ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-32-44

О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением

В. Н. Безверхний, Н. Б. Безверхняя

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, Российская таможенная академия (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Безверхняя Наталия Борисовна — кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики (г. Москва).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Аннотация

В статье решена проблема степенной сопряженности слов в классе малосократимых групп.

Ключевые слова: малосократимые группы, проблема степенной сопряженности.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
Безверхний, Х.Н., Безверхняя, Н.Б. О степенной сопряженности слов в группах с малым сокращением // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 32–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 511.32 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-32-44

On the degree conjugacy of words in groups with small reduction

V. N. Bezverkhnii, N. B. Bezverhnaya

Bezverkhnii Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Russian Customs Academy (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Bezverhnaya Natalia Borisovna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow Technical University of Communication and Informatics (Moscow).
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Abstract

This paper solves the problem of degree conjugacy of words in a class of sparsely contractible groups.

Keywords: small-sized groups, the problem of degree conjugacy.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
Bezverkhnii, V.N., Bezverhnaya, N.B. 2024, “On the degree conjugacy of words in groups with small reduction” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 32–44.

1. Введение

Одним из крупнейших результатов математики является доказательство П.С. Новиковым неразрешимости проблем равенства и сопряженности слов в классе конечноопределенных групп. Естественно, возникает идея о поиске классов групп, в которых эти проблемы алгоритмически разрешимы [1], [2].

М. Д. Гриндлингером был определен метрический класс групп с малым сокращением и решены в нем основные алгоритмические проблемы. [3].

Р. Линдоном был определен класс малосократимых групп [4], а именно, группы с условием $C(4)\&T(4)$, $C(6)\&T(3)$, $C(3)\&T(6)$, которые будут обозначены как группы с условием $C(p)\&T(q)$.

В данном классе групп Линдоном была доказана.

Теорема 1. [4]. В группах с условием $C(p)\&T(q)$ разрешима проблема равенства слов.

П. Шупп, используя метод диаграмм, определенный Р. Линдоном, ввел понятие кольцевых диаграмм и доказал следующую теорему.

Теорема 2. [5]. В группах с условием $C(p)\&T(q)$ разрешима проблема сопряженности слов.

В статье [7] В. Н. Безверхним было введено понятие специального сокращения, определенного для типа групп $C(p)\&T(q)$, что позволило значительно упростить решение проблем равенства и сопряженности слов для этих групп. Данный метод позволил также решить другие алгоритмические проблемы, в частности:

- проблему обобщенной сопряженности слов для групп $C(p)\&T(q)$ [8];
- доказать конечнопорожденность централизатора конечнопорожденной подгруппы H, $H < G$, где G есть подгруппа с условием $C(p)\&T(q)$ и определен алгоритм, выписывающий его образующие [8].

Основной целью данной статьи является решение проблемы степенной сопряженности слов в группах с условием $C(4)\&T(4)$.

Определение 1. Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов $v, w \in G$ установить, существуют ли числа $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^m$.

Очевидно, что рассматриваемая проблема является обобщением проблемы сопряженности слов.

Пусть группа G имеет копредставление: $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n; r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$.

Множество определяющих соотношений $\mathscr{R} = \left\{ r_i \mid i = \overline{1, m} \right\}$ является симметризованным множеством, если каждое $r_i \in \mathscr{R}$ циклически несократимо, и из того, что $r_i \in \mathscr{R}$ следует, что $r_i^{-1} \in \mathscr{R}$, и каждая циклическая перестановка $r_i \in \mathscr{R}$ тоже принадлежит $\mathscr{R}$.

Определение 2. Пусть $r_i = r_{i\text{л}} f, r_j = r_{j\text{л}} f$, где $r_i, r_j \in \mathscr{R}$, тогда общее слово f будем называть куском определяющих соотношений r_i, r_j.

Определение 3. [6]. Будем говорить, что множество определяющих соотношений $\mathscr{R}$ обладает свойством $C(p)$, $(C(4))$ если любое из соотношений $r_i \in \mathscr{R}$ нельзя представить в виде произведения менее чем p кусков $(p = 4)$.

Определение 4. [6]. Множество $\mathscr{R}$ удовлетворяет условию $T(q), (T(4))$ если для любых $r_1, r_2, \ldots, r_h$, где $3 \leq h < q$, таких, что последовательные элементы $r_i, r_{i+1}, 1 \leq i < h$ не являются взаимно обратными, следует, что в последовательности $r_1 r_2, r_2 r_3, \ldots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$ хотя бы одно из слов приводимо.

Из теоремы ван Кампена [6] следует, что $\forall w \in G$ не равного единице в свободной группе F и равного единице в группе G, что существует диаграмма M над $\mathscr{R}$, граничная метка которой есть слово w, то есть $\varphi(\partial M) = w$, где ∂M - граничный цикл диаграммы M, φ - функция, ставящая каждому ребру l карты M слово $\varphi(l)$ из F, и $\varphi(l)$ - кусок соотношения из $\mathscr{R}$.

Обозначим через $d(v)$ - степень вершины $v \in M$, то есть число ребер, инцидентных v. Из условия $T(4)$ следует, что степень внутренней вершины $v \in M, d(v) \geq 4$ [6].

Через $d(D)$ обозначим число ребер области $D, D \in M$ и так как группа G удовлетворяет условию $C(4)$, то $d(D) \geq 4, \forall D \in M$.

Через $i(D)$ обозначим число внутренних ребер граничной области D, то есть области с $\partial D \cap \partial M \neq \varnothing$. Причем $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть граничного цикла ∂M[6, С. 332].

Пусть $\gamma \subset \partial M$, где $\gamma = e_1 \dots e_s$, причем каждое ребро $e_i, i = \overline{1, s}$, принадлежит граничному циклу некоторой области $D \subset M$, тогда метка пути γ, $\varphi(\gamma) = \varphi(e_1) \dots \varphi(e_i) \dots \varphi(e_s)$, где $\varphi(e_i)$, $\quad i = \overline{1, s}$, является граничной меткой ребра области D, то есть кусок некоторого определяющего отношения $r \in \mathscr{R}$.

Обозначим через $\|\varphi(\gamma)\| = s$ число кусков, на которые граничные области разбивают путь γ.

Определение 5. Будем говорить, что слово $w = \varphi(\partial M)$ R — сократимо, если существует граничная область $D \subset M$, такая что $\|\varphi(\partial D \cap \partial M)\| > i(D)$.

Определение 6. Граничную область D назовем деновской, если $i(D) \leq 1$.

Определение 7. Пусть D область диаграммы M, удовлетворяющая определению 5 или 6 , тогда удаление пути $\partial D \cap \partial M$ назовем R-сокращением диаграммы M.

Очевидно, что R-сокращению диаграммы M соответствует сокращение слова $\varphi(\partial M) = w$, то есть замена слова $w = w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2$ равным ему в G словом $w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M))w_2$, длина которого меньше длины слова:

$$w : \|w_1\varphi(\partial D \cap \partial M)w_2\| > \|w_1\varphi(\partial D \backslash (\partial D \cap \partial M))w_2\|.$$

Определение 8. Пусть $w \in G$, если любая циклическая перестановка слова w не является R-сократимым словом, то будем говорить, что слово w циклически R-несократимо или R^{**}-несократимо.

