

УДК 512.541

К ТЕОРЕМЕ БЭРА-КАПЛАНСКОГО ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-РАЗЛОЖИМЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

С. В. Вершина (г. Москва)

Аннотация

Взаимосвязь структуры абелевой группы со структурой кольца ее эндоморфизмов является классической проблемой в теории абелевых групп. В частности, Бэром и Капланским было доказано, что если группы A и B — периодические, то группа A изоморфна группе B тогда и только тогда, когда их кольца эндоморфизмов изоморфны. В более общем случае, когда группы A и B смешанные или без кручения, теорема Бэра-Капланского не имеет места.

В данной статье рассматривается класс p -локальных абелевых групп без кручения конечного ранга. Пусть K — поле такое, что $\mathbb{Q} \subset K \subset \hat{\mathbb{Q}}_p$ и пусть $R = K \cap \hat{\mathbb{Z}}_p$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p -адических чисел, $\hat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p -адических чисел. Поле K называется полем расщепления (кольцо R называется кольцом расщепления) для p -локальной редуцированной абелевой группы без кручения конечного ранга или, что A является K -разложимой группой, если $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ является прямой суммой делимого R -модуля и свободного R -модуля. В работе охарактеризованы p -локальные абелевы группы без кручения конечного ранга с квадратичным полем расщепления. В качестве применения доказано, что K -разложимые p -локальные абелевы группы без кручения A и B изоморфны в том и только в том случае, если изоморфны их кольца эндоморфизмов.

Ключевые слова: абелева группа, поле расщепления, группа расщепления.

ON THE BAER-KAPLANSKY THEOREM FOR TORSION FREE GROUPS WITH QUADRATIC SPLITTING FIELDS

S. V. Vershina (Moscow)

Abstract

The connection between a structure of abelian group and a structure of endomorphism ring is a classic question in abelian group theory. In particular, Baer and Kaplansky proved that this connection is very strong for torsion groups: two abelian torsion groups are isomorphic if and only if their endomorphism ring are isomorphic. In more general cases for torsion-free and mixed abelian groups the Baer-Kaplansky theorem is fails.

This paper deals with a class of p -local torsion-free abelian of finite rank. Let K be a field such that $\mathbb{Q} \subset K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ and let $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, where $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ is the ring of p -adic integers, $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ is the field of p -adic numbers, $\mathbb{Q}$ is the field of rational numbers. We say that K is a splitting field (R is a splitting ring) for a p -local torsion-free reduced group A or that group A is K -decomposable group if $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ is the direct sum of a divisible R -modules and a free R -modules. Torsion-free p -local abelian groups of finite rank with quadratic splitting field K are characterized. As an application it is proved that K -decomposable p -local torsion free abelian groups of finite rank are isomorphic if and only if their endomorphism rings are isomorphic.

Keywords: abelian group, splitting field, splitting group.

1. Введение

Стандартные обозначения и понятия взяты из монографии [1],[2]. Абелева группа A называется p -локальной группой (p -простое число), если для любого простого $q \neq p$ имеет место равенство $qA = A$. В статье рассматриваются только p -локальные абелевы группы без кручения конечного ранга. Если не оговорено противное, то подгруппы p -локальных групп рассматриваются только сервантные, то есть если они сами являются p -локальными группами. Через $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \widehat{\mathbb{Z}}_p, \widehat{\mathbb{Q}}_p$ обозначим соответственно кольцо (группу) целых чисел, локализацию кольца $\mathbb{Z}$ относительно простого p , кольцо целых p -адических чисел и поле p -адических чисел. Ранг группы A $r(A)$ — это размерность делимой оболочки $\mathbb{Q}A = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ как векторного пространства над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$; p -ранг группы A $r_p(A)$ — это размерность фактор-группы A/pA как векторного пространства над конечным полем F_p из p элементов. Если $r(A) = 1$, то p -локальная группа A изоморфна группе $\mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Q}$; если $r_p(A) = 0$, то p -локальная группа A — делимая; если $r_p(A) = r(A)$, то p -локальная группа A является свободным $\mathbb{Z}_p$ -модулем. Известно [1], что группу A можно вложить в качестве сервантной подгруппы в p -адическое пополнение $\widehat{A} = \bigoplus_{i=1}^n \widehat{\mathbb{Z}}_p b_i$, где $\{b_i\}_1^n$ — p -базис группы A . Если $W = \{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы A , содержащая p -базис $\{b_1, \dots, b_n\}$ группы, то $a_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} b_j$ и p -адическая матрица $A = (\alpha_{ij})_{m \times n}$ с целыми p -адическими элементами называется p -адической матрицей группы A в базисе W . Задание этой p -адической матрицы определяет с точностью до изоморфизма p -локальную группу без кручения ранга $m + n$, p -ранга n . Исследование свойств p -адических

