

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-45-56

О свойстве антинормальности двупорожденных подгрупп свободной группы

Н. Б. Безверхняя

Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Аннотация

Вопрос об изучении свойства антинормальности подгрупп является важным, так как это свойство используется при изучении различных свойств групп (например, гиперболичности групп) и различных алгоритмических проблем в группах.

В предлагаемой статье дано полное описание всех антинормальных двупорожденных подгрупп со определенным условием, налагаемым на образующие данной подгруппы, содержащиеся в свободной группе ранга больше единицы.

Ключевые слова: свободные группы, антинормальность подгрупп, алгоритмические проблемы.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:

Безверхняя, Н.Б. О свойстве антинормальности двупорожденных подгрупп свободной группы // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 45–45.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 5.

UDC 511.32

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-45-56

On the property of antinormality of two-born subgroups of a free group

N. B. Bezverhnaya

Bezverhnaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).

e-mail: vnbezu@rambler.ru

Abstract

The question of studying the property of antinormality of subgroups is important, since this property is used in the study of various properties of groups (for example, hyperbolicity of groups) and various algorithmic problems in groups.

The proposed article gives a complete description of all antinormal two-generated subgroups with a certain condition imposed on the generators of this subgroup contained in a free group of rank greater than one.

Keywords: free groups, antinormality of subgroups, algorithmic problems.

Bibliography: 7 titles.

For citation:

Bezverhnaya, N.B. 2024, "On the property of antinormality of two-born subgroups of a free group", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 45–45.

1. Введение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. [1]. Подгруппа H группы G антинормальна в G , если для любого $z \in G \setminus H$, $z^{-1}Hz \cap H = E$, E – единичная подгруппа.

Вопрос об определении антинормальных подгрупп в группах является весьма существенным. Свойство антинормальности играет важную роль в изучении свободных произведений с объединением. Отметим, что впервые это свойство было исследовано Б. Ньюманом [1] для групп с одним определяющим соотношением с кручением. Им было показано, что всякая магнусова подгруппа данного класса групп обладает свойством антинормальности. Изучением этого свойства для подгрупп ранга два свободных групп занимались Б. Файн, А. Мясников, Г. Розенберг [2], которые нашли необходимое и достаточное условие антинормальности этих групп:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [2]. Подгруппа H группы G называется антинормальной на образующих, если выполняются следующие условия:

Пусть $H = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ и $g \in G$, тогда если $gv_1g^{-1}, gv_2g^{-1}, \dots, gv_ng^{-1}$, то $g \in H$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подгруппа H называется изолированной в группе G , если $\forall w \in G$ существует $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такое, что из того, что $w^n \in H$, ($w^n \neq 1$), следует, что $w \in H$.

Будем говорить, что подгруппа H изолирована на образующих, если $w^n \in H$, то существует образующий $v_i = w^n$, принадлежащий некоторой минимальной системе образующих подгруппы H и $w \in H$. [2]

ТЕОРЕМА. [2]. Пусть свободная F группа и пусть H ее подгруппа ранга два, тогда H антинормальна в F тогда и только тогда, когда H изолирована на образующих и антинормальна на образующих.

В данной статье автором выделен класс подгрупп ранга 2, с определенными условиями, налагаемыми на образующие, такой, что по виду образующих рассматриваемой подгруппы можно определить, является ли она антинормальной или нет.

Г. Баумслаг, А. Мясников и В. Ремесленников [3] указали алгоритм, позволяющий для свободной группы определить, является ли антинормальной ее любая конечнопорожденная подгруппа ранга больше двух.

Пусть f – слово в свободной группе F , обозначим f^* его произвольную циклическую перестановку.

В. Н. Безверхним при решении проблемы сопряженности и степенной сопряженности слов в группах с одним определяющим соотношением Гуревича была получена и использована следующая

ЛЕММА 1. [4]. Пусть $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ – свободная группа, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – ее свободные образующие, $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle$ – собственная подгруппа группы F , такая, что $k < n$, $f^* \notin \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ тогда, если элемент c минимален в HcH , $HcH \neq HH$ и $cHc^{-1} \cap H \neq E$, то $cHc^{-1} \cap H$ – циклическая группа.

СЛЕДСТВИЕ. [4] Пусть $H = \langle a_1, a_2, \dots, a_k, f(a_1, a_2, \dots, a_n) \rangle$, $k < n$ подгруппа группы $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ и $f^* \notin \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$. Если для h минимального в HhH , $HhH \neq HH$ и $hHh^{-1} \cap H$ – циклическая группа, то либо $f = w^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и имеет место равенство.

$$hw^ph^{-1} = w^p$$

либо существует $v \in \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ такое, что $fv = w^p$ для некоторого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и имеет

место равенство

$$hfvh^{-1} = vf$$

Кроме того, данная лемма использовалась при описании класса гиперболических групп в группах Гуревича [5] и групп вида

$$G = \langle a, b, t; t^{-1}at = b, t^{-1}bt = f(a, b) \rangle [6]$$

Отметим, что результат об алгоритмической разрешимости антинормальности подгрупп свободной группы, полученный Г. Баумслагом, А. Мясниковым и В. Ремесленниковым непосредственно следует из результата В. Н. Безверхнего [7].

2. Доказательство основного результата.

Пусть $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ свободная группа $n > 1$, $H = \langle v, w \rangle$ ее подгруппа, порожденная образующими v, w , где $v = v(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Пусть слова v, w удовлетворяют условию:

v, w - циклически несократимы и
в произведениях $v^\varepsilon w^\delta, w^\delta v^\varepsilon, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$ нет сокращений. (*)

Пусть элемент $z \in F \setminus H$ и удовлетворяет условию:

z минимален в $H z H$ и $H z H \neq H H$ (**)

Если z не удовлетворяет условию (**), то используя понятие нильсеновского множества [1], всегда свободно несократимое слово z можно привести к указанному виду.

Рассмотрим пересечение $z H z^{-1} \cap H$. Если $z H z^{-1} \cap H$ не является единичной подгруппой, то существует элемент $h \in H$, произвольной длины в образующих группы H , такой что $zhz^{-1} \in H$, то есть элемент zhz^{-1} переписывается в образующих v, w .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию (*) и h некоторый элемент из подгруппы H , если $zxhyz^{-1} \in H$ причем x и y некоторые подслова образующих $v^{\pm 1}, w^{\pm 1}$, возможно, равные единице, и в произведениях zx и yz^{-1} сокращений нет, то $zxhyz^{-1} = uh_1u^{-1}$, где u это образующий $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $zxhyz^{-1} \in H$, то $zxhyz^{-1} = uh_1\bar{u}$, где u и $\bar{u}$ это образующие $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$. Предположим, что $\bar{u} \neq u^{-1}$, тогда так как $u = zu_\pi$ и $\bar{u} = u_\pi z^{-1}$, то в произведении $\bar{u}u$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть в произведении zh нет сокращений. Тогда если в произведении hz^{-1} есть сокращения, то элемент z^{-1} сокращается полностью.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть v, w - образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию (*) и не являются словами вида

- 1). $v = u^k$, или $w = \bar{u}^p$
- 2). $v = xy, w = yv^p x$,
- 3). $v = (xy)^k, w = (yx)^p$.