Определение 9. [7]. Поддиаграмма $\Pi = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ диаграммы M над группой с условием $C(4)\&T(4)$ называется специальной полосой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. Множество $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \partial D_j\right) \cap \partial M, 1 \leq j \leq n$, связно и является последовательной частью ∂M;
2. $i(D_1) = i(D_n) = 2$;
3. $i(D_j) = 3, 2 \leq j \leq n-1$;
4. $\partial D_j \cap \partial D_{j+1} = e_j-$ ребро, $1 \leq j \leq n-1$;
5. $\partial D_j \cap \partial D_i = \varnothing$, при $|i - j| > 1$.

Лемма 1. [7]. Если связная, односвязная диаграмма M над $\mathscr{R}$, где $\mathscr{R}$ симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(4)\&T(4)$ и не является R-сократимой, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.

Пусть Π - специальная полоса диаграммы M, тогда число кусков в $\partial\Pi \cap \partial M$ равно $\|\varphi(\partial\Pi \cap \partial M)\|$,

Определение 10. Так как $\|\partial\Pi \cap \partial M\| > \|\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \cap \partial M)\|$, то замену слова $\varphi(\partial M) = w_1\varphi(\partial\Pi \cap \cap \partial M)w_2$ словом $w_1\varphi(\partial\Pi \backslash (\partial\Pi \cap \partial M))w_2$ назовем R^* сокращением слова w.

Для связных односвязных M-диаграмм над $\mathscr{R}$ - симметризованным множеством, удовлетворяющее условию $C(4)\&T(4)$, граничные области которого удовлетворяют неравенству [6], [7].

$$\sum_{M}^{*}(3 - i(D)) \geq 4. \tag{1}$$

Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в G. Тогда существует кольцевая $\mathscr{R}$ -диаграмма M с граничными циклами γ, δ, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w, \varphi(\delta) = v$ и $\alpha-$ минимальный путь, соединяющий вершины $O \in \gamma$ и $O' \in \delta$ такой, что $\varphi(\alpha) = z; z$ сопрягает слова w, v, то есть $zwz^{-1} = v$.

Рассмотрим следующий тип преобразований слова $w, w \in G$

Пусть M кольцевая диаграмма с граничными циклами γ, δ, и пусть $\varphi(\gamma) = w^n, \varphi(\delta) = v^m$, где n, $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, w и v циклически R, R^* и R^{**} не сократимы. Пусть, однако, в произведении ...ww... есть R^*-сокращения. Следовательно, в диаграмме M есть специальная полоса $\Pi = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$, причем $\varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_J\right) \cap \partial M\right) = w^*$, где w^* - циклическая перестановка слова w и $\|w\| = \|w^*\|$, иначе слово w будет циклически R^{**} сократимым.

Определение 11. R_c-сокращением назовем преобразование диаграммы M, состоящее в замене $\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_J\right) \cap \partial M$ на $e_0\gamma_1 e_{n-1}$, см. рис. 1.

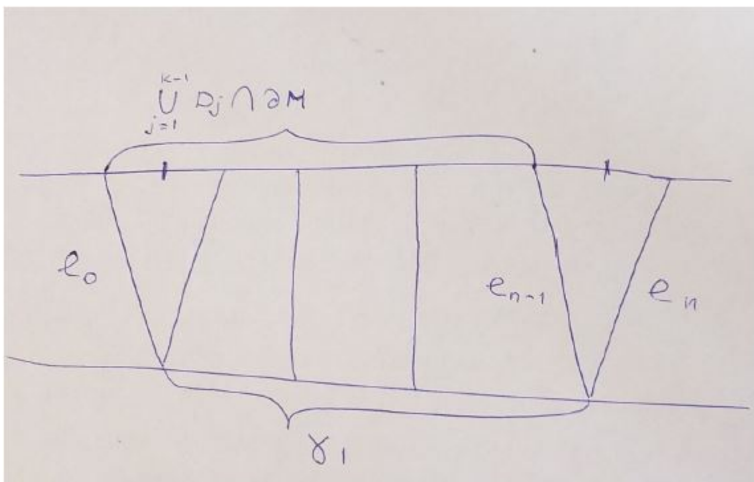

Рис.1

Отметим, что $\varphi\left(e_0\right) = \varphi\left(e_{n-1}\right)^{-1}$, так как $D_1 = D_n$ и:

$$\varphi\left(\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} D_j\right) \cap \partial M\right) = \varphi\left(e_0\right)\varphi\left(\gamma_1\right)\varphi\left(e_0\right)^{-1}.$$

Следовательно слово w^n заменится на более короткое слово $\left(\varphi\left(\gamma_1\right)\right)^n$.

Лемма 2. [7]. Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в группе G с условием $C(4)\&T(4)$ и M-кольцевая диаграмма сопряженности слов w, v с граничными циклами γ и δ, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда

$$\sum_{M}^{*}(3 - i(D)) = \sum_{\gamma}^{*}(3 - i(D)) + \sum_{\delta}^{*}(3 - i(D)) \geq 0 \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем граничным областям диаграммы M.

Лемма 3. Пусть слова $w, v \in G$ сопряжены в группе G с условием $C(4)\&T(4)$ и M - кольцевая диаграмма сопряженности слов w, v с граничными циклами γ и δ, метки которых есть $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$. Тогда если слова w, v являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми, то

$$\sum_{\gamma}^{*}(3 - i(D)) = \sum_{\delta}^{*}(3 - i(D)) = 0 \tag{3}$$

Доказательство. Докажем, что $\sum_{\gamma}^{*}(3-i(D))=0$. Равенство $\sum_{\delta}^{*}(3-i(D))=0$ доказывается аналогично.

Отметим, положительный вклад в сумму $\sum_{\gamma}^{*}(3-i(D))$ дают только области с $i(D)=2$. По условию слова w,v являются R,R^{*}, R^{**} и R_{c} -несократимыми, следовательно, областей с $i(D)=1$ или $i(D)=0$ быть не может.

Теперь, если в диаграмме M имеется область с $i(D)>4$, граничащая с γ, (или с δ) и если $\sum_{\gamma}^{*}(3-i(D))<0$, тогда по соотношению (2), $\sum_{\delta}^{*}(3-i(D))>0$. Отсюда следует, что в диаграмме M число областей, граничащих с δ и имеющих внутреннюю степень $i(D)=2$, по меньшей мере на одну больше чем, число областей, дающих отрицательный вклад в $\sum_{\delta}^{*}(3-i(D))$. Но тогда в диаграмме M существует полоса - противоречие с тем, что v является R^{*}-несократимым.

