ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-16-31

σ_Ω-расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных T-групп и их спутники

Е. Н. Бажанова

Бажанова Екатерина Николаевна — кандидат физико-математических наук, Московский городской педагогический университет (г. Москва).
e-mail: DeminaENmf@yandex.ru

Аннотация

В 2001 году В. А. Ведерниковым и М. М. Сорокиной был предложен функциональный подход в построении формаций и классов Фиттинга конечных групп путем рассмотрения помимо функций-спутников еще одного вида функций — направлений. В результате были построены ω-веерные (Ω-расслоенные) формации и классы Фиттинга конечных групп, включающие в себя известные ω-локальные (Ω-композиционные) формации и классы Фиттинга, где ω — непустое множество простых чисел (Ω — непустой подкласс класса всех простых групп). Дальнейшие исследования показали, что понятие расслоенности может быть применено к построению расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных T-групп с конечными композиционными рядами. Новая идея в функциональном подходе построения классов групп была предложена А. Н. Скибой. В серии статей он разработал σ-теорию конечных групп, где σ — произвольное разбиение множества всех простых чисел, и применил ее методы к построению σ-локальных формаций. На основе σ-методов были построены классы, обобщающие ω-веерные и Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. В настоящей работе определены классы, обобщающие расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, изучены их минимальные и внутренние спутники.

Ключевые слова: мультиоператорная T-группа, σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга, минимальный спутник, внутренний спутник.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Бажанова, Е.Н. σ_Ω-расслоенные классы Фиттинга мультиоператорных T-групп и их спутники // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 16–31.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 512.542 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-16-31

σ_Ω-foliated Fitting classes of multioperator T-groups and its satellites

E. N. Bazhanova

Bazhanova Ekaterina Nikolaevna — candidate of physical and mathematical sciences, Moscow City University (Moscow).
e-mail: DeminaENmf@yandex.ru

Abstract

In 2001, V.A. Vedernikov and M.M. Sorokina proposed a functional approach to the construction of formations and fitting classes of finite groups by considering, in addition to satellite functions, another type of functions - directions. As a result, ω-fibered (Ω-foliated) formations and Fitting classes of finite groups were constructed, including the well-known ω-local (Ω-composite) formations and Fitting classes, where ω is a nonempty set of primes (Ω — a nonempty subclass of the class of all simple groups). Further research has shown that the concept of foliation can be applied to the construction of foliated formations and Fitting classes of multioperator T-groups with finite composition series. A new idea in the functional approach of constructing classes of groups was proposed by A.N. Skiba. In a series of articles, he developed the σ-theory of finite groups, where σ is an arbitrary partition of the set of all primes, and applied its methods to the construction of σ-local formations. Classes generalizing ω-fibered and Ω-foliated formations and Fitting classes of finite groups were constructed on the basis of the σ-methods. We define classes generalizing the foliated Fitting classes of multioperator T-groups with composite series and study their minimal and inner satellites.

Keywords: multioperator T-group, σ_Ω-foliated Fitting class, minimal satellite, inner satellite.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
Bazhanova, E.N. 2024, “σ_Ω-foliated Fitting classes of multioperator T-groups and its satellites”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 16–31.

1. Введение

Изучение классов алгебраических систем – множества алгебраических систем, содержащих вместе с каждой своей системой все ей изоморфные – является характерной чертой современной алгебры. Теория классов конечных групп начала активно развиваться во второй половине XX века после выхода работы Гашюца [1], в которой было определено понятие формации конечных групп. С помощью специальных функций Гашюцом были построены локальные формации, позже Б. Хартли [2] определил локальные классы Фиттинга. В работе [3] А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым исследуются частично локальные (ω-локальные) и частично композиционные формации и классы Фиттинга конечных групп, где ω – непустое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$.