матриц групп производилось в работах [3], [4]. Группа называется *редуцированной*, если она не содержит делимых подгрупп; *коредуцированной*, если она не содержит свободных p -локальных подгрупп в качестве прямых слагаемых; *вполне редуцированной*, если не содержит в качестве прямых слагаемых свободных и делимых p -локальных подгрупп, то есть является редуцированной и коредуцированной. Поле $K \subset \widehat{\mathbb{Q}}_p$ называется *полем расщепления* для неразложимой группы A , если $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong D \oplus F$, где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$, D — делимый R -модуль, F — свободный R -модуль. Кольцо R в этом случае называется *кольцом расщепления* для группы A . Изучению тензорных произведений групп без кручения конечного ранга посвящена работа А. А. Фомина [3].

Теорема Бэра-Капланского является классической проблемой в теории абелевых групп и модулей. Бэр [5] в случае прямых сумм циклических p -групп ограниченных порядков и Капланский [6] в случае примарных модулей над полными коммутативными кольцами дискретного нормирования доказали, что две периодические абелевы группы изоморфными в том и только в том случае, если изоморфны их кольца эндоморфизмов. В случае групп без кручения или смешанных групп это свойство в общем случае не имеет места, поэтому данная проблема стала формулироваться в более общем виде: для каких групп, модулей, над какими кольцами, из изоморфизма, почти изоморфизма, квазиизоморфизма колец эндоморфизмов групп, модулей следует изоморфизм, почти изоморфизм, квазиизоморфизм групп, модулей. По этой теме имеется большое количество работ, укажем некоторых авторов внесших существенный вклад в решение проблемы типа теоремы Бэра-Капланского. В работе А. В. Михалева [7] дан широкий и глубокий обзор по данной тематике. Для вполне разложимых абелевых групп без кручения данную проблему решил А. М. Себельдин [8]. Для почти вполне разложимых групп это свойство не имеет места, но имеет место аналог теоремы Бэра-Капланского с использованием понятия почти изоморфизма групп, что сделано в работе Е. А. Благовещенской, Г. Иванова, Шульца [9]. В локальном случае, для смешанных модулей над кольцом целых p -адических чисел $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, эта проблема рассматривалась в работах Мэя [10]. Им получено следствие, что теорема Бэра-Капланского имеет место для смешанных локальных абелевых групп ранга без кручения 1 при условии, что высотная последовательность элемента без кручения имеет только конечные числа. Для модулей без кручения над кольцами $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ вопрос рассмотрен Вольфсоном [11]. Для смешанных редуцированных само-малых групп ранга без кручения более чем 1 вопрос рассмотрен Филсом и Виклессом [12], [13].

Так как задача классификации абелевых групп без кручения является «дикой» задачей, то решение вопроса — для каких классов групп без кручения и, тем более, для каких классов смешанных групп имеет место теорема Бэра-Капланского является трудноразрешимой задачей. В 1977 году Лэди [14], [15], [16] предложил рассматривать классы групп, модулей, имеющих определенные поля расщепления. Этот подход положен в основу данной статьи.