Пусть число областей, граничащих в диаграмме M с γ и имеющих $i(D)=4$ равно m_{1}, а число областей имеющих $i(D)=2$ равно k_{1}. Аналогично, число областей граничащих в диаграмме M с δ и имеющих внутреннюю степень $i(D)=4$ равно m_{2}, а число областей имеющих $i(D)=2$ равно k_{2}. Тогда

$$\sum_{\gamma}^{*}(3-i(D))=k_{1}-m_{1},\quad \sum_{\delta}^{*}(3-i(D))=k_{2}-m_{2} \tag{4}$$

Если $k_{1}-m_{1}\geq 1$, то $k_{1}\geq m_{1}+1$, однако в этом случае слово $\varphi(\gamma)=w$ является R^{*} сократимым, так как в этом случае в диаграмме M имеется полоса, граничная с γ.

Если же $m_{1}-k_{1}\geq 1$, то согласно неравенству (2) $k_{2}-m_{2}\geq 1$, и в диаграмме M имеется полоса, граничная уже с δ, что приводит к противоречию с тем, что слово v является R^{*}-несократимым. Поэтому $m_{1}=k_{1}u\quad k_{2}=m_{2}$.

□

Определение 12. Диаграмма M называется однослойной, если $\forall D,D\in M$, с граничными циклами γ и δ, $\partial D\cap\gamma\neq\varnothing$, $\partial D\cap\delta\neq\varnothing$ и любые две соседние области пересекаются по ребру, то есть $D_{i}\cap D_{i+1}=e_{i}$.

Лемма 4. Пусть слова w, $v\in G$ сопряжены в группе G с условием $C(4)\&T(4)$ и M-однослойная кольцевая диаграмма сопряженности слов w, v с граничннми циклами γ и δ, причем $\varphi(\gamma)=w$ и $\varphi(\delta)=v$. Слова w,v являются R,R^{*},R^{**} и R_{c}-несократимыми. Тогда число областей с $i(D)=2$ в диаграмме M вдоль границ γ и δ одинаково, число областей с $i(D)=4$ одинаково и $\|w\|=\|v\|$.

Доказательство. Пусть слова w,v удовлетворяют условиям леммы. Пусть M-однослойная кольцевая диаграмма сопряженности слов w,v с граничными циклами γ и δ, где $\varphi(\gamma)=w$ и $\varphi(\delta)=v$. Из доказательства леммы 3 следует, что число областей в диаграмме M вдоль границы γ с $i(D)=2$ и с $i(D)=4$ - одинаково, и пусть их будет k_{1},m_{1}, соответственно, тогда $k_{1}=m_{1}$. Аналогично, число областей с $i(D)=2$ и с $i(D)=4$ вдоль границы δ соответственно равно $k_{2},m_{2},k_{2}=m_{2}$.

Покажем, что в кольцевых однослойных диаграммах $k_{1}=m_{1}=k_{2}=m_{2}$. Выделим вдоль границы γ все области с $i(D)=2$. Очевидно, что вдоль границы δ каждая такая область имеет $i(D)=4$. С другой стороны, вдоль границы δ выделим все области с $i(D)=2$. Очевидно, что вдоль границы γ каждая такая область имеет $i(D)=4$. Отсюда следует, что сумма слагаемых $3-i(D)$ по этим областям равна нулю. Если допустить, что существует область D_{0}, имеющая вдоль одной из границ $i\left(D_{0}\right)\geq 4$, то так как диаграмма M вдоль этой границы не имеет областей с $i(D)=2$, кроме выделенных, то D_{0} будет иметь $i\left(D_{0}\right)\geq 3$ вдоль другой границы диаграммы M. Тогда сумма $\sum_{M}^{*}(3-i(D))$ будет отрицательной. Поэтому, всякая область D_{0} кроме выделенных, вдоль каждой из границ γ и δ будет иметь $i\left(D_{0}\right)=3$. Тогда. Получаем, что $k_{1}=m_{2},m_{1}=k_{2}$. Из леммы 3 следует, что $k_{1}=m_{1}=k_{2}=m_{2}$ и $\|w\|=\|v\|$.

□

Лемма 5. Пусть слова $w,v\in G$ с условием $C(4)\&T(4)$, являются R,R^{*},R^{**} и R_{c}-несократимыми. Пусть существуют число $n\in\mathbb{Z}$ и $z\in G$, такие что $z^{-1}w^{n}z=v^{n}$ и диаграмма степенной сопряженности слов w^n, v^n-однослойная, тогда $\|w\| = \|v\|$.

Доказательство. Обозначим $a = w^n$, $b = v^m$. Очевидно, что слова a и b являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми. Следовательно, по лемме 4 имеем $\|a\| = \|b\|$. Пусть γ и δ граничные циклы диаграммы сопряженности слов a и b, $\varphi(\gamma) = a$ и $\varphi(\delta) = b$. Тогда $\|a\| = n\|w\| = \|b\| = n\|v\|$. Отсюда следует, что $\|w\| = \|v\|$.

Определение 13. [7]. Кольцевая диаграмма M с граничными циклами γ и δ называется n - слойной, если она образована однослойными кольцевыми диаграммами $K_i, 0 \le i \le n$, где γ_i, γ_{i+1} - граничные циклы K_i и $\gamma_i \cap \gamma_{i+1} = \varnothing$; K_i, K_{i+1} имеют общий граничный цикл γ_{i+1} причем $\gamma_0 = \gamma, \delta_0 = \delta$.

Определение 14. [7]. Кольцевая диаграмма M с граничными метками γ и δ называется $c{-}n{-}$слойной, если при удалении всех однослойных циклических диаграмм $K_j, 0 \le j \le n$, получаем кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$, такую что любые две последовательные диаграммы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$ соединены простым путем, возможно равным нулю.

Лемма 6. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$, являются R, R^*, R^{**}-несократимыми, и M - диаграмма равенства слов w, v над G. Пусть $\partial M = \gamma\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда любая внутренняя область имеет $d(D) = 4$.

Доказательство. Пусть M связная и односвязная диаграмма с $M = \gamma\delta$, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$. Пусть A и B, соответственно начальная и конечная вершина путей γ и δ, см. рис. 2.

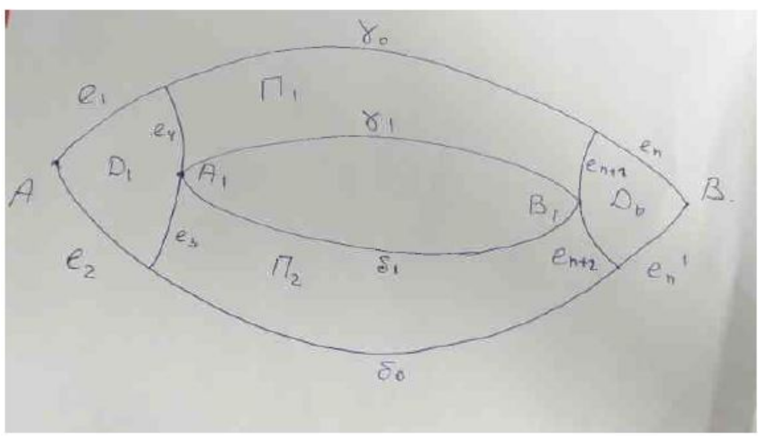

Рис.2

Пусть область $D_1, D_1 \in M$ содержит вершину A, а область D_n, $D_n \in M$ содержит вершину B; где $\partial D_1 \cap \gamma = e_1$, $\partial D_1 \cap \delta = e_2$, $\partial D_1 = e_1 e_2 e_3 e_4$; $\partial D_n \cap \gamma = e_n$, $\partial D_n \cap \delta = e'_n$, $\partial D_n = e'_n e_n e_{n+1} e_{n+2}$; причем $\|e_3 e_4\| = \|e_{n+1} e_{n+2}\| = 2$. [7]. Отметим, что $\gamma = e_1 \gamma_0 e_n$ и $\delta = e_2 \delta_0 e'_n$.