тогда если $\tilde{x}$ некоторое начальное подслово образующих $v^{\pm 1}, w^{\pm 1}$, то $\tilde{x}v^{\pm 1}\tilde{x}^{-1} \notin H$ и $\tilde{x}w^{\pm 1}\tilde{x}^{-1} \notin H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

- 1). Рассмотрим случай $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$, остальные аналогичны.

а) пусть $\tilde{x}$ - начальное подслово образующего v , то есть $\tilde{x} = v_\pi$ и $v = v_\pi v_\pi = \bar{v}\bar{v}$, где $v_\pi = \bar{v}$, тогда $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = v_\pi v^l v_\pi^{-1} = v_\pi (\bar{v}\bar{v})^l v_\pi^{-1} = v(\bar{v}\bar{v})^{l-1} \bar{v} v_\pi^{-1}$. Так как сокращений в $\bar{v} v_\pi^{-1}$ нет (иначе v циклически сократимо, либо v является степенью, что противоречит условию), то по утверждению 1, $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$ должен заканчиваться на v^{-1} . Тогда $\bar{v} v_\pi^{-1} = v_\pi^{-1} v_\pi^{-1}$, тогда $\bar{v} = v_\pi^{-1}$ чего не может быть.

б) пусть $\tilde{x}$ – начальное подслово образующего w , то есть $\tilde{x} = w_\pi$ и $w = w_\pi w_\pi$, и если $v = \bar{v}\bar{v}$, где $w_\pi = \bar{v}$, то тогда $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_\pi v^l w_\pi^{-1} = w_\pi(\bar{v}\bar{v})^l w_\pi^{-1} = w(\bar{v}\bar{v})^{l-1}\bar{v}w_\pi^{-1}$. По следствию утверждения 1, в произведении $\bar{v}w_\pi^{-1}$ либо нет сокращений, либо w_π^{-1} сокращается полностью.

Тогда если в произведении $\bar{v}w_\pi^{-1}$ нет сокращений, то по утверждению 1 элемент $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1}$ должен заканчиваться на v^{-1} , следовательно $\dots \bar{v}w_\pi^{-1} = \dots w^{-1} = \dots w_\pi^{-1}w_\pi^{-1}$ и слова $\bar{v}$ и w_π^{-1} имеют общий конец, но тогда в произведении vw есть сокращения, что противоречит условию (*).

Пусть w_π^{-1} сокращается полностью, тогда $w_\pi = v_\pi v_\pi^{l_1}$, где $v = v_\pi v_\pi$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_\pi(\bar{v}\bar{v})^l w_\pi^{-1} = w(\bar{v}\bar{v})^{l-1}\bar{v}w_\pi^{-1} = w\bar{v}v^{l-1}w_\pi^{-1} = w\bar{v}v^{l-2-l_1}v_\pi$. Отметим, что в произведении $w\bar{v}v^{l-2-l_1}v_\pi$ сокращений нет, поэтому так как длина $|w\bar{v}v^{l-2-l_1}v_\pi| = |w| + (l-2-l_1)|v| + |\bar{v}| + |v_\pi|$, то если $w\bar{v}v^{l-2-l_1}v_\pi \in H$, должно выполняться равенство $|\bar{v}| + |v_\pi| = |v|$, либо $|\bar{v}| + |v_\pi| = |w|$.

Если $|\bar{v}| + |v_\pi| = |v|$, то $|\bar{v}| = |v_\pi|$, следовательно, $v_\pi = \bar{v}$, тогда обозначив $v_\pi = x$, и $v_\pi = y$ получим, что $v = xy$, а $w = v_\pi v_\pi^{l_1} w_\pi = y(xy)^{l_1} x = (yx)^{l_1+1}$, что противоречит условию.

Если $|\bar{v}| + |v_\pi| = |w|$, то тогда $w = v_\pi w_\pi = w_\pi w_\pi$, следовательно, $v_\pi = w_\pi$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} = w_\pi v^l w_\pi^{-1} = v_\pi(v_\pi v_\pi)^l v_\pi^{-1} = (v_\pi v_\pi)^l$ и $\tilde{x}v^l\tilde{x}^{-1} \in H$ только если $v = xy$, $w = yv^p x$, или $v = (xy)^k$, $w = (yx)^p$, что противоречит условию.

□

ЛЕММА 1. Пусть образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию (*), а элемент z – условию (**), тогда если и в произведении zh и в произведении hz^{-1} есть сокращения, то $zhz^{-1} \notin H$, (h некоторый элемент из подгруппы H) кроме случая, когда $v = xy$, $w = yx$, где $x = x(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $y = y(a_1, a_2, \dots, a_n)$ слова в образующих $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть $zhz^{-1} \in H$, то есть элемент zhz^{-1} переписывается в образующих v, w . Принимая во внимание условие (*) можно считать, что $h = vh_1v^{-1}$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $zhz^{-1} = z_\pi v_\pi^{-1} v_\pi h_1 v_\pi^{-1} v_\pi^{-1} v_\pi z_\pi^{-1} = z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ и $h_1 \neq e$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Элемент h_1 начинается на некоторый образующий u из $\{v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}\}$, а заканчивается на u^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_1 = uh_2\bar{u}$, где u и $\bar{u}$ это образующие $v^{\pm 1}$, либо $w^{\pm 1}$. Предположим, что $\bar{u} \neq u^{-1}$, тогда если $|h_1| > 1$, то $z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1} = z_\pi v_\pi u_\pi h_2 \bar{u}_\pi \bar{u}_\pi^{-1} v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ начинается на некоторый образующий из $\{v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}\}$, равный $z_\pi v_\pi u_\pi$ и так как в произведениях $z_\pi v_\pi$ и $v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ сокращений нет, то по утверждению 1 $z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ заканчивается на тот же образующий, только в степени -1. То есть $\bar{u}_\pi^{-1} = u_\pi$, но тогда в произведении $\bar{u}u$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Если $|h_1| = 1$, то $z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1} = z_\pi v_\pi u_\pi u_\pi v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$, и так как в произведениях $z_\pi v_\pi u_\pi$ и $u_\pi v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ нет сокращений, то по утверждению 1, $z_\pi v_\pi u_\pi u_\pi v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ начинается на некоторый образующий и заканчивается на тот же образующий, только в степени -1, что невозможно.

□

Вернемся к доказательству леммы.

Рассмотрим элемент $zhz^{-1} = z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$, тогда по утверждению 1 элемент $z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1}$ начинается на образующий u_1 , $u_1 \in \{v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}\}$ и заканчивается на образующий u_1^{-1} . То есть $z_\pi v_\pi h_1 v_\pi^{-1} z_\pi^{-1} = u_1 x_1 h_3 x_1^{-1} u_1^{-1}$ причем $|h_3| < |h_1|$ и по утверждению 3, x_1 – подслово одного и того образующего из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Для элемента $x_1 h_3 x_1^{-1}$ справедливости утверждения 1, 3.

Тогда $zhz^{-1} = u_1 x_1 h_3 x_1^{-1} u_1^{-1} = u_1 u_2 x_2 h_4 x_2^{-1} u_2^{-1} u_1^{-1}$, где x_2 подслово одного из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, причем $h_4 \neq e$ и $|h_4| < |h_3|$.

Рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1 u_2 \dots u_k x u^l x^{-1} u_k^{-1} \dots u_2^{-1} u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k, u \in \{v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}\}$, x – подслово одного из образующих $v^\varepsilon, w^\delta, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1 u_2 \dots u_k \in H$, то элемент $xu^l x^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе H . Но так как по утверждению 2 $xu^l x^{-1} \notin H$ следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

ЛЕММА 2. Пусть v, w - образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию (*), а элемент z - условию (**), тогда если выполняются следующие условия, то $zHz^{-1} \cap H$ - циклическая подгруппа.

- 1). $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*), $z = u^l, 2l \leq k$;
- 2). $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y, p \in \{0, 1, 2, \dots\}, z = (xy)^l, 2l \leq k$;
- 3). $v = (xy)^k x, w = (yx)^l v^p (xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leq k, p \in \{0, 1, 2, \dots\}$;
- 4). $v = xy, w = yv^p x, z = x$;
- 5). $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x, p \geq 1, k \geq 1$;

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие случаи.

1). Пусть $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*).

Пусть $z = u^l, 2l \leq k$, тогда $u^l v^p u^{-l} = v^p$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in H$. Покажем, что если h содержит образующий w , то $zhz^{-1} \notin H$. Пусть $h = wh_1$, тогда так как элемент $zhz^{-1} = u^l wh_1 u^{-l}$ начинается на v , получаем, что $v = u^k = u^l w_{\text{л}}$, следовательно, $w_{\text{л}} = u^{k-l}$ и $w = u^{k-l} w_{\text{п}}$, но тогда в произведении $w^{-1}v$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Поэтому $zhz^{-1} = u^l wh_1 u^{-l} \notin H$. Если $h = v^p wh_1$, то $zhz^{-1} = zv^p z^{-1} zw h_1 z^{-1} = v^p zw h_1 z^{-1}$ и так как $u^l wh_1 u^{-l} \notin H$, то и $zhz^{-1} \notin H$, следовательно $zHz^{-1} \cap H$ - циклическая подгруппа.

ЗАМЕЧАНИЕ. (справедливо для случаев 2)-3). Если элемент zhz^{-1} принадлежит подгруппе H , то очевидно, что $h \neq v^{-1}h_1$.

2). $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y, z = (xy)^l, 2l \leq k$.

Рассмотрим принадлежит ли элемент zhz^{-1} подгруппе H .

Пусть $h = wh_1$, тогда $zhz^{-1} = zw h_1 z^{-1} = (xy)^l (yx)^p y h_1 (xy)^{-l}$ начинается на образующий v и имеем $xy = yx$, что невозможно, так как противоречит условию (*).

Пусть $h = vh_1$. Тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = v (xy)^l h_1 (xy)^{-l}$.

Элемент $(xy)^l h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий w , иначе, если $(xy)^l h_1 (xy)^{-l}$ начинается на v , то $xy = yx$, если $(xy)^l h_1 (xy)^{-l}$ начинается на w^{-1} , то $y = y^{-1}$, что тоже невозможно.

Пусть $h_1 = e$, тогда $(xy)^l h_1 (xy)^{-l} = (xy)^l (xy)^{-l} = (xy)^p y h_2$. Тогда, если $l \leq p$, то $y = y^{-1}$, что невозможно. Если же $l > p$, то тогда $h_2 = x (xy)^{l-p-1} (xy)^{-l}$, причем элемент $x (xy)^{l-p-1} (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий v , что невозможно, так как $|x (xy)^{l-p-1} (xy)^{-l}| = |x| + (|x| + |y|)(2l - p - 1) < |v| = |x| + (|x| + |y|)k, 2l \leq k$.

Пусть $h_1 = w$, тогда $(xy)^l h_1 (xy)^{-l} = (xy)^l (yx)^p y (xy)^{-l} = y (xy)^{l+p} (xy)^{-l} = (xy)^p y = w$ и $zvwz^{-1} = vw$, следовательно, $z(vw)^s z^{-1} = (vw)^s$.

Пусть $h = v^2 h_1$. Тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (xy)^k x (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = v (xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$. Если элемент $(xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$ начинается на образующий w , то $(xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = (yx)^p y h_2$ и если $p \geq l$, то либо $x = y$, либо $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$, что противоречит условию (*). Если $p < l$, то из $(xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = (yx)^p y h_2$ следует, что $(xy)^l (xy)^k x h_1 (xy)^{-l} = w (xy)^{l-p-1} x (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$, но тогда элемент $(xy)^{l-p-1} x (xy)^k x h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий v , тогда $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = vw^{-1} h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (xy)^k xy^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l} = v (xy)^l y^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l}$, и элемент $(xy)^l y^{-1} (x^{-1} y^{-1})^p h_1 (xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий w , поэтому получаем, что $y^{-1} = y$, что невозможно.

Если $h = vw^2 h_1$, то $zhz^{-1} \notin H$, так как $zvw^2 h_1 z^{-1} = zvwz^{-1} zw h_1 z^{-1} = vwzwh_1 z^{-1}$ и $zwh_1 z^{-1} \notin H$.

Пусть $h = w^{-1} h_1$, тогда $zhz^{-1} = (xy)^l (y^{-1} x^{-1})^p y^{-1} h_1 (xy)^{-l}$, и в произведении zh есть сокращения. Рассмотрим следующие случаи:

Если $h_1 = h_2w$, то тогда $zhz^{-1} = (xy)^l(y^{-1}x^{-1})^py^{-1}h_2(yx)^py(xy)^{-l}$ и в произведении hz^{-1} тоже есть сокращения, тогда по лемме 1 $zhz^{-1} \notin H$.

Если $h_1 = h_2w^{-1}$, то $zhz^{-1} = (xy)^l(y^{-1}x^{-1})^py^{-1}h_2(y^{-1}x^{-1})^py^{-1}(xy)^{-l}$, в произведении hz^{-1} нет сокращений. Получаем, что элемент zhz^{-1} должен заканчиваться на образующий v^{-1} , тогда $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, следовательно, $xy = yx$ что невозможно, так как противоречит условию (*).

Если $h_1 = h_2v^{\pm 1}$, то рассмотрим элемент $(zhz^{-1})^{-1} = zh^{-1}z^{-1}$, где h^{-1} начинается на образующий $v^{\mp 1}$, и для которого справедливо все вышесказанное.

Таким образом, получаем, что $zhz^{-1} \in H \Leftrightarrow h = (vw)^s$.

3). $v = (xy)^kx, w = (yx)^lv^p(xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leq k$;

Рассмотрим следующие случаи. $v^p = 1$

Пусть $h = v^2w$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2wz^{-1} = (xy)^l(xy)^kx(xy)^kx(yx)^l(xy)^l(xy)^{-l} = v(yx)^l(xy)^kx(yx)^l = v(yx)^l(xy)^l(xy)^{k-l}(xy)^lx = vw(xy)^kx = vww$. Таким образом, $z(v^2w)^sz^{-1} = (vww)^s$.