Приведем некоторые эквивалентные условия для задания p -локальных

групп без кручения конечного ранга.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для редуцированной абелевой группы без кручения A конечного ранга следующие условия эквивалентны:*

1. A — p -локальная группа;
2. $A \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A$;
3. $r_p(A) \neq 0$ и $r_q(A) = 0$ для всех простых $q \neq p$;
4. $\text{Hom}(\mathbb{Z}_q, A) = 0$ для всех простых $q \neq p$;
5. A является $\mathbb{Z}_p$ -модулем;
6. $\text{Hom}(A, A)$ — p -локальная группа;
7. Редуцированный гомоморфный образ группы A является p -локальной группой;
8. Всякий элемент a группы A имеет характеристику вида

$$\chi(a) = (\infty, \dots, \infty, k, \infty, \dots, \infty, \dots),$$

где k — неотрицательное целое число стоящее на n -ом месте, если $p = p_n$ — n -ое простое число;

9. A является однородной группой и тип каждой сервантной подгруппы ранга 1 содержит характеристику

$$\chi = (\infty, \dots, \infty, 0, \infty, \dots, \infty, \dots),$$

где ноль стоит на n -ом месте, если p — n -ое простое число;

10. A — сервантная подгруппа p -адического пополнения $\hat{A} = \hat{\mathbb{Z}}_p b_1 \oplus \dots \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p b_n$, где $\{b_1, \dots, b_n\}$ — p -базис группы A ;

11. Каждый элемент $a \in A$ имеет вид

$$a = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n,$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — целые p -адические числа, $\{b_1, \dots, b_n\}$ — p -базис группы A и умножение $\alpha_i b_i$ определяется как предел последовательности элементов группы $S_n(\alpha_i) b_i$ в p -адической топологии группы A , $S_n(\alpha_i)$ — n -ая частичная сумма целого p -адического числа α_i ($i = 1, \dots, n$);

12. В группе A существует $\mathbb{Q}$ -базис $\{a_1, a_2, \dots, a_s\}$ такой, что для каждого элемента b группы A найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что

$$p^n b = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_s a_s,$$

где $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определений соответствующих понятий.

При рассмотрении 12 пункта используется известное свойство: группа A является объединением возрастающей последовательности свободных подгрупп того же ранга, что и группа A . $\square$

2. Группы расщепления

Пусть группа A является неразложимой абелевой p -локальной группой без кручения конечного ранга, p -ранга > 1 . По аналогии с кольцом и полем расщепления определим группу расщепления B для группы A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [17] Группу B p -ранга 1 назовем группой расщепления для неразложимой p -локальной группы A без кручения конечного ранга, p -ранга > 1 , если $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B \cong C \oplus B^k$, где B^k — прямая сумма $k \geq 1$ групп изоморфных B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Внутренней p -адической характеристикой элемента $a \in A$ называется множество

$$H(a) = \{\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \mid \alpha a = \lim S_n(\alpha) a \in A\}.$$

Заметим, что $H(a)$ является p -локальной группой, сервантной подгруппой $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, содержащей $1 \in H(a) \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. [17] Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — p -базис группы A , $|B| \geq 2$. Внешней p -адической характеристикой элемента b_i относительно p -базиса B назовем внутреннюю p -адическую характеристику элемента $b_i + B_i$ фактор-группы A/B_i , где $B_i = \bigoplus_{j \neq i} \langle b_j \rangle$. Обозначим ее через $H_W^*(b_i)$.

Заметим, что $H(a) \subset H^*(a)$ для любого элемента нулевой p -высоты a и $H(a) = H^*(a)$ для группы p -ранга 1. Кроме этого, $H^*(a)$ является p -локальной группой без кручения p -ранга 1 и $1 \in H^*(a) \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p$.

ЛЕММА 1. Для любого элемента нулевой p -высоты b группы A внешняя p -адическая характеристика $H_W^*(b)$ относительно любого p -базиса W , содержащего b , является группой расщепления для группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \{b = b_1, b_2, \dots, b_n\}$ — произвольный p -базис группы A , содержащий элемент b . Дополним его до $\mathbb{Q}$ -базиса группы A элементами $\{a_1, \dots, a_m\}$. Раскладывая элементы $a_1, \dots, a_m$ по p -базису в p -адическом пополнении, получим равенства $a_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} b_j$ ($i = 1, \dots, m$). Тогда

$$H_W^* = \langle 1, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1} \rangle_* \subset \widehat{\mathbb{Z}}_p.$$

Рассмотрим тензорное произведение $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} H_W^*(b)$. Базис данной группы составляет максимальная линейно независимая система элементов из

$$\{a_1 \otimes 1, \dots, a_m \otimes 1, b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1, a_s \otimes \alpha_{t1}, b_j \otimes \alpha_{t1} \mid s, t = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}.$$