Пусть $A_1 = e_3 \cap e_4, B_1 = e_{n+1} \cap e_{n+2}$ и γ_1 есть путь, соединяющий A_1 с B_1. Выделим поддиаграмму $\Pi_1 = e_4 \gamma_1 e_{n+1} \gamma_0$ диаграммы M, которая содержит области, пересекающиеся как с γ_0 так и с γ_1. Аналогично, рассматриваем путь $\delta_1 \subset M$, соединяющий A_1 с B_1 и поддиаграмму $\Pi_2 = e_3 \delta_0 e_{n+2} \delta_1$, которая является однослойной. Если удалить из диаграммы M поддиаграммы Π_1 и Π_2 получим поддиаграмму M' с граничными путями $\gamma_1, \delta_1; \partial M' = \gamma_1 \delta_1$ с выделенными областями D'_1, D'_n, где D'_1 содержит вершину $A_1, D_n{}'$ содержит вершину B_1. Рассмотрим структуру граничного слоя диаграммы M'. Из неравенства (1) следует, что $\sum^*_{M'}(3 - i(D)) \ge 4$, причем области $D'_1, D_n{}'$ дают вклад в эту сумму каждая по единице. Если граничный слой диаграммы M' содержит область с $i(D) \ge 5$, то тогда граничный слой γ содержит не менее трех областей с $i(D) = 2$, минимум две из которых разделены только областями с $i(D) = 3$, то есть выделяется полоса, чего не может быть. Таким образом, граничный слой диаграммы M' содержит кроме областей с $i(D) = 3$, только области с $i(D) = 2$, и, возможно, области с $i(D) = 4$, причем последних должно быть на одну меньше, чем областей с $i(D) = 2$. Так как слова $w, v - R, R^*, R^{**}$ несократимы, то области с $i(D) = 2$ и области с $i(D) = 4$ должны чередоваться, следовательно, вдоль граничного цикла γ_1 число областей с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$. Аналогично вдоль граничичного цикла δ_1 число областей с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$.

Дальнейшее доказательство проведем индукцией по числу слоев в диаграмме M'. Предположим, что существует D_0 внутренняя область диаграммы M, с $d(D_0) \geq 5$, тогда $D_0 \in M'$. Пусть диаграмма M' однослойна, тогда легко убедиться, что-либо $\varphi(\gamma)$, либо $\varphi(\delta)$ будут R^*-сократимыми, что противоречит условию.

Допустим, что у любой поддиаграммы диаграммы M с числом слоев $k < n$, любая область имеет $d(D) = 4$. Пусть диаграмма M' имеет n слоев. По индуктивному предположению область D_0 может быть только граничной областью диаграммы M' и допустим, что $\partial D_0 \cap \gamma_1 \neq \varnothing$. Причем $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{0, 1, 2\}$. Рассмотрим следующие случаи:

1) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 2$ тогда $i(D_0) \geq 3$, и пусть $D', \partial D' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, некоторая область с $i(D') = 2$, причем между областями D' и D_0 содержатся только области D с $i(D) = 3$ и $\|\partial D \cap \gamma_1\|$ – ребро. Тогда областям D' и D_0 вдоль граничного цикла γ диаграммы M соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}_0$ см. рис. 3, которые ограничивают полосу. Получили противоречие.

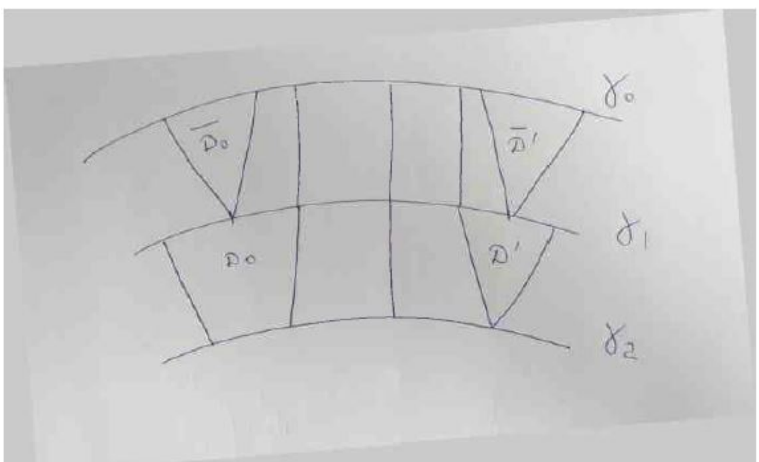

Рис.3

2) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 1$ тогда $i(D_0) \geq 4$. Тогда в диаграмме M' существуют две области $D', \partial D' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$ и $D'', \partial D'' \cap \gamma_1 \neq \varnothing$, с $i(D') = i(D'') = 2$, разделенные кроме области D_0, только областями D с $i(D) = 3$. И так как областям D с $i(D) = 3$ в диаграмме M' соответствуют только области с $i(D) = 3$ диаграммы M, то областям D' и D'' в диаграмме M соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ такие же, как и в случае 1).

3) Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma\| = 0$, то есть $\partial D_0 \cap \gamma$ есть некоторая вершина, тогда $i(D_0) \geq 5$, что невозможно, так как вдоль границы γ в M выделяется полоса.

□

Лемма 7. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми. Пусть диаграмма M - кольцевая диаграмма сопряженности слов w, v, с граничными циклами γ и δ, где $\varphi(\gamma) = w$ и $\varphi(\delta) = v$, тогда любая внутренняя область диаграммы M имеет $d(D) = 4$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что число областей в диаграмме M вдоль границ γ и δ с $i(D) = 2$ и с $i(D) = 4$ - одинаково.

Пусть диаграмма M является n-слойной диаграммой сопряженности, и пусть область $D_0, D_0 \in M$ является ее внутренней областью с $i(D_0) = 5$.