Пусть $h = vwh_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zvwh_1z^{-1} = (xy)^l(xy)^kx(yx)^l(xy)^lh_1(xy)^{-l} = v(yx)^l(yx)^l(xy)^lh_1(xy)^{-l}$. Элемент $(yx)^l(yx)^l(xy)^lh_1(xy)^{-l}$ должен начинаться на образующий w , иначе или $xy = yx$, что противоречит условию (*), или $yx = (yx)^{-1}$, что невозможно. Но тогда $(yx)^l(yx)^l = (yx)^l(xy)^l$, следовательно, $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = wh_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zwh_1z^{-1} = (xy)^l(yx)^l(xy)^lh_1(xy)^{-l}$, причем этот элемент должен начинаться на образующий v , тогда $(xy)^l(yx)^l(xy)^lh_1(xy)^{-l} = (xy)^kxh_2 = (xy)^l(xy)^{k-1}xh_2$, следовательно, $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Пусть $h = v^3h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^3h_1z^{-1} = (xy)^l(xy)^kx(xy)^kx(xy)^kh_1z^{-1} = v(yx)^l(xy)^kx(xy)^kh_1z^{-1} = v(yx)^l(xy)^l(xy)^{k-l}x(xy)^kh_1z^{-1} = vw(xy)^{k-l}x(xy)^kh_1z^{-1}$.

Элемент $(xy)^{k-l}x(xy)^kh_1z^{-1}$ должен начинаться на v . Тогда, так как $(xy)^{k-l}xy \dots = (xy)^{k-l}xy \dots$, $2l \leq k$ то получим, что $xy = yx$, что противоречит условию (*).

Таким образом, элемент h начинаться на v^p , где $p > 2$, или $p = 1$, не может, равно как и на $w^{\pm 1}$ и на vw .

Пусть $h = v^2w^2h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2w^2h_1z^{-1} = zv^2wz^{-1}zwh_1z^{-1} = vvwz(yx)^l(xy)^lh_1z^{-1} = vvwzwh_1z^{-1}$, но $zwh_1z^{-1} \notin H$, следовательно, и $vwvzwh_1z^{-1} \notin H$.

Пусть $h = v^2w^{-1}h_1$.

Тогда $zhz^{-1} = zv^2w^{-1}h_1z^{-1} = (xy)^l(xy)^kx(xy)^kx(y^{-1}x^{-1})^l(x^{-1}y^{-1})^lh_1z^{-1} = v(yx)^l(xy)^l(xy)^{k-l}x(y^{-1}x^{-1})^l(x^{-1}y^{-1})^lh_1z^{-1} = vw(xy)^{k-l}x(y^{-1}x^{-1})^l(x^{-1}y^{-1})^lh_1z^{-1}$.

Рассмотрим элемент $(xy)^{k-l}x(y^{-1}x^{-1})^l(x^{-1}y^{-1})^lh_1z^{-1}$. Он должен начинаться на v , тогда $(xy)^{k-l}xy^{-1}x^{-1} \dots = (xy)^{k-l}xy \dots$, из чего следует, что $y^{-1} = y$, чего не может быть.

Из всего вышесказанного получаем, что элемент h может начинаться только на v^2w , тогда $zhz^{-1} = zv^2wh_1z^{-1} = vvwzh_1z^{-1} = vvw(xy)^lh_1(xy)^{-l}$. Таким образом, либо $zv^2wh_1z^{-1} \notin H$, либо $z(v^2w)^sz^{-1} = (vww)^s$, тогда $zH^{-1} \cap H$ – циклическая подгруппа.

Пусть $v^p \neq 1$. Рассмотрим элемент $h = v^2w$.

Тогда $zhz^{-1} = (xy)^l(xy)^kx(xy)^kx(yx)^lv^p(xy)^l(xy)^{-l} = v(yx)^l(xy)^l(xy)^{k-l}x(yx)^lv^p = vww^{p+1}$. Таким образом, $z(v^2w)^sz^{-1} = (vww^{p+1})^s$. Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю.

4). $v = xy, w = yv^px, z = x$. Рассмотрим элемент $h = w^s$.

Тогда $zhz^{-1} = zw^sz^{-1} = x(yv^px)^sx^{-1} = (xyv^p)^s = (v^{p+1})^s$. Таким образом, $z(w)^sz^{-1} = (v^{p+1})^s$.

Пусть $h = vh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xxyh_1x^{-1}$ должен начинаться на v . Тогда $xxyh_1x^{-1} = v\bar{h} = xy\bar{h}$, где $\bar{h} \in H$. Отсюда либо $x = y$, что невозможно, либо $x = y\bar{x}$, либо $y = x\bar{y}$. Если $x = y\bar{x}$, то $v = y\bar{x}y$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Если $y = x\bar{y}$, то $w = x\bar{y}v^px$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения. Таким образом, если $zhz^{-1} \in H$, то элемент h не может начинаться на v .

Пусть $h = v^{-1}h_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xy^{-1}x^{-1}h_1x^{-1}$ должен начинаться на v . Но тогда $y^{-1} = y$, чего не может быть. Таким образом, если $zhz^{-1} \in H$, то элемент h не может начинаться на v^{-1} .

Пусть $h = w^sh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = xw^sh_1x^{-1}$ должен начинаться на v . Тогда $xw^sh_1x^{-1} = x(yv^px)^sh_1x^{-1} = (v^{p+1})^sxh_1x^{-1}$. Если элемент $zhz^{-1} \in H$, то и элемент $xh_1x^{-1} \in H$. Тогда так как элемент h_1 не может начинаться на $v^{\pm 1}$, то $h_1 = 1$ и $z(w)^sz^{-1} = (v^{p+1})^s$ и $zHz^{-1} \in H$ – циклическая подгруппа.

5). $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x$.

Рассмотрим элемент $h = w^k$.

Тогда $zhz^{-1} = zw^kz^{-1} = x(yx)^{pk}x^{-1} = (xy)^{pk} = v^p$. Таким образом, $z(w)^kz^{-1} = v^p$ и $zHz^{-1} \in H$ – циклическая подгруппа.

Остальная часть доказательства аналогична предыдущему случаю 4.

□

СЛЕДСТВИЕ. Пусть v, w – образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию леммы 2, тогда $zHz^{-1} \cap H$ – циклическая подгруппа, а именно, если

1). $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – произвольное слово от образующих a, b удовлетворяющее условию (*), $z = u^l, 2l \leq k$, то $u^l \langle v^p \rangle u^{-l} = \langle v^p \rangle$.

2). $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y, p \in \{0, 1, 2, \dots\}, z = (xy)^l, 2l \leq k$, то $z \langle (vw)^s \rangle z^{-1} = \langle (vw)^s \rangle$.

3). $v = (xy)^k x, w = (yx)^l v^p (xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leq k, p \in \{0, 1, 2, \dots\}$, то $z \langle (v^2 w)^s \rangle z^{-1} = \langle (v^2 w)^s \rangle$.

4). $v = xy, w = yv^p x, z = x$, то $z \langle (w)^s \rangle z^{-1} = \langle (v^{p+1})^s \rangle$.

5). $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x, p \geq 1, k \geq 1$, то $z \langle (w)^k \rangle z^{-1} = \langle v^p \rangle$.

ЛЕММА 3. Пусть v, w – образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$, v, w удовлетворяют условию (*), а элемент z – условию (**), и слова v и w не имеют вид 1) – 5). тогда $zHz^{-1} \cap H = E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть слова v и w не имеют вид 1) – 5). Покажем, что тогда $zHz^{-1} \cap H = E$, то есть $zHz^{-1} \notin H$. Другими словами, элемент zHz^{-1} не переписывается в образующих v и w . Пусть z есть начальное подслово образующего v , то есть $z = v_{\text{л}}$, где $v = v_{\text{л}}v_{\text{п}}$ и $|v_{\text{л}}| \leq |v_{\text{п}}|$. Случай, когда z есть начальное подслово образующего w – аналогичен. Элемент h может начинаться на v или w . Отметим, что на v^{-1} он начинаться не может, так как тогда получим, что $v_{\text{л}}v_{\text{п}} = v_{\text{л}}v_{\text{п}}^{-1}$, следовательно, $v_{\text{п}} = v_{\text{п}}^{-1}$, чего не может быть.