Способ построения новых видов формаций и классов Фиттинга был предложен В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной путем рассмотрения еще одной функции — направления. Функция направление определяется как отображение из множества всех простых чисел (множества всех конечных простых групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга. В работах [4, 5] ими были построены соответственно Ω-расслоенные (Ω – непустой подкласс класса всех конечных простых групп) и ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп, имеющие бесконечное множество направлений, одним из которых является направление Ω-композиционного и ω-локального спутника соответственно. В дальнейшем В.А. Ведерников и Е.Н. Бажанова распространили идею расслоенных формаций и классов Фиттинга на класс мультиоператорных T-групп, обладающих условиями минимальности и максимальности для идеалов. Так, в работах [6, 7] были определены различные типы Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами.

А.Н. Скибой (см., например, [8]) была разработана σ-теория конечных групп, где σ — некоторое разбиение множества простых чисел $\mathbb{P}$. В указанной работе были построены σ-локальные формации конечных групп. Идея σ-разбиений получила дальнейшее развитие в исследовании классов конечных групп (см., например, [9, 10, 11, 12]).

Цель данной работы — применить σ-подход к построению σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп, обладающих композиционными рядами, а также получить описание их минимальных и внутренних спутников, где σ_Ω — произвольное разбиение непустого подкласса Ω класса всех простых T-групп.

Некоторые результаты работы были анонсированы в [13, 14].

2. Необходимые определения, обозначения и вспомогательные результаты

Используемые в дальнейшем обозначения, определения и результаты можно найти в работах [15, 16, 17, 18, 19].

Пусть дана аддитивная группа G с нулевым элементом 0. Группа G называется *мультиоператорной T-группой* с системой мультиоператоров T (или, коротко, *T-группой*), если в G задана еще некоторая система n-арных алгебраических операций T при некоторых n, удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ должно выполняться условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n-арна.

Пусть $\mathfrak{C}$ — класс всех T-групп с конечными композиционными рядами, $\mathfrak{I}$ — класс всех простых T-групп. Все рассматриваемые T-группы принадлежат классу $\mathfrak{C}$. Пусть $\mathfrak{X}$ – непустое множество T-групп. Группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$-группой; через $(\mathfrak{X})$ обозначается класс T-групп, порожденный $\mathfrak{X}$, в частности, (G) – класс всех T-групп, изоморфных T-группе G.

Запись $M \lhd G$ означает, что M является идеалом T-группы G. Напомним, что T-группа G называется *комонолитической*, если в G имеется такой идеал M (комонолит T-группы G), что G/M — простая T-группа и $N \subseteq M$ для любого собственного идеала N T-группы G.

Формацией или *корадикальным классом* называется класс T-групп, замкнутый относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация T-групп и G – T-группа. Пересечение всех идеалов T-группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, называется *$\mathfrak{F}$-корадикалом* T-группы G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$.

Класс T-групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* или *радикальным классом*, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $N \in \mathfrak{F}$;

2) если N_1 и N_2 – идеалы в T-группе G и $N_1, N_2 \in \mathfrak{F}$, то $N_1 + N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга T-групп. Сумма всех $\mathfrak{X}$-идеалов T-группы G называется *$\mathfrak{X}$-радикалом* T-группы G и обозначается через $G_{\mathfrak{X}}$.

Класс T-групп, содержащийся в классе $\mathfrak{C}$, будем называть $\mathfrak{C}$-классом. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — $\mathfrak{C}$-классы T-групп. Тогда $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{C} \mid G$ имеет идеал $N \in \mathfrak{X}$ с $G/N \in \mathfrak{Y})$. Отметим, что если $\{0\} \in \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$; если $\mathfrak{X} = \varnothing$ или $\mathfrak{Y} = \varnothing$, то полагают $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \varnothing$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – $\mathfrak{C}$-класс T-групп и $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{C}$-формация. Тогда $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$ называется *формационным произведением* классов $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Отметим, что если $S_n\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H} \circ \mathfrak{F} = \mathfrak{H}\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — $\mathfrak{C}$-класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = (G \in \mathfrak{C} \mid G/G_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{X})$ называется *фиттинговым произведением* классов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$. Отметим, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X}$; если $Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{B} \diamond \mathfrak{X} = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$.