Преобразуя данную максимальную линейно независимую систему элементов по формулам:

$$\begin{aligned} a'_j &= a_j \otimes 1 - b_1 \otimes \alpha_{j1} = \sum \alpha_{ij} b_i \otimes 1 - b_1 \otimes \alpha_{j1} = \alpha_{j1} b_1 \otimes 1 - b_1 \otimes \alpha_{j1} + \\ &+ \sum_{i=2}^n \alpha_{ji} b_i \otimes 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha_{j1}) b_1 \otimes 1 - b_1 \otimes \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\alpha_{j1}) + \sum_{i=2}^n \alpha_{ji} b_i \otimes 1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(\alpha_{j1}) b_1 \otimes 1 - b_1 \otimes S_n(\alpha_{j1})] + \sum_{i=2}^n \alpha_{ji} b_i \otimes 1 = \sum_{i=2}^n \alpha_{ji} b_i \otimes 1 (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

получаем две группы:

$$A_1 = \langle a'_1, \dots, a'_m, b_2 \otimes H^*(b), \dots, b_n \otimes H^*(b) \rangle \subset A \otimes H^*(b),$$

$$B_1 = \langle b_1 \otimes H^*(b) \rangle \subset A \otimes H^*(b)$$

такие, что $A \otimes H^*(b) = A_1 \oplus B_1 \cong A_1 \oplus H^*(b)$, то есть внешняя p -адическая характеристика $H^*(b)$ элемента b является группой расщепления для группы A . $\square$

ЛЕММА 2. Если A — вполне редуцированная p -локальная группа без кручения p -ранга 1 и существует такое натуральное n , что $\otimes^{n+1} A \cong \otimes^n A$, то $R = \otimes^n A$ является кольцом расщепления для группы A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Символом $\otimes$ обозначено редуцированное тензорное произведение — фактор-группа по делимой части тензорного произведения. Из [3] следует, что R является кольцом p -ранга 1, так как согласно условию существует изоморфизм $\theta: R \otimes R \rightarrow R$, задающий умножение на R . Кроме того,

$$A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong d(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) \oplus A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R / d(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) = D \oplus A \otimes R \cong D \oplus R,$$

где D — делимая подгруппа. Согласно определению, R — кольцо расщепления для группы A . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если A — вполне редуцированная p -локальная группа без кручения конечного ранга, p -ранга 1, p -адическая матрица которой состоит из алгебраических чисел, то существует такое натуральное n , что кольцо $R = \otimes^n A = \otimes^{n+1} A$ является кольцом расщепления для группы A , а поле частных $\mathbb{Q}(R)$ кольца R является полем расщепления для A .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если A — вполне редуцированная p -локальная неразложимая группа без кручения конечного ранга, p -адическая матрица которой состоит из алгебраических чисел и $W = \{b_1, \dots, b_n\}$ — любой ее p -базис, то найдутся такие натуральные $s_1, s_2, \dots, s_n$, что кольцом расщепления R группы A является композит колец p -ранга 1

$$R_1 = \otimes^{s_1} H(b_1), R_2 = \otimes^{s_2} H(b_2), \dots, R_n = \otimes^{s_n} H(b_n)$$

в поле p -адических чисел $\widehat{\mathbb{Q}}_p$, а поле частных $\mathbb{Q}(R)$ является полем расщепления для группы A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кольца $R_1, R_2, \dots, R_n$ из следствия 2, относящиеся к p -базису $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ назовем частичными кольцами расщепления для группы A , а их композит R назовем общим кольцом расщепления или просто кольцом расщепления для группы A .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если A — вполне редуцированная p -локальная неразложимая группа без кручения конечного ранга, p -адическая матрица которой состоит из алгебраических чисел и $W = \{b_1, \dots, b_n\}$ — любой ее p -базис, то поле расщепления K является композитом полей частных частичных колец расщепления $R_1, R_2, \dots, R_n$.

3. Квадратично-разложимые группы

Назовем p -локальную группу без кручения неразложимую в прямую сумму подгрупп квадратично-разложимой группой, если ее поле расщепления K является квадратичным расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то есть $[K : \mathbb{Q}] = 2$.