Так как по условию $v \neq xy$ и $w \neq yx$ одновременно, то если произведениях zh и hz^{-1} есть сокращения, то по лемме 1 $zhz^{-1} \notin H$, поэтому будем считать, что в произведении zh сокращений нет. (Второй случай аналогичен).

Рассмотрим следующие случаи:

I. Элемент h начинается на v , то есть $h = vh_1$.

Пусть тогда элемент $zhz^{-1} = v_{\text{л}}v_{\text{л}}v_{\text{п}}h_1v_{\text{л}}^{-1} = h^* \in H$. Так как $h^* \in H$, то h^* должен начинаться на образующий v . Если же он начинается на образующий $w^\delta, \delta = \pm 1$, то тогда получаем, что $v = v_{\text{л}}v_{\text{п}}, w^\delta = v_{\text{л}}w_{\text{п}}$, следовательно, в произведении $v^{-1}w^\delta$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Таким образом, $v_{\text{л}}v_{\text{л}}v_{\text{п}}h_1v_{\text{л}}^{-1} = v_{\text{л}}v_{\text{л}}\bar{h}_1$ и $|v_{\text{л}}| \leq |v_{\text{п}}|$. Теперь, если $|v_{\text{л}}| = |v_{\text{п}}|$, то $v_{\text{л}} = v_{\text{п}}$ и $v = v_{\text{л}}^2, z = v_{\text{л}}$ и мы имеем уже рассмотренный случай 1).

Пусть $|v_{\text{л}}| < |v_{\text{п}}|$. Тогда $zhz^{-1} = v_{\text{л}}v_{\text{л}}v_{\text{п}}h_1v_{\text{л}}^{-1} = v_{\text{л}}v_{\text{п}}\bar{h}_1$, следовательно, $v_{\text{п}} = v_{\text{л}}v_{\text{пп}}$, если $|v_{\text{пп}}| > |v_{\text{л}}|$, то в общем случае имеем $v = v_{\text{л}}^k\bar{v}_{\text{пп}}$, где $|\bar{v}_{\text{пп}}| < |v_{\text{л}}|$.

Тогда $v_{\text{л}}\underbrace{v_{\text{л}}\dots v_{\text{л}}}_{k \text{ раз}}\bar{v}_{\text{пп}}\dots = \underbrace{v_{\text{л}}\dots v_{\text{л}}}_{k \text{ раз}}\bar{v}_{\text{пп}}\dots$, следовательно, $v_{\text{л}} = \bar{v}_{\text{пп}}v_c$. Тогда $v = (\bar{v}_{\text{пп}}v_c)^k\bar{v}_{\text{пп}}$,

обозначив $\bar{v}_{\text{пп}} = x$, $v_c = y$, получим, что $v = (xy)^kx$, $z = (xy)^l$, $2l \leq k$. Таким образом, если элемент h начинается на v , и v не является истинной степенью, то zhz^{-1} переписывается в образующих v и w , тогда и только тогда, когда $v = (xy)^kx$, $z = (xy)^l$, $2l \leq k$.

$$zhz^{-1} = (xy)^l(xy)^kxh_1(xy)^{-l} = (xy)^kx(yx)^lh_1(xy)^{-l} = v(yx)^lh_1(xy)^{-l}.$$

Рассмотрим элемент $\tilde{h} = (yx)^lh_1(xy)^{-l}$. Он может начинаться только на образующий w . Иначе, имеем либо v является истинной степенью, либо $y^{-1} = y$, чего не может быть. Тогда $w = (yx)^lw_{\text{п}}$.

Если $h_1 = 1$, тогда $\tilde{h} = (yx)^l(xy)^{-l} = w$, что противоречит условию (*).

Пусть $h_1 \neq 1$.

А) пусть в произведении $h_1(xy)^{-l}$ нет сокращений, тогда по утверждению 1 zhz^{-1} заканчивается на v^{-1} . Тогда $zhz^{-1} = v(yx)^lh_1(xy)^{-l} = v(yx)^lh_2(yx)^{-l}v^{-1}$, (утверждение 3). Если $zhz^{-1} \in H$, то и $(yx)^lh_2(yx)^{-l} \in H$.

Рассмотрим элемент $(yx)^lh_2(yx)^{-l}$, который должен начинаться на образующий w . Так как в произведениях $(yx)^lh_2(yx)^{-l}$ нет сокращений, то по утверждению 1 он заканчивается на w^{-1} .

Тогда $zhz^{-1} = vwx_1h_2x_1^{-1}w^{-1}v^{-1}$, где x_1 – есть подслово образующих v или w . Очевидно, что $h_2 \neq 1$. Отметим, что $|h| > |h_1| > |h_2|$.

Рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1u_2\dots u_k\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1}u_k^{-1}\dots u_2^{-1}u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k, u \in \{v^\varepsilon, w^\delta\}$, $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, $\tilde{x}$ подслово одного из образующих v^ε, w^δ , $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1u_2\dots u_k \in H$, то элемент $\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе H . Но тогда по утверждению 2 $\tilde{x}u^l\tilde{x}^{-1} \notin H$, следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

Б) пусть в произведении $h_1(xy)^{-l}$ есть сокращения, тогда по следствию утверждения 1 элемент $(xy)^{-l}$ сокращается полностью. Тогда $zhz^{-1} = v(yx)^lh_1(xy)^{-l} = v(yx)^lh_2u(xy)^l(xy)^{-l} = v(yx)^lh_2u$, где u – начальное подслово образующего из $\{v^{\pm 1}, w^{\pm 1}\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то и $(yx)^lh_2u \in H$. Очевидно, что элемент $(yx)^lh_2u$ начинается на образующий w и $w = (yx)^lw_{\text{п}}$.

Покажем, что u – начальное подслово образующего w . Действительно, если u – есть подслово образующего v , то v циклически сократимо, если u – есть подслово образующего v^{-1} , то $(xy)^{-1} = xy$, чего не может быть если u – есть подслово образующего w^{-1} , то $w = v_{\text{л}}^{-1}w_{\text{п}}$ и в произведении vw есть сокращения, что противоречит условию (*). Таким образом, $u = (yx)^lw_c$, причем w_c может равняться единице, тогда $w = (yx)^l(xy)^l$ и имеем случай 3) при $p = 0$.

Пусть $w = (yx)^lw_c(xy)^l$ и $w_c \neq 1$.

Пусть $h_2 = 1$, тогда $(yx)^lu = (yx)^l(yx)^lw_c = (yx)^lw_c(xy)^l$, следовательно, $(yx)^lw_c = w_c(xy)^l$ и $w_c = (yx)^my$, [1] тогда $w = (yx)^l(yx)^my(xy)^l = (yx)^{2l+m}y$ – это уже рассмотренный случай 2).