Пусть $K_i, 0 \leq i \leq n$ однослойная циклическая диаграмма. Пусть K_0 имеет граничныее циклы $\gamma_0 = \gamma$ и γ_1; причем $\varphi(\gamma_0)$ сопряжено с $\varphi(\gamma_1)$, то есть $\varphi(\gamma_0) \sim \varphi(\gamma_1)$ и $\|\varphi(\gamma_0)\| = \|\varphi(\gamma_1)\|$ (лемма 4). Аналогично, кольцевой слой K_1 имеет граничные циклы γ_1 и γ_2; $\varphi(\gamma_1) \sim \varphi(\gamma_2)$ и $\|\varphi(\gamma_2)\| = \|\varphi(\gamma_1)\|$. Допустим, что $D_0 \in K_1$, причем $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{0, 1, 2\}$. Как было показано выше, случай $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| = 0$ невозможен.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_1\| \in \{1, 2\}$, тогда удалив из диаграммы M кольцевой слой K_0, получим диаграмму M', у которой число областей с $i(D) = 2$ равно числу областей с $i(D) = 4$. Но тогда в K_0 число областей D с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$. Поэтому $\varphi(\gamma_0)$ будет R^*-сократимым, что невозможно.

Пусть кольцевая диаграмма сопряжённости слов w, v является $c - n-$ слойной. Выделим в ней n-слойные поддиаграммы сопряженности M_0 и N_0, ограничивающие кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_p$, соединенных последовательно простыми путями. Пусть γ_l есть граничный цикл M_0 с $\mathcal{E}$, то есть $\gamma_l = M_0 \cap \mathcal{E}$ и δ_s есть граничный цикл N_0 с $\mathcal{E}$, то есть $\delta_s = N_0 \cap \mathcal{E}$.

Пусть $\gamma_l \neq \gamma$ и $\delta_s \neq \delta$, и пусть область $D_0, D_0 \in M$ имеет $d(D_0) > 4$. Чтобы убедится в том, что $d(D_0) = 4$ рассмотрим случай, когда D_0 граничит с γ_l. Пусть D_0 содержится в K_l слое соответственно и граничит с одной из связных односвязных поддиаграмм $\mathcal{E}_i$ диаграммы $\mathcal{E}$.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_l\| = 1$ тогда $\|\partial D_0 \setminus (\partial D_0 \cap \gamma_l)\| \geq 4$. В этом случае в K_l содержатся области D' и D'' вдоль γ_l с $i(D') = i(D'') = 2$. Области D_0, D' и D_0, D'' разделены с D_0 только областями Dс $i(D) = 3$. Тогда областям D' и D'' в $\mathcal{E}_i$ соответствуют области $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ в K_l с $i\left(\bar{D}''\right) = i\left(\bar{D}'\right) = 4$ и так как между областями $\bar{D}'$ и $\bar{D}''$ не может содержаться область с $i(D) = 2$, то данный случай невозможен.

Пусть $\|\partial D_0 \cap \gamma_l\| \geq 2$ и $\|\partial D_0 \setminus (\partial D_0 \cap \gamma_\partial)\| \geq 3$. Области D_0 соответствует область ${D_0}', {D_0}' \subset \mathcal{E}_i, i(D_0') = 4$, которая является граничной областью $\mathcal{E}_i$ и так как $\mathcal{E}_i$ вдоль границы γ_l имеет число областей D с $i(D) = 2$ на одну больше числа областей с $i(D) = 4$, то с обеих сторон области ${D_0}'$ будут граничные области D' и D'' с $i(D') = i(D'') = 2$. Поэтому, областям D' и D'' в кольцевой однослойной диаграмме K_l будут соответствовать области с $i(D) = 4$, причем эти области будут разделены только областями D с $i(D) = 3$ вдоль границы γ_l, и так как $i(D_0) \geq 3$ получим противоречие с леммой 4.

Случай, когда $D_0 \in \mathcal{E}_i$ доказывается аналогично.

Рассмотрим теперь случай, когда область $D_0, D_0 \in M$ с $d(D_0) > 4$ будет граничить с подпутем $\bar{\gamma}_l$, граничного цикла γ_l, соединяющим поддиаграммы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$. Пусть A, B - соответственно начальная и конечная точка пути $\bar{\gamma}_l$. Пусть для области $D_n \in \mathcal{E}_i, A \in \partial D_n$; аналогично область $D_1 \in \mathcal{E}_{i+1}$ и $B \in \partial D_1$. Пусть области $\bar{D}_n \in K_l$ и $\bar{D}_1 \in K_l$ таковы, что $D_1 \cap \bar{D}_1 = e_1 = BB_1, D_n \cap \bar{D}_n = e_n = AA_1$ и $\bar{e}_n$ - ребро области $\bar{D}_n$, соединяющее вершину A_1 с граничным циклом γ_{l-1}. Аналогично, $\bar{e}_1$ - ребро области $\bar{D}_1$, соединяющее вершину B_1 с граничным циклом γ_{l-1}. Обозначим $\bar{\gamma}_{l-1}$ подпуть граничного цикла γ_{l-1}, соединяющий конец $\bar{e}_n$ ребра с началом ребра $\bar{e}_1$. См. рис. 4.

Тогда так как слова $\varphi(\bar{e}_n)\varphi(\bar{\gamma}_{l-1})\varphi(\bar{e}_1)$ и $\varphi(e_n)\varphi(\bar{\gamma}_l)\varphi(e_1)$ являются, R^*, R^{**} -несократимыми, то по лемме 6 , область D_0 не может иметь $d(D_0) > 4$. Остальные возможные случаи доказываются аналогично.

$\square$

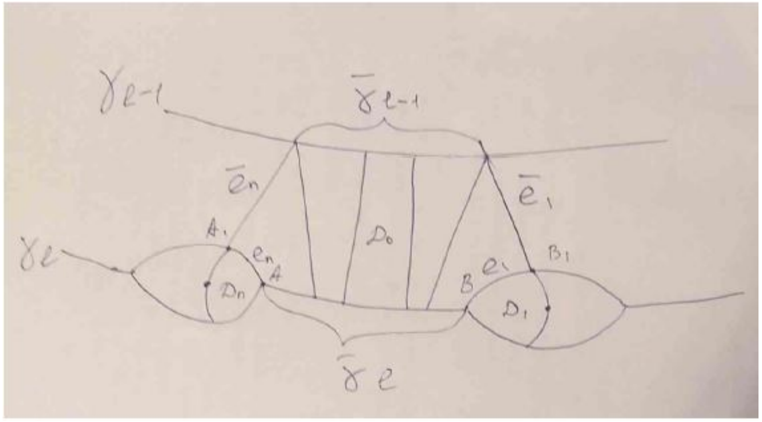

Рис.4

Лемма 8. Пусть слова w^n, v^m сопряжены в группе G с условием $C(4)\&T(4)$ и слова w, v являются $R, R^*,\quad R^{**}$ и R_c-несократимыми. Пусть M — диаграмма степенной сопряженности с граничными циклами γ и δ, где $\varphi(\gamma) = w^n$ и $\varphi(\delta) = \nu^m$, тогда метка граничного цикла γ_i каждой кольцевой однослойной диаграммы $K_i, 0 \leq i \leq l$ будет R_c-несократимой.

Доказательство. Предположим противное.