Пусть $\mathfrak{K}(G)$ – класс всех простых T-групп, изоморфных композиционным факторам T-группы G. Для любого непустого подкласса Δ класса $\mathfrak{I}$ будем полагать: $\mathfrak{C}_\Delta = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta)$ и $\mathfrak{C}_{\Delta'} = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \cap \Delta = \varnothing)$; нетрудно показать, что $\mathfrak{C}_\Delta$ является формацией Фиттинга. Обозначим $O^\Delta(G)$ — $\mathfrak{C}_\Delta$-корадикал T-группы G и $O^{\Delta,\Delta'}(G)$ — $\mathfrak{C}_\Delta\mathfrak{C}_{\Delta'}$-корадикал T-группы G.

3. Основные результаты

3.1. Построение σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп

Пусть Ω — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, σ_Ω — произвольное разбиение класса Ω, т.е. $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$, где Ω_i — непустой подкласс класса Ω для любого $i \in I$, $\Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$ и $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ для любых $i, j \in I, i \neq j$. Для произвольной T-группы G и произвольного класса T-групп $\mathfrak{F}$ полагаем $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\}$ и $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma_\Omega(G)$.

Следуя [7] введем определения следующих функций.

Определение 1. *Функция вида*

$$f : \sigma_\Omega \cup \{\sigma_\Omega{}'\} \to \{\textit{классы Фиттинга } T\textit{-групп}\},$$

где $f(\sigma_\Omega{}') \neq \varnothing$, называется радикальной σ_Ω-функцией или, коротко, $\sigma_\Omega R$-функцией.

Определение 2. *Функция вида*

$$\varphi : \sigma_\Omega \to \{\textit{непустые формации Фиттинга } T\textit{-групп}\},$$

удовлетворяющая условию $\mathfrak{C}_{\Omega_i{}'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, называется формационно-радикальной σ_Ω-функцией или, коротко, $\sigma_\Omega FR$-функцией.

Теорема 1. *Пусть f и φ — $\sigma_\Omega R$-функция и $\sigma_\Omega FR$-функция соответственно. Тогда*

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \textit{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \textit{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

является классом Фиттинга.

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$. Покажем, что $N \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}')$, $O^\Omega(N) \subseteq O^\Omega(G)$ по [6, лемма 2, п. 4)] и $f(\sigma_\Omega{}')$ является классом Фиттинга, то $O^\Omega(N) \in f(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Так как $(N + G^{\varphi(\Omega_i)})/G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G/G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ является классом Фиттинга, то $N + G^{\varphi(\Omega_i)}/G^{\varphi(\Omega_i)} \cong N/N \cap G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Поэтому $N^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq N \cap G^{\varphi(\Omega_i)}$. Теперь из $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$, $N^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G^{\varphi(\Omega_i)}$ и того, что $f(\Omega_i)$ является классом Фиттинга следует, что $N^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

Пусть $G = N_1 + N_2$, $N_1 \lhd G$, $N_2 \lhd G$, N_1 и N_2 принадлежат $\mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(N_1), O^\Omega(N_2) \in f(\sigma_\Omega{}')$, $O^\Omega(G) = O^\Omega(N_1) + O^\Omega(N_2)$ по [6, лемма 2, п. 6)] и $f(\sigma_\Omega{}')$ является классом Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ или $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$. Тогда $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $N_2^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Так как $f(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $D = N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Из $G = N_1 + N_2$ и $D \lhd G$ следует, что $G/D = (N_1 + D)/D + (N_2 + D)/D$. По модулярному тождеству Дедекинда

$$(N_1 + D)/D \cong N_1/N_1 \cap D = N_1/N_1 \cap (N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2^{\varphi(\Omega_i)}) = N_1/(N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_1 \cap N_2^{\varphi(\Omega_i)})) \cong$$

$$(N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)})/((N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_1 \cap N_2^{\varphi(\Omega_i)}))/N_1^{\varphi(\Omega_i)}).$$