Пусть $h_2 \neq 1$, тогда $(yx)^lh_2u = (yx)^lh_2(yx)^lw_c = \bar{h} \in H$, причем элемент $\bar{h}$ должен начинаться на образующий w . Нетрудно показать, что h_2 должен начинаться на образующий v . Действительно, на v^{-1} и w^{-1} элемент h_2 начинаться не может. Пусть h_2 начинается на $w = (yx)^lw_c(xy)^l$. Тогда $(yx)^lh_2(yx)^lw_c = (yx)^l(yx)^lw_c(xy)^lh_3(yx)^lw_c = (yx)^lw_c(xy)^l\dots$, следовательно $(yx)^lw_c = w_c(xy)^l \Rightarrow w_c = (yx)^sy$ и мы имеем случай 2).

Аналогичным образом можно доказать, что элемент $\bar{h}$ должен заканчиваться на образующий v .

Тогда должны выполняться следующие соотношения

$$\bar{h} = (yx)^lw_c(xy)^l\dots = (yx)^l(xy)^kx\dots \Rightarrow w_c(xy)^l\dots = (xy)^kx\dots \quad (1)$$

$$\bar{h} = \cdots (yx)^l w_c = \cdots (xy)^k x \quad (2)$$

Если $w_c = v^p$, то имеем случай 3), если $w_c = v^p \bar{w}_c$ причем p может равняться нулю. Тогда для слова $\bar{w}_c$ имеем следующие возможности: $\bar{w}_c \in \{x_l, x, xy_l, (xy)^s, (xy)^s x_l\}$. Рассмотрим эти возможности:

1. $\bar{w}_c = x_l$, из соотношения (2) имеем $\bar{w}_c = x_{\Pi}$.

а) пусть $|x_l| < \frac{|x|}{2}$, тогда $\bar{w}_c = x_l = x_{\Pi}$, следовательно, $x = x_l x_c x_l$, теперь из (1) получим $x_l x_l x_c x_l y = x_l x_c x_l y x_l$, и так как $|x_l x_l x_c| = |x_l x_c x_l|$, то $x_l x_l x_c = x_l x_c x_l$ и $x_l y = y x_l$ следовательно, $y = x_l y_{\Pi}$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

б) пусть $|x_l| = \frac{|x|}{2}$, то есть $x = x_l^2$, тогда из (1) получим $x_l x_l x_l y = x_l x_l y x_l$, следовательно, $y = x_l y_{\Pi}$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

в) пусть $|x_l| > \frac{|x|}{2}$, тогда $x_l = \bar{x}\bar{x}$, $x_{\Pi} = \bar{x}\tilde{x}$, тогда $x = \bar{x}\bar{x}\tilde{x}$ и из соотношения (1) получим что $\bar{x}\bar{x}\tilde{x}\tilde{x}y = \bar{x}\tilde{x}\tilde{x}y\bar{x}\bar{x} \Rightarrow \bar{x}\tilde{x}\tilde{x}y = \tilde{x}y\bar{x}\bar{x}$ и так как $|\bar{x}| = |\tilde{x}|$, то $\bar{x} = \tilde{x}$ и $\bar{x}\bar{x} = \tilde{x}\tilde{x}$, но тогда $\bar{x} = c^{\alpha}$, $\bar{x} = c^{\beta}$, $x = c^{2\alpha+\beta}$, $v = (c^{2\alpha+\beta}y)^k c^{2\alpha+\beta}$. [1] Кроме того $y = c^{\alpha}y_{\Pi}$ и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*). Таким образом получаем, что случай $w_c = x_l$ невозможен.

2. $\bar{w}_c = x$. Из (1) получим $xy = yx \Rightarrow xy = yx$, тогда образующий v является истинной степенью, и мы имеем случай 1).

3. $\bar{w}_c = xy_l$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = y_{\Pi}x$, причем $xy_l = y_{\Pi}x$ и $|y_l| = |y_{\Pi}|$. Из (1) получим $xy_l xy = xy xy_l \Rightarrow xy_l y_{\Pi} = y_{\Pi} xy_l$ и так как $xy_l = y_{\Pi}x$, получаем, что $xy_l y_{\Pi} = y_{\Pi} xy_l \Rightarrow y_{\Pi} xy_{\Pi} = y_{\Pi} xy_l \Rightarrow y_{\Pi} = y_l$, но тогда так как элемент x имеет общее начало с элементом $y_{\Pi} = y_l$, получим, что образующие v и w имеют общее начало и в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

4. $\bar{w}_c = (xy)^s, s \leq k$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = (yx)^s \Rightarrow xy = yx$ чего не может быть.

5. $\bar{w}_c = (xy)^s x_l$. Из соотношения (2) получаем, что $\bar{w}_c = x_l (yx)^s$, тогда имеем $\bar{w}_c = x_l x_{\Pi} y \dots x_l x_{\Pi} y x_l = x_{\Pi} y x_l \dots x_l x_{\Pi} y x_l x_{\Pi}$, следовательно $x_l x_{\Pi} y = x_{\Pi} y x_l$ (начало) и $x_{\Pi} y x_l = y x_l x_{\Pi}$ (конец), но тогда $x_l x_{\Pi} y = y x_l x_{\Pi} \Rightarrow xy = yx$ чего не может быть.

Таким образом, для слова w_c есть только три возможности: $w_c = 1$ или $w_c = v^p$, и имеем случай 3), и $w_c = (yx)^m y$ – это случай 2). Все они исключены условием леммы, поэтому здесь $zHz^{-1} \cap H = E$.

II. Элемент h начинается на w , то есть $h = wh_1$.

Тогда элемент $zhz^{-1} = v_l w h_1 v_l^{-1} = h^* \in H$. Так как $h^* \in H$, то h^* должен начинаться на образующий v , иначе получим противоречие условию (*).

Тогда $zhz^{-1} = v_l w h_1 v_l^{-1} = v_l v_{\Pi} \dots$, обозначим $v_l = x, v_{\Pi} = y$, тогда $v = xy, w = yw_{\Pi}$.

Тогда $zhz^{-1} = xyw_{\Pi}h_1x^{-1}$.

Покажем, что $h_1 \neq 1$. Действительно, если $h_1 = 1$, то $zhz^{-1} = xyw_{\Pi}x^{-1} = vw_{\Pi}x^{-1}$, причем $w_{\Pi}x^{-1} \in H$. Если в произведении $w_{\Pi}x^{-1}$ нет сокращений, либо слова w_{Π} и x^{-1} сокращаются не полностью, то тогда по утверждению 1 $w_{\Pi}x^{-1}$ заканчивается на образующий v^{-1} и чего не может быть.

Если в произведении $w_{\Pi}x^{-1}$ одно из слов w_{Π} и x^{-1} сократилось полностью, то тогда если $w_{\Pi}x^{-1} = \bar{x}^{-1}$, то $\bar{x}^{-1} \in H \Leftrightarrow \bar{x}^{-1} = w$, но тогда $x^{-1} = w_{\Pi}^{-1}w$, следовательно $x = w_{\Pi}^{-1}y^{-1}w_{\Pi}$ и в произведении wv будут сокращения;

если $w_{\Pi}x^{-1} = \bar{w}_{\Pi}$, то $\bar{w}_{\Pi} \in H \Leftrightarrow \bar{w}_{\Pi} = v^p$ и $v = xy, w = yv^p x$, имеем рассмотренный случай 4).

если $w_{\Pi}x^{-1} = 1$, то $v = xy, w = yx$, имеем рассмотренный случай 5).

Таким образом, $h_1 \neq 1$ и $zhz^{-1} = xyw_{\Pi}h_1x^{-1} = vw_{\Pi}h_1x^{-1} = h^* \in H$.