ТЕОРЕМА 1. Любая вполне редуцированная p -локальная группа без кручения A конечно ранга, конечного p -ранга n имеет кольцо расщепления R в том и только в том случае, если ее можно вложить в качестве сервантной подгруппы в прямую сумму $\oplus R^n$ n копий аддитивной группы кольца R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R -кольцо расщепления для A , тогда имеют место сервантный мономорфизм и изоморфизм в диаграмме:

$$A \rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \rightarrow D \oplus R^m,$$

где D — делимый R -модуль, R^m — свободный R -модуль. Покажем, что $m = r_p(A) = n$. Согласно [1], $r_p(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) = r_p(A)r_p(R)$, но $r_p(R) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} n = r_p(A) &= r_p(A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R) = r_p(D \oplus R^m) = \\ &= r_p(D) + r_p(R^m) = r_p(R^m) = m \cdot r_p(R) = m. \end{aligned}$$

Докажем обратное. Пусть $A \rightarrow R^n$ — сервантное вложение и $n = r_p(A)$, R — кольцо p -ранга 1. Согласно [3], $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong R \oplus d$, где d — делимая подгруппа. Тогда $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \rightarrow R^n \otimes R$ является вложением, но $R^n \otimes R \cong R^n \oplus D$, где D — делимая, следовательно, имеем вложение R -модуля $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \rightarrow R^n \oplus D$, где D — делимый R -модуль. Таким образом, $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R$ является R -подмодулем $R^n \oplus D$, а всякий R -подмодуль R -модуля $R^n \oplus D$ имеет тот же вид: $R^k \oplus D_1$. Поэтому $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong R^k \oplus D_1$, но $n = r_p(A) = r_p(A \otimes R) = r_p(R^k \oplus D_1) = k$. В итоге получаем, что $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} R \cong R^n \oplus D_1$, согласно определению R — кольцо расщепления для A . $\square$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если поле расщепления K вполне редуцированной неразложимой p -локальной группы A имеет степень k , а $r_p(A) = n$, то $r(A) \leq kn$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 имеем сервантное вложение $A \rightarrow R^n$ и, следовательно, $r(A) \leq kn$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если $r(A) > kn$, где $k = [K : \mathbb{Q}]$, $n = r_p(A)$, K — поле расщепления группы A , то A имеет нетривиальное делимое прямое слагаемое.*

Пусть далее K — квадратичное расширение поля рациональных чисел и $K \subset \widehat{\mathbb{Q}_p}$. Абелевы p -локальные группы без кручения с полем расщепления K будем называть K -разложимыми группами. Если группа A является K -разложимой, то ее прямые слагаемые, сервантные подгруппы, гомоморфные образы без кручения, аддитивная группа ее кольца эндоморфизмов, группы двойственные (по Арнольду) и квазиизоморфные ей группы являются K -разложимыми группами.

ТЕОРЕМА 2. *Если поле K является квадратичным расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то неразложимыми, K -разложимыми p -локальными группами без кручения являются группы $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$ и $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}_p}$ и только они.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая из указанных групп $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$, $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}$ является неразложимой группой, так как $r(\mathbb{Z}_p) = r(\mathbb{Q}) = 1$ и $r_p(R) = 1$. Заметим, что каждая из этих групп является и сильно неразложимой группой.

Пусть группа A является K -разложимой, поле K — квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ и A является неразложимой в прямую сумму собственных подгрупп. Если $r(A) = 1$, то имеем только две возможности: либо A — делимая группа и $A \cong \mathbb{Q}$, либо A — редуцирована и тогда $A \cong \mathbb{Z}_p$. Если $r(A) > 1$ и $r_p(A) = n$, то согласно теореме 1, группа A имеет конечный ранг, так как вложима в R^n , где $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}$ и $r(R) = [K : \mathbb{Q}] = 2$.