Рассмотрим кольцевую однослойную диаграмму $K_1, \gamma = \gamma_1, \gamma_2$ - ее граничные циклы. Пусть γ_2 граничный цикл кольцевой однослойной диаграммы K_2 и $\varphi\left(\gamma_2\right)$ является R_c-сократимой, тогда в диаграмме K_2 имеются две области D_1 и D_2 с $i(D) = 2$, разделенные только областями с $i(D) = 3$, которым соответствуют области $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в K_1 тоже с $i(D) = 2$. Но тогда либо $\varphi(\gamma) = w$ R_c-сократимо, либо R, R^* или R^{**} сократимо, что противоречит условию, либо области $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ в K_1 разделены областью с $i(D) = 4$, что противоречит предположению.

Пусть γ_2 граничный цикл, ограничивающий кольцевую диаграмму $\mathcal{E}$ состоящую из односвязных диаграмм $\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \ldots, \quad \mathcal{E}_p$, соединенных последовательно простыми путями. Невозможность предположения о R_c -сократимости слова $\varphi\left(\gamma_2\right)$ доказывается аналогично.

□

Лемма 9. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ и являются R, R^*, R^{**} и R_c- несократимыми и $\|w\| = \|v\|$. Пусть существуют целые числа $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1} w^n z = v^m$, тогда $n = m$.

Доказательство. Пусть M - диаграмма сопряженности слов w^n, v^m является $n-$ слойной диаграммой. Тогда из лемм 5-8 следует, что $n = m$.

Пусть M есть $c - n$ - слойная диаграмма сопряженности слов w^n, v^m. Выделим в ней поддиаграммы $M_0, N_0, \mathcal{E}$, где M_0 и N_0, являются n слойными диаграммами сопряженности с граничными циклами $\gamma = \gamma_0, \gamma_{l+1}$ для M_0 и $\delta = \delta_0, \delta_{k+1}$ для N_0. Тогда $\gamma_{l+1}, \delta_{k+1}$ граничные циклы диаграммы $\mathcal{E}, \boldsymbol{\varphi}\left(\gamma_{l+1}\right) = w_{l+1}^m, \boldsymbol{\varphi}\left(\delta_{k+1}\right) = v_{k+1}^n$. Слова w_{l+1}^m, v_{k+1}^n являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми, $\left\|w_{l+1}^m\right\| = m\|w\|, \left\|v_{k+1}^n\right\| = n\|v\|$ и каждая область D диаграммы $\mathcal{E}$ имеет $d(D) = 4$.

Покажем, что в этом случае из структуры диаграммы сопряженности слов w^n, v^m следует, что $n = m$. Доказательство проведем методом математической индукции по числу слоев диаграмме M. Рассмотрим случай, когда связная односвязная диаграмма, соответствующая равенству слов $\bar{w}, \bar{v}$ является однослойной. Пусть слова $\bar{w} = \bar{v}$ и $\bar{w}, \bar{v}$ являются R, R^*, R^{**} и R_c -несократимыми. Пусть области $D_0, D_1, \ldots, D_r$ образуют диаграмму $\mathcal{E}$, $\partial\mathcal{E} = \gamma\delta$ где $\varphi(\gamma) = \bar{w}$ и $\varphi(\delta) = \bar{v}, \forall i, 1 \leq i \leq r, \partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i, e_i-$ ребро, $e_i \in \mathcal{E}$ и $\partial D_i \cap \gamma \neq \varnothing, \partial D_i \cap \delta \neq \varnothing, 0 \leq i \leq r;$ кроме того $\forall i, 1 \leq i \leq r, d(D_i) = 4.$ Пусть $\gamma = \gamma_1 \gamma_c \gamma_2, \delta = \delta_1 \delta_c \delta_2$, где $\gamma_1 = \gamma \cap D_0, \gamma_2 = \gamma \cap D_r, \delta_1 = \delta \cap D_0, \delta_2 = \delta \cap D_r$. При этом возможны случаи:

1. $\|\gamma_1\| = \|\gamma_2\| = 2, \|\delta_1\| = \|\delta_2\| = 1;$

2. $\|\gamma_1\| = 2, \quad \|\gamma_2\| = 1, \quad \|\delta_1\| = 1, \quad \|\delta_2\| = 2.$

В случае 1) существует область $D_i, 1 < i < r$, такая что $\|\partial D_i \cap \delta_c\| = 2$, иначе слова $\bar{w}, \bar{v}$ будут R, R^* - сократимыми, что противоречит условию, следовательно $\|w\| = \|v\|$.
Для случая 2) равенство $\|w\| = \|v\|$ очевидно.
Пусть $\mathcal{E}_{ij}$ - произвольная поддиаграмма диаграммы $\mathcal{E}_i$ с числом слоев меньше, чем n и $\partial\mathcal{E}_{ij} = \gamma_{i+1,i}\delta_{i+1,i}$, причем слова $\varphi\left(\gamma_{i+1,i}\right), \varphi\left(\delta_{i+1,i}\right)$ являются R, R^*, R^{**} и R_c– несократимыми.
Предположим, что $\|\gamma_{i+1,i}\| = \|\delta_{i+1,i}\|$.
Пусть диаграмма $\mathcal{E}_i$ состоит из n слов и имеет следующий вид: см. рис. 5.

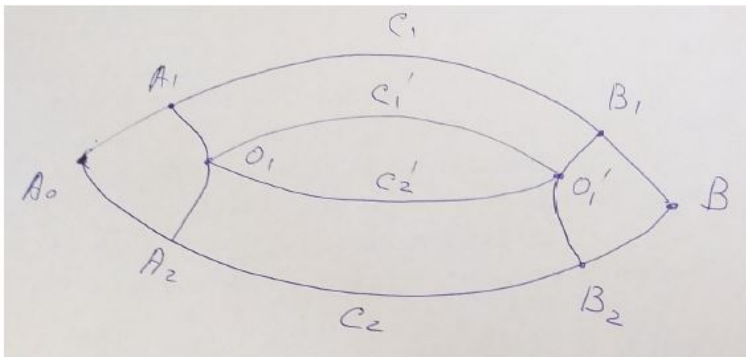

Рис.5

Рассмотрим поддиаграмму $O_1C_1'O_1'C_2'$. Она содержит меньше чем n слоев, слова:

$$\varphi\left(O_1C_1'O_1'\right), \varphi\left(O_1C_2'O_1'\right),$$

которые являются R, R^*, R^{**} и R_c - несократимыми, в противном случае слова $\gamma_{l+1,i}, \delta_{k+1,i}$ были бы R, либо R^*, либо R^{**}, либо R_c сократимыми. Тогда по индуктивному предположению имеем: $\|O_1C_1'O_1'\| = \|(O_1C_2'O_1')\|$.
Рассмотрим поддиаграмму Δ_1 диаграммы $\mathcal{E}_i : \Delta_1 = A_0A_2O_1C_1'O_1'B_2BB_1C_1A_1A_0$. Данная диаграмма является однослойной, и, как показано выше,