А). Пусть в произведении h_1x^{-1} нет сокращений, тогда по утверждению 1 элемент h^* заканчивается на образующий v^{-1} , то есть $vw_{\Pi}h_1x^{-1} = vw_{\Pi}h_2uv^{-1}$, где u – есть подслово

образующих $v^{\pm 1}$ или $w^{\pm 1}$. Рассмотрим элемент $w_{\Pi}h_2u$. Если $zhz^{-1} \in H$, то и $w_{\Pi}h_2u \in H$.

Покажем, что $u = w_{\Pi}^{-1}$. Элемент h_1 может заканчиваться на образующие $v^{\pm 1}$, $w^{\pm 1}$. Рассмотрим эти варианты.

Пусть $h_1 = h_2v$, тогда $w_{\Pi}h_2uv^{-1} = w_{\Pi}h_2xyx^{-1} = w_{\Pi} \dots y^{-1}x^{-1}$, следовательно, $y^{-1} = y$, чего не может быть.

Пусть $h_1 = h_2v^{-1}$, тогда $w_{\Pi}h_2uv^{-1} = w_{\Pi}h_2y^{-1}x^{-1}x^{-1} = \dots y^{-1}x^{-1}$, отсюда $y^{-1} = \bar{y}^{-1}x^{-1}$, так как $|y| \geq |x|$. Получаем, что $y = x\bar{y}$, следовательно, $v = xy = x^2\bar{y}$, $w = x\bar{y}w_{\Pi}$, но тогда в произведении $v^{-1}w$ есть сокращения, что противоречит условию (*).

Пусть $h_1 = h_2w$, тогда $w_{\Pi}h_2uv^{-1} = w_{\Pi}h_2yw_{\Pi}x^{-1} = \dots y^{-1}x^{-1}$, отсюда следует, что w циклически сократимо, что противоречит условию (*). Таким образом $h_1 = h_2w^{-1}$, $u = w_{\Pi}^{-1}$ и $w_{\Pi}h_2u = w_{\Pi}h_2w_{\Pi}^{-1}$. Очевидно, что $h_2 \neq 1$.

Рассмотрим элемент $zhz^{-1} = xyw_{\Pi}h_1x^{-1} = vw_{\Pi}h_1x^{-1} = vw_{\Pi}h_2uv^{-1} = vw_{\Pi}h_2w_{\Pi}^{-1}v^{-1} \in H$, тогда $w_{\Pi}h_2w_{\Pi}^{-1} \in H$, причем $|h| > |h_1| > |h_2|$, и в произведениях $w_{\Pi}h_2$ и $h_2w_{\Pi}^{-1}$ нет сокращений, тогда рассуждая аналогичным образом, получим что $zhz^{-1} = u_1u_2 \dots u_k \tilde{x}u^l \tilde{x}^{-1}u_k^{-1} \dots u_2^{-1}u_1^{-1}$, где $u_1, u_2, \dots, u_k, u \in \{v^{\varepsilon}, w^{\delta}\}$, $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$, $\tilde{x}$ подслово одного из образующих $v^{\varepsilon}, w^{\delta}$, $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

Если $zhz^{-1} \in H$, то так как $u_1u_2 \dots u_k \in H$, то элемент $\tilde{x}u^l \tilde{x}^{-1}$ тоже должен принадлежать подгруппе H . Но тогда по утверждению 2 $\tilde{x}u^l \tilde{x}^{-1} \notin H$, следовательно, и $zhz^{-1} \notin H$.

Б) пусть в произведении h_1x^{-1} есть сокращения, тогда по следствию утверждения 1 элемент x^{-1} сокращается полностью. Тогда $vw_{\Pi}h_1x^{-1} = vw_{\Pi}h_2u$, где u – есть подслово образующих $v^{\pm 1}$ или $w^{\pm 1}$. Нетрудно показать, что u – есть начальное подслово образующего w , то есть $u = yw_c$, тогда $w = yw_cx$. Если $w_c = 1$, или $w_c = v^p$, то имеем случай 5) или 4) соответственно.

Пусть $w_c \neq 1$, тогда $w_{\Pi}h_2u = w_{\Pi}h_2yw_c = w_cxh_2yw_c$ и $w_cxh_2yw_c$ должно принадлежать подгруппе H .

Пусть $w_cxh_2yw_c = \tilde{h} \in H$. Тогда $|\tilde{h}| = |h_2| + 2|w_c| + |x| + |y|$. Возможны следующие случаи: $|\tilde{h}| = |h_2| + |w| + |w_c|$ или $|\tilde{h}| = |h_2| + |v| + 2|w_c|$.

Так как $\tilde{h} \in H$, то тогда $\tilde{h} = v^{\alpha_1'} w^{\beta_1'} \dots v^{\alpha_{\kappa}'} w^{\beta_{\kappa}'} s$, причем $v^{\alpha_1'}$ и $w^{\beta_{\kappa}'}$ могут быть равными и единице, и $v^{\alpha_1'} w^{\beta_1'} \dots v^{\alpha_{\kappa}'} w^{\beta_{\kappa}'} \in H$, кроме того выполняется условие $|s| = |w_c|$ или $|s| = 2|w_c|$. Так как $\tilde{h} \in H$, то элемент s должен переписываться в образующих $v^{\varepsilon}, w^{\delta}$. Причем, если $|s| = |w_c|$, $s = w_c$.

Рассмотрим эти случаи.

$s = w_c$, тогда $s \in H$ тогда и только тогда, когда $s = v^p$, $p \geq 1$, а это случай 4).

Пусть $|s| = 2|w_c|$.

Тогда, либо $s = v^p$, либо $s = w$, либо $s = v^p w$, либо $s = wv^p$.

Пусть $s = v^p$. $2|w_c| = (|x| + |y|)^p$, $p \geq 1$.

Пусть $p = 1$, тогда $2|w_c| = |x| + |y|$ и так как по условию (**) $|x| \leq |y|$, то $|x| \leq |w_c| \leq |y|$, следовательно, $s = y_{\Pi}w_c$, $y = y_{\Pi}y_{\Pi}$ и $|w_c| = |y_{\Pi}|$. Очевидно, что $s = y_{\Pi}w_c = v = xy$. Отсюда получаем, что $y_{\Pi}w_c = xy_{\Pi}y_{\Pi}$, следовательно, $w_c = y_{\Pi}$ и $xy_{\Pi} = y_{\Pi}$ и имеем, что $w_c = xy_{\Pi}$, тогда $w = yw_cx = (y_{\Pi}x)^3$, $v = (xy_{\Pi})^2$, то есть имеет место случай 5).

Пусть $p > 1$, если $p = 2q$, то $2|w_c| = 2q(|x| + |y|) \Rightarrow |w_c| = q(|x| + |y|)$, тогда $w_c = v^q$, что сводится к случаю 4).

