/
8. Lyubich, Yu.I. 1956, “On a class of integral equations”, *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 38(80), no. 2, pp. 183–202.
9. Leont’ev, A. F. 1965, “Properties of sequences of Dirichlet polynomials converging on an interval of the imaginary axis”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 2, pp. 269–328.
10. Smith, J.D. 1972, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol 72, pp. 403–416. doi: 10.1017/S0305004100047241/
11. Leont’ev, A. F. 1980, “Sequences of exponential polynomials”, *Nauka, Glavnaya Redaktsiya Fiziko-Matematicheskoy Literatury*, Moscow, 384 p.
12. Volchkov, V.V. 1995, “A definitive version of the local two-radii theorem”, *Sbornik: Mathematics*, vol. 186, no. 6, pp. 783–802. doi: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043/
13. Volchkov, V.V. 2003, “Integral Geometry and Convolution Equations”, *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 454 p. doi: 10.1007/978-94-010-0023-9/
14. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2009, “Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group”, *Springer*, London, 671 p. doi: 10.1007/978-1-84882-533-8/
15. Zraisky, D.A. 2012, “A uniqueness theorem for functions with zero integrals over balls”, *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 25, pp. 77–83.
16. Zraisky, D.A. 2019, “A class of mean-periodic functions which are uniquely determined by their restrictions to the ‘period’”, *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 33, pp. 38–41.

17. Zaraisky, D.A. 2019, "The uniqueness theorem for solutions of the convolution equation with convolution kernel", *Materialy IV Mezhd. nauch. konf. "Donecckie chteniya 2019: obrazovanie, nauka, innovacii, kul'tura i vy'zovy' sovremennosti"*, (Proc. 4-th Int. Sci. Conf. "Donetsk Readings 2019: education, science, innovation, culture and modern problems"). Donetsk, 2019, pp. 127–128.
18. Quinto, E.T. 1993, "Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds", *Israel J. Math.*, vol. 84, pp. 353–363. doi: 10.1007/BF02760947/
19. Lyubich, Yu.I. 1984, "Uniqueness theorem for mean-periodic functions", *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 26, no. 5, p. 2206. doi: 10.1007/BF01221539/
20. Kargaev, P.P. 1985, "Zeros of mean-periodic functions", *Mathematical Notes*, vol. 37, no. 3, pp. 181–183. doi: 10.1007/BF01158736/
21. Zaraisky, D.A. 2006, "Refinement of the uniqueness theorem for solutions of the convolution equation", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 12, pp. 69–75.
22. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2010, "Optimization problems related to the John uniqueness theorem", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 21, no. 5, pp. 705–729. doi: 10.1090/S1061-0022-2010-01113-0/
23. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2013, "Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces", *Birkhäuser*, Basel, 592 p. doi: 10.1007/978-3-0348-0572-8/
24. Volchkov, V.V., Volchkov, Vit.V. 2013, "Spherical means on two-point homogeneous spaces and applications", *Izv. Math.*, vol. 77, no. 2, pp. 223–252. doi: 10.4213/im7956/
25. Volchkov, V.V. 1999, "Injectivity sets for the Radon transform over a sphere", *Izv. Math.*, vol. 63, no. 3, pp. 481–493. doi: 10.4213/im248/
26. Volchkov, V.V. 1996, "Extremal cases of the Pompeiu problem", *Math. Notes*, vol. 59, no. 5, pp. 482–489. doi: 10.4213/mzm1761/
27. Zaraisky, D.A. 2020, "A new uniqueness theorem for one-dimensional convolution equation", *Tr. Inst. Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 34, pp. 63–67.
28. Selmi, B., Nessibi, M.M. 2007, "A Local Two Radii Theorem on the Chébli-Trimèche Hypergroup", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 329, no. 1, pp. 163–190. doi: 10.1016/j.jmaa.2006.06.061/
29. Volchkov, Vit.V., Krasnoschekikh, G.V. 2024, "A Refinement of the Two-Radius Theorem on the Bessel-Kingman Hypergroup", *Mathematical Notes*, vol. 116, no. 2, pp. 223–237. doi: 10.4213/mzm14184/
30. Volchkov, V.V. 1992, "Uniqueness theorems for multiple lacunary trigonometric series", *Math. Notes*, vol. 51, no. 6, pp. 550–552. doi: 10.1007/BF01263296/
31. Paley, R., Wiener, N. 1936, "Fourier transforms in the complex domain", (*American Math. Soc. Colloq. Publications Vol. XIX*) VIII+184 Seiten. Amer. Mathem. Society, New York, vol. 44, pp. A8–A9. doi: 10.1007/BF01699343/
32. Levinson, N. 1940, "Gap and density theorems", *Amer. Math. Soc.*, Providence, 243 p.
33. Shiskina, E.L., Sitnik, S.M. 2019, "Method of Transmutations for Differential Equations with Bessel Operators", *Fizmatlit*, Moscow, 224 p.

-
34. Bateman, H. Erdélyi, A. 1973, 1974, "Higher transcendental functions. Vol. 1-2.", *Nauka*, Moscow, 294, 296 p.

Получено: 19.06.24

Принято в печать: 26.12.2024