Если $r_p(A) = n = 1$, то группа имеет максимальную линейно независимую систему элементов $W = \{a, b\}$ и p -адическую матрицу $A_p = (\alpha)$, где $a = \alpha \cdot b$ и $\alpha \in K \cap \widehat{\mathbb{Z}_p} = R$. Рассмотрим отображение $\varphi: A \rightarrow R$ по правилу $\varphi(b) = 1$, $\varphi(a) = \alpha$. Это отображение инъективно и p -адические матрицы групп A и R в базисах $\{a, b\}$ и $\{1, \alpha\}$ одинаковы, следовательно, $A \cong R$.

Рассмотрим случай, если $r_p(A) = n > 1$ и покажем, что в этом случае группа A разложима в прямую сумму собственных подгрупп. Группа $R = K \cap \widehat{\mathbb{Z}}$ имеет ранг 2 и пусть ее максимальная линейно независимая система элементов $\{1, \alpha\}$. Тогда по теореме 1 любой элемент из R является линейной комбинацией данных элементов с целыми коэффициентами и p -адическую матрицу $A_p = (\alpha_{ij})$ группы A можно представить в виде

$$A_p = (k_{ij} + s_{ij}\alpha)_{m \times n},$$

где k_{ij} и s_{ij} — целые числа.

Переходя к новой максимальной линейно независимой системе элементов $a'_i = a_i - \sum k_{ij}b_j$, получаем матрицу

$$A'_p = (s_{ij}\alpha)_{m \times n},$$

которая приводится к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками с целыми коэффициентами

$$A''_p = \begin{pmatrix} s'_{11}\alpha & \dots & \dots & s'_{1n}\alpha \\ 0 & s'_{22} & \dots & s'_{2n}\alpha \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & s'_{m2}\alpha & \dots & s'_{mn}\alpha \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований над столбцами с целыми коэффициентами получим матрицу блочного вида:

$$A'''_p = \begin{pmatrix} s'_{11}\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

что говорит о разложимости группы A в прямую сумму собственных подгрупп, одно из слагаемых которой имеет ранг 1 или 2. Полученное прямое разложение говорит о том, что всякая группа p -ранга > 1 будет обязательно разложимой. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 6. *Всякая p -локальная группа A без кручения конечного ранга n с квадратичным полем расщепления K изоморфна группе $\mathbb{Z}_p^r \oplus R^s \oplus \mathbb{Q}^t$, где $r + 2s + t = n$, причем r, s, t однозначно определены.*

СЛЕДСТВИЕ 7 (Теорема Бэра-Капланского для p -локальных групп без кручения конечного ранга с квадратичным полем расщепления). *Пусть квадратичное расширение K поля рациональных чисел является полем расщепления p -локальных групп без кручения A и B конечного ранга. Тогда кольца эндоморфизмов групп A и B изоморфны в том и только в том случае, если сами группы A и B изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группы изоморфны, то, очевидно, что их кольца эндоморфизмов также изоморфны. Пусть далее, кольца $E(A)$ и $E(B)$ изоморфны. Согласно следствию 6, группы A и B можно представить в виде $A = \mathbb{Z}_p^{r_1} \oplus R^{s_1} \oplus \mathbb{Q}^{t_1}$, $B = \mathbb{Z}_p^{r_2} \oplus R^{s_2} \oplus \mathbb{Q}^{t_2}$. Покажем, что $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ и $t_1 = t_2$. Так как группы A и B конечного ранга, то аддитивные группы $E(A)^+$ и $E(B)^+$ конечного ранга. Заметим, что

$$\text{Hom}(\mathbb{Q}^{t_i}, \mathbb{Z}_p^{r_i}) = \text{Hom}(\mathbb{Q}^{t_i}, R^{s_i}) = \text{Hom}(R^{s_i}, \mathbb{Z}_p^{r_i}) = 0$$