Пусть $p = 2q + 1$, тогда $s = uw_c = (xy)^{2q+1}$, причем $|u| = |w_c|$. Тогда $w_c = y(xy)^q$, либо $w_c = y_{\Pi}(xy)^q$. Если $w_c = y(xy)^q$, то $|x| = |y|$, и так как $\tilde{h} = w_cxh_2yw_c$, то $x = y$, чего не может быть. Пусть $|x| < |y|$, тогда $w_c = y_{\Pi}(xy)^q$, причем $|y_{\Pi}| = |xy_{\Pi}|$, тогда $s = \bar{u}y_{\Pi}(xy)^q = \bar{u}y_{\Pi}v^q$, где $u = \bar{u}y$, и рассмотрим элемент $s_1 = \bar{u}y_{\Pi}$. Очевидно, что он не может заканчиваться на v^{-1} и w^{-1} . На w он тоже заканчиваться не может, так как тогда слова v и w имели бы общий конец y_{Π} , что противоречит условию (*). Пусть s_1 заканчивается на v , тогда так как $|y_{\Pi}| = |xy_{\Pi}|$, то имеем $y_{\Pi} = xy_{\Pi} \Rightarrow y = y_{\Pi}xy_{\Pi}$, $w_c = xy_{\Pi}(xy_{\Pi}xy_{\Pi})^q$ и $w = y_{\Pi}xy_{\Pi}xy_{\Pi}(xy_{\Pi}xy_{\Pi})^q x = (y_{\Pi}x)^{q_1}$, $v = (xy_{\Pi})^2$ и опять имеем случай 4).

Пусть $\tilde{h} = w_cxh_2yw_c = v^{\alpha_1'} w^{\beta_1'} \dots v^{\alpha_{\kappa}'} w^{\beta_{\kappa}'} s$ и $s = w$. Тогда либо $s = xyw_c = yw_cx = w$, либо $s = y_{\Pi}yw_c = yw_cx = w$.

Пусть $s = xyw_c = yw_cx$, следовательно, $x = c^\alpha$, $yw_c = c^\beta$ [1] образующие v и w имеют общее начало, что противоречит условию (*).

Пусть $s = y_{\Pi}yw_c = yw_cx$, тогда $y_{\Pi}yw_c = yw_cx \Rightarrow y_{\Pi}y_{\Pi}y_{\Pi}w_c = y_{\Pi}y_{\Pi}w_cx$, причем $|y_{\Pi}| = |x|$. Тогда, так как $y_{\Pi}y_{\Pi} = y_{\Pi}y_{\Pi}$, то $y_{\Pi} = c^\alpha$, $y_{\Pi} = c^\beta$ и $y = c^{\alpha+\beta}$. [1]

Тогда $c^{\alpha+\beta}c^\beta w_c = c^{\alpha+\beta}w_cx \Rightarrow c^\beta w_c = w_cx$, но тогда $c^\beta = (rd)^\gamma$, $x = (dr)^\gamma$, $w_c = (rd)^\delta s$ и $w = (rd)^\mu s$, $v = (ds)^\gamma (sd)^\gamma$, [1] а есть случай 3) с точностью до перестановки образующих. Следовательно, не только $s \neq w$, но и элемент s оканчиваться на образующий w не может, таким образом, случай $s = v^p w$ тоже невозможен.

Пусть $s = wv^p$, тогда $s = ww_c = w(xy)^p = yw_cx(xy)^p = \dots yw_c$, причём $|ww_c| = 2|w_c|$, следовательно, $|yw_cx(xy)^p| = 2|w_c| \Rightarrow |(xy)^{p+1}| = |w_c|$. Тогда, так как $yw_cx(xy)^p = \dots yw_c$, то $w_c = \bar{w}_c x(xy)^p$, причем $|\bar{w}_c| = |y|$. Следовательно, $yw_cx(xy)^p = y\bar{w}_c x(xy)^p x(xy)^p = \dots y\bar{w}_c x(xy)^p$, и так как $|\bar{w}_c| = |y|$, то $y = \bar{w}_c$, тогда $y\bar{w}_c x(xy)^{p-1}x = \dots y$, таким образом, $y_{\Pi} = x$, и образующие v и w имеют общий конец, что противоречит условию (*).

Таким образом, кроме случаев, исключенных условием, $zHz^{-1} \cap H = E$.

□

Из доказательства лемм 2-3 следует.

ТЕОРЕМА. Пусть $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ свободная группа, $H = \langle v, w \rangle$ ее подгруппа, порожденная образующими v, w , где $v = v(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Пусть v, w - образующие подгруппы $H = \langle v, w \rangle$ свободной группы удовлетворяют условию (*), а элемент z - условию (**), то подгруппа H не является антинормальной в F тогда и только тогда, когда

- 1). $v = u^k, w = w(a_1, a_2, \dots, a_n)$ - произвольное слово от образующих $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ удовлетворяющее условию (*), $z = u^l, 2l \leq k$;
- 2). $v = (xy)^k x, w = (yx)^p y$, то есть $vw = (xy)^{k+p+1} = u^s, z = (xy)^l, 2l \leq k$;
- 3). $v = (xy)^k x, w = (yx)^l v^p (xy)^l, z = (xy)^l, 2l \leq k$;
- 4). $v = xy, w = yv^p x, z = x$;
- 5). $v = (xy)^k, w = (yx)^p, z = x, p \geq 1, k \geq 1$;

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Линдон, Р., Шупп, П. Комбинаторная теория групп // М.: Мир. 1980.
2. Fine, B., Myasnikov, A., Rosenberger, G. Malnormal subgroups of free groups // Communication in Algebra. 2002. Vol. 30. No. 9. P. 4155-4164.
3. Безверхний, В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в одном классе групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула, 1991. С. 4-38.
4. Безверхний, В.Н., Безверхняя, Н.Б. О гиперболичности некоторых групп с одним определяющим соотношением // Чебышевский сборник. Труды IV межд. конф. Совр. проблемы теории чисел и ее приложения. 2001. Т. 2. С. 5-13.
5. Bezverkhni, V.N., Bezverkhniya, N.B. Generalization of one theorem of Newman // International conference "Process management and scientific development". Birmingham, United Kingdom, 2020. С. 199-209.
6. Baumslag, G., Myasnikov, A., Remeslennikov, V. Malnormality is decidable in free groups // International Journal of Algebra and Computation. 1999. Vol. 09. No. 06.
7. Безверхний, В.Н. О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. 1974. Вып. 2. С. 51-56.

REFERENCES

1. Lyndon, R., Shupp, P. 1980, "Combinatorial theory of groups", *Moscow: Mir*.
2. Fine, B., Myasnikov, A., Rosenberger, G. 2002, "Malnormal subgroups of free groups", *Communication in Algebra*, vol. 30, no. 9, pp. 4155-4164.
3. Bezverkhny, V.N. 1991, "Solving the problem of conjugacy of words in one class of groups", *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups*, pp. 4-38.
4. Bezverkhny, V.N., Bezverkhnyaya, N.B. 2001, "On the hyperbolicity of some groups with one defining relation", *Chebyshev collection. Proceedings of the IV International Conference. Modern problems of number theory and its applications*, vol. 2, pp. 5-13.
5. Bezverkhniy, V.N., Bezverkhniaia, N.B. 2020, "Generalization of one theorem of Newman", *International conference «Process management and scientific development»*, Birmingham, United Kingdom, pp. 199-209.
6. Baumslag, G., Myasnikov, A., Remeslennikov, V. 1999, "Malnormality is decidable in free groups", *International Journal of Algebra and Computation*, vol. 09, no. 06.
7. Bezverkhny, V.N. 1974, "On the intersection of finitely generated subgroups of a free group", *Collection of scientific papers of the Department of Higher Mathematics*, issue 2, pp. 51-56.

Получено: 23.08.2024

Принято в печать: 26.12.2024