$$\left\|A_0A_2O_1C_1'O_1'B_2B\right\| = \|A_0A_1C_1B_1B\|.$$

Так как $\|A_0A_1\| = \|B_1B\| = \|A_1O_1\| = \|B_1O_1'\| = 1, \|A_0A_2O_1\| = \|BB_2O_1'\| = 2$, то $\|A_1C_1B_1\| = = \|A_1O_1C_1'O_1'B_1\|$. Аналогично, из однослойной поддиаграммы Δ_2, $\Delta_2 = A_0A_1O_1C_2'O_1'B_1BB_2$ $C_2A_2A_0$ получаем, что $\|A_2C_2B_2\| = \|A_2O_1C_1'O_1'B_2\|$. Учитывая, что $\|A_2O_1\| = \|B_2O_1'\| = 1$, $\|A_1O_1\| = \|O_1'B_1\| = 1$ и $\|O_1C_1'O_1'\| = \|O_1C_2'O_1'\|$, получаем, что $\|A_1C_1B_1\| = \|A_2C_2B_2\|$. Из последнего равенства следует, что

$$\|A_0A_1C_1B_1B\| = \|A_0A_2C_2B_2B\|,$$

то есть $\|\gamma_{i+1,i}\| = \|\delta_{k+1,i}\|$. Остается рассмотреть слоговую длину пути $\overline{\delta}$, соединяющего, например, связные односвязные поддиаграммы $\mathcal{E}_j$, $\mathcal{E}_{j+1}$ диаграммы $\mathcal{E}$.
Пусть $\gamma_{l+1,i}^{j,j+1}$ часть границы $\gamma_{l+1,i}$ совпадающей с $\overline{\delta}$ и $\delta_{k+1,i}^{j,j+1}$ часть границы $\delta_{k+1,i}$ совпадающей с δ Очевидно, $\gamma_{l+1,i}^{j,j+1} \equiv \delta_{k+1,i}^{j,j+1}$ и $\left\|\gamma_{l+1,i}^{j,j+1}\right\| = \left\|\delta_{k+1,i}^{j,j+1}\right\|$, в противном случае в диаграмме M будет находится хотя бы одна вершина v с $d(v) = 3$, с чего не может быть.
Таким образом, получено, что $\|\gamma_{l+1}\| = \|\delta_{k+1}\|$. В силу лемм 4 и 5 имеем $\|\gamma\| = \|\gamma_{l+1}\|, \|\delta\| = = \|\delta_{k+1}\|$, и так как $\|\gamma\| = m\|w\|$ и $\|\delta\| = n\|v\|$, то $n = m$.
□

Следовательно, при решении проблемы степенной сопряженности необходимо решить уравнение следующего вида $z^{-1}w^n z = v^n$, где $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$.

Теорема 3 (Основная). Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T\ (4)$ и являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми и $\|w\| = \|v\|$. Тогда существует алгоритм, позволяющий определить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^n$.

Доказательство. Пусть M - диаграмма сопряженности с граничными циклами γ и δ, где $\varphi(\gamma) = w^n$ и $\varphi(\delta) = v^n$,

Обозначим через C множество всех кусков симметризованного множества определяющих соотношений $\mathscr{R} = \{r_i \mid i = 1, p\}$ группы G с условием $C(4)\&T(4)$; через $|C|$ - мощность данного множества, через T обозначим множество всех циклически $R, R^*,$ R^{**} и R_c-несократимых слов слоговой длины $\|w\|$. Отметим, что слогами слов являются куски определяющих соотношений $\{r_i \mid i = 1, p\}$, то есть $T = \{w_i \mid \|w_i\| = \|w\|\}, |T| < |C|^{\|w_i\|}$.

Пусть $K_0, K_1, \ldots, K_t,$ где $t < |T|$ последовательность однослойных кольцевых поддиаграмм диаграммы M. Обозначим через γ_i, γ_{i+1} граничные циклы диаграммы $K_i, \gamma_0 = \gamma, \varphi(\gamma_0) = w^n$ и $\varphi(\delta) = v^n$. Пусть $\alpha = e_1 e_2 \ldots e_t, \alpha \in M$ - минимальный путь, соединяющий вершину $O \in \gamma_0$ с вершиной $O' \in \delta, \varphi(\alpha) = \varphi(e_1)\varphi(e_2)\ldots\varphi(e_t)$ где $\varphi(e_i), 1 \le i \le t,$ кусок определяющего отношения группы $G, \varphi(\alpha) = z, z$ удовлетворяет соотношению $z^{-1}w^n z = v^n$.

Введем обозначения $\forall i, 1 \le i \le t, e_i \in \alpha, e_i \cap \gamma_{i-1} = O_{i-1},$ $e_i \cap \gamma_i = O_i$.

Рассмотрим случай, когда $n \ge |C|$, тогда существует поддиаграмма $\Pi_0 \subset K_0$, граничные циклы которой $\partial\Pi_0 = e_1\gamma_{00}e_{01}\gamma_{01}$, где $e_{01} \in K_0$, соединяет γ_0 с γ_1, и $\varphi(e_{01}) = \varphi(e_1)^{-1}$ причем $\varphi(\gamma_{00}) = w^{n_1}, \varphi(\gamma_{01}) = w_1^{n_1}, w_1 \in T,$ где $\gamma_{00}-$ подпуть граничного цикла γ_0, γ_{01} подпуть граничного цикла γ_1 и $n_1 \le |C|$.

Аналогично в кольцевой диаграмме K_1 выделим поддиаграмму Π_1 с граничным циклом $\partial\Pi_1 = e_2\gamma_{11}e_{12}\gamma_{12}$, где $e_2 \in \alpha$, $e_{12} \in K_1$ и $\varphi(e_{12}) = \varphi(e_2)^{-1}$. Причем $\gamma_{11} = \partial\Pi_1 \cap \gamma_1, \gamma_{12} = \partial\Pi_1 \cap \gamma_2$ $\varphi(\gamma_{11}) = {w_1}^{n_1 n_2}, \varphi(\gamma_{01}) = {w_2}^{n_1 n_2}$, где $w_1, w_2 \in T, n_2 \le |C|, n_1 n_2 \le |C|^2$.

Сдвинув поддиаграмму Π_0 в кольцевой диаграмме $K_0 n_2$ раза, получаем поддиаграмму Π_{01} с граничным циклом $\partial\Pi_{01} = e_2 e_1 {\gamma_{00}}^{n_2} e'_{01} e_{12}\gamma_{12}$, где

$$e_2, e_1 \in \alpha,\ \varphi\left(e'_{01}e_{12}\right) = \varphi(e_2 e_1)^{-1} \text{ и } \varphi\left({\gamma_{00}}^{n_2}\right) = \varphi(\gamma_{00})^{n_2},\ \varphi(\gamma_{12}) = w_2^{n_1 n_2}.$$

Выполняя указанные построения на i-шаге, построим поддиаграмму Π_{0i}.

Рассмотрим однослойную кольцевую диаграмму $K_i, K_i \subset M, i \le t$.