для $i = 1, 2$. Так как $E(A) \cong E(B)$, то $E(A)^+ \cong E(B)^+$ и являются также K -разложимыми группами и, согласно следствию 6, неразложимыми слагаемыми будут группы $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$ и R . Согласно [18] число прямых слагаемых изоморфных $\mathbb{Z}_p$ является инвариантом и, следовательно, у групп $E(A)^+ \cong E(B)^+$ одинаково. Подсчитывая их число, получим $r_1^2 = r_2^2$, откуда $r_1 = r_2$. Число прямых слагаемых изоморфных R в $E(A)^+$ равно $r_1 s_1 + s_1^2$, в группе $E(B)^+$ равно $r_2 s_2 + s_2^2$. Приравнявая, с учетом равенства $r_1 = r_2$, получаем $r_1(s_1 - s_2) = s_2^2 - s_1^2$. Если $s_1 \neq s_2$, то числа слева и справа имеют разные знаки, что невозможно, следовательно, $s_1 = s_2$. Так как $r(E(A)^+) = r(E(B)^+)$ и число прямых слагаемых изоморфных $\mathbb{Z}_p$ и R одинаково, то и число оставшихся прямых слагаемых изоморфных $\mathbb{Q}$ будет равным и, следовательно, $t_1 = t_2$. Откуда следует изоморфизм $A \cong B$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть p -локальные группы без кручения конечного ранга A и B имеют квадратичное поле расщепления. Тогда аддитивные группы колец эндоморфизмов групп A и B изоморфны в том и только в этом случае, если сами группы A и B изоморфны.

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрен вопрос о выполнимости теоремы Бэра-Капланского для нового класса абелевых групп без кручения конечного ранга, для p -локальных групп, у которых поле расщепления является квадратичным расширением поля рациональных чисел. Доказано, что в данном классе абелевых групп без кручения теорема Бэра-Капланского имеет место: группы изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их кольца эндоморфизмов. Доказательство этого свойства основано на описании неразложимых групп этого класса, при этом использовались понятие поля, кольца, группы расщепления, а также внутренней и внешней p -адической характеристики элементов группы. В связи с этим, актуальным становится вопрос о рассмотрении более широкого класса смешанных p -локальных групп, у которых фактор-группа по периодической подгруппе имеет квадратичное поле расщепления.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.1 — М.: Мир, 1977, 335 с.

2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т.2 — М.: Мир, 1977, 416 с.
3. Фомин А. А. Тензорное произведение абелевых групп без кручения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, №4. С. 869–878.
4. Фарушкин В. Х. Локальные абелевы группы без кручения // Фундам. и прикл. мат. 2012. Т. 17, вып. 8. С. 147–152.
5. Baer R. Automorphism rings of primary abelian operator groups // Ann. Math., 44 (1943), 192–227.
6. Kaplansky. I. Some results on abelian groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 38, 538–540 (1952).
7. Mikhalev A. V. Isomorphisms and anti-isomorphisms of endomorphism rings of modules // Proc. Moscow-Tainan Algebra Workshop, Walter de Gruyter, Berlin, 1996, P. 65–116.
8. Себельдин А. М. Условия изоморфизма вполне разложимых абелевых групп без кручения с изоморфными кольцами эндоморфизмов // Мат. заметки. 1972. Т. 11, вып. 4. С. 402–408.
9. Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer-Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85–93.
10. May W. The theorem of Baer and Kaplansky for mixed modules // Journal of Algebra. — 1995. — Vol. 77(1). — P. 255–263.
11. Wolfson K. Isomorphism of the endomorphism rings of torsion-free modules // Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), P. 712–714.
12. Files S. T., Wickless W., The Baer-Kaplansky theorem for a class of mixed abelian groups // Rocky Mountain J. Math., 26, No.2, P. 593–613 (1996).
13. Wickless W. J. The Baer-Kaplansky theorem to direct sums of self-small mixed groups // Abelian groups and modules (Dublin, 1998), Birkhäuser, Basel, 101–106 (1999).
14. Lady E. L. Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, I // Journal of Algebra. — 1977. — Vol. 49(1). — P. 261–275.
15. Lady E. L. Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, II // Journal of Algebra. — 1980. — Vol. 66. — P. 281–306.
16. Lady E. L. Splitting fields for torsion-free modules over discrete valuation rings, III // Journal of Algebra. — 1980. — Vol. 66. — P. 307–320.

17. Вершина С. В. Группы расщепления неразложимых p -локальных групп без кручения. // Алгебра и логика: теория и приложения.: Материалы международной конференции, посвященной 80-летию В. П. Шункова. — Красноярск, 2013. С. 25–26.
18. Farukshin V. Kh. Local abelian torsion-free groups // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 195(5). — P. 684–687.

Московский Педагогический Государственный Университет

Получено 17.02.2014