Так как $N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ является формацией, то $(N_1 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Аналогично можно показать, что $(N_2 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Отсюда и из $\varphi(\Omega_i)$ – класс Фиттинга получим $G/D = (N_1 + D)/D + (N_2 + D)/D \in \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq D$. Поскольку $D \in f(\Omega_i)$ и $f(\Omega_i)$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$, и значит, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(N_2)$ (случай $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(N_1)$ и $\Omega_i \in \sigma_\Omega(N_2)$ рассматривается аналогично). Тогда $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $N_2 \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$. Так как $G = N_1 + N_2$, то

$$G/N_1^{\varphi(\Omega_i)} = (N_1 + N_2)/N_1^{\varphi(\Omega_i)} = (N_1 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_2 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} =$$

$$N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + (N_2 + N_1^{\varphi(\Omega_i)})/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \cong N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} + N_2/N_2 \cap N_1^{\varphi(\Omega_i)}.$$

Поскольку $N_1/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$, $N_2 \in \varphi(\Omega_i)$ и $\varphi(\Omega_i)$ – формация Фиттинга, то $G/N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Поэтому $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq N_1^{\varphi(\Omega_i)}$. Так как $N_1^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ и $f(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга. □

Определение 3. *Пусть f и φ — некоторые $\sigma_\Omega R$-функция и $\sigma_\Omega FR$-функция соответственно. Класс Фиттинга T-групп вида*

$$\mathfrak{F} = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

называется σ_Ω-расслоенным классом Фиттинга T-групп и обозначается $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$. Функция f называется спутником (иначе, функцией-спутником), а функция φ — направлением (иначе, функцией-направлением) σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Приведем некоторые примеры σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп.

Пример 1. *Пусть f_1 – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_1(\sigma_\Omega{}') = (0)$ и $f_1(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $(0) = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$.*

Допустим, что $(0) \neq \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$ и пусть $G \neq \{0\} \in \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$. Тогда $O^\Omega(G) \in f_1(\sigma_\Omega{}') = (0)$. Отсюда $G \in \mathfrak{C}_\Omega$. Поэтому для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$ верно $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $(0) = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$.

Пример 2. *Пусть f_2 – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_2(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{C}$ и $f_2(\Omega_i) = \mathfrak{C}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{C} = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.*

По определению 3 $\sigma_\Omega R(f_2, \varphi) \subseteq \mathfrak{C}$. Пусть $G \in \mathfrak{C}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$, $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{C} = f_2(\sigma_\Omega{}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C} = f_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $\mathfrak{C} \subseteq \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.

Таким образом, $\mathfrak{C} = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$.

Пример 3. *Пусть f_3 – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_3(\sigma_\Omega{}') = (0)$ и $f_3(\Omega_i) = \mathfrak{C}_\Omega$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$; φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{C}_\Omega = \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.*

Пусть $G \in \mathfrak{C}_\Omega$. Тогда $O^\Omega(G) = \{0\} \in (0) = f_3(\sigma_\Omega{}')$. Так как $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}_\Omega$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_\Omega = f_3(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$ и $\mathfrak{C}_\Omega \subseteq \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.

Пусть $G \in \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$. Тогда $O^\Omega(G) \in f_3(\sigma_\Omega{}') = (0)$. Отсюда $O^\Omega(G) = \{0\}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{C}_\Omega$ и $\sigma_\Omega R(f_3, \varphi) \subseteq \mathfrak{C}_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{C}_\Omega = \sigma_\Omega R(f_3, \varphi)$.

Пример 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга T-групп, такой что $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \varnothing$; f_4 – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_4(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$, $f_4(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Покажем, что $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.*

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\sigma_\Omega(G