Выделим в ней поддиаграмму Π_i где $\partial\Pi_i = e_{i+1}\gamma_{ii}e_{i,i+1}\gamma_{i,i+1}$ где

$$e_{i+1} \in \alpha, e_{i,i+1} \in K_i, \varphi(e_{i,i+1}) = \varphi(e_{i+1})^{-1}.$$

Причем $\gamma_{ii} = \partial\Pi_i \cap \gamma_i,$ $\gamma_{i,i+1} = \partial\Pi_i \cap \gamma_{i+1},$ $\varphi(\gamma_{ii}) = w_i^{n_1 n_2 \ldots n_i}, \varphi(\gamma_{i,i+1}) = {w_{i+1}}^{n_1 n_2 \ldots n_i}$, где $w_i, w_{i+1} \in T$, и для любого $j, 1 \le j \le i, n_j \le |C|$. Таким образом $n_1 n_2 \ldots n_i \le |C|^i$.

Построим поддиаграмму Π_{0i} диаграммы M. Запишем ее граничный цикл:

$$\partial\Pi_{0i} = \alpha_i \gamma(\beta_i)\bar{\alpha}_i\gamma_{i,i+1},$$

где $\alpha_i = e_1 e_2 \ldots e_i, \bar{\alpha}_i = e_{01}e_{02}\ldots e_{i,i-1}e_{i,i+1}$ и $\varphi(\bar{\alpha}_i) = \varphi(\alpha_i)^{-1}, \beta_i = n_2 n_3 \ldots n_i, \gamma(\beta_i) = \gamma_{00}\beta_i$, $\varphi(\gamma(\beta_i)) = w^{n_1\beta_i}, \varphi(\gamma_{i,i+1}) = w_i^{n_1\beta_i}$, где $w_{i+1} \in T$. Получим, что $n_1\beta_i \le |C|^i$.

Из вида поддиаграммы Π_{0i} следует, что $\varphi(\alpha_i)\, w^{n_1\beta_i}\varphi(\alpha_i)^{-1} = w_{i+1}^{n_1\beta_i}$.

В результате получаем, что показатель n удовлетворяет соотношению $z^{-1}w^n z = v^n$ и не превосходит $|C|^{|T|}$, при этом следует заметить, что число слоев в диаграмме M не превосходит $|T|$. В противном случае диаграмма M содержала бы слои $K_i, K_j, j \ne i$, граничные циклы γ_i, γ_j которых имели бы тождественно равные метки, записанные в кусках определяющих соотношений группы G. Но тогда поддиаграмму диаграммы M заключенную между γ_i, γ_j можно удалить, а границы γ_i, γ_j отождествить. Отсюда следует, что проблема степенной сопряженности слов в группе G с условием $C(4)\&T(4)$ алгоритмически разрешима.

□

Таким образом, получаем теорему.

Теорема 4. Существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N}$, и $z \in G$, такие что $z^{-1}w^n z = v^m$.

Доказательство. Пусть слова $w, v \in G$ с условием $C(4)\&T(4)$ являются R, R^*, R^{**} и R_c-несократимыми и $|w| = |v|$, тогда если они удовлетворяют для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$, и $z \in G$ равенству $z^{-1}w^n z = v^n$, то из леммы 9 следует, что $n = m = n_0$. Из теоремы 3 , следует, что показатель n ограничен и не превосходит $|C|^{|T|}$. Поэтому, чтобы установить, имеет ли место равенство $z^{-1}w^n z = v^n$ проверяем для n_0 где $1 \leq n_0 < |C|^{|T|}$, сопряжены ли слова w^{n_0}, v^{n_0} в группе G.

Если $||w|| \neq ||v||$, то соотношение $z^{-1}w^n z = v^m$ возведем в степень $||w||||v||$, получим $z^{-1}(w^{||v||})^{n||w||}z = (v^{||w||})^{m||v||}$, и так как $||w||^{||v||} = ||v||^{||w||}$, то $n||w|| = m||v||$, и получаем выше описанный случай.

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков, П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества // Докл. АН СССР. 1952. Т. 85. С. 709–719.

2. Новиков, П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Труды МИАН СССР. 1954. Т.44. С. 3–143.

3. Гриндлингер, М.Д. К проблемам тождества слов и сопряженности // Изв. АН СССР, сер. матем. 29 (1965). 245–268. [65:12, 228] (Д. 15. 4).

4. Lindon, R. On Dehns algorithm // Math. Ann. 166. 1966. Pp. 208–228.

5. Schupp, P. On Dehns algorithm and conjugacy problem // Math. Ann. 1968. 178. Pp. 119–130.

6. Линдон, Шупп, Р.П. Комбинаторная теория групп // М. Мир. 1980.

7. Безверхний, В.Н. О нормализаторах элементов в $C(p)\&T(q)$-группах // Алгоритмич. проблемы теории групп и полугрупп. Меж. вузов. сб. науч. тр. Тула. 1994. С. 4–58.

8. Безверхний, В.Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов $C(p)\&T(q)$-группах // Известия Тульского гос. университета, серия «Математика». Т. 4. Тула. изд. ТулГу. 1998. С. 5–15.

9. Безверхний, В.Н., Безверхняя, Н.Б. Решение проблемы степенной сопряженности слов и проблемы степени в группах с малым сокращением // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории. Материалы XXII межд. конф. Тула. 26-29 мая 2023 г. С. 29–34.

REFERENCES

1. Novikov, P.S. 1952, “On the algorithmic undecidability of the identity problem”, *Doklady AN SSSR*, Vol. 85, pp. 709–719.

2. Novikov, P.S. 1954, “On the algorithmic undecidability of the identity problem in group theory”, *Trudy MIAN SSSR*, Vol. 44, pp. 3–143.

3. Grinblinger, M.D. 1965, “On the problems of word identity and conjugacy”, *Izvestiya AN SSSR, ser. matem.*, Vol. 29, pp. 245–268.

4. Lindon, R. 1966, “On Dehn’s algorithm”, *Math. Ann.*, Vol. 166, pp. 208–228.

5. Schupp, P. 1968, “On Dehn’s algorithm and the conjugacy problem”, *Math. Ann.*, Vol. 178, pp. 119–130.

6. Lindon, R. and Schupp, P. 1980, “Combinatorial group theory”, *Moscow, Mir.*

7. Bezverkhnii, V.N. 1994, “On the normalizers of elements in $C(p)\&T(q)$-groups”, *Algorithmic problems in group theory and semigroups: International collection of scientific papers*, Tula, pp. 4–58.

8. Bezverkhnii, V.N. 1998, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in $C(p)\&T(q)$-groups”, *Izvestiya Tula State University, Series "Mathematics"*, Vol. 4, Tula, Tula State University, pp. 5–15.

9. Bezverkhnii, V.N., Bezverkhnyaya, N.B. 2023, “Solution of the power conjugacy problem for words and the degree problem in groups with small cancellation”, *Algebra, number theory, discrete geometry and multiscale modeling: modern problems, applications and historical issues. Proceedings of the XXII International Conference*, Tula, May 26-29, pp. 29–34.

Получено: 12.08.2024
Принято в печать: 26.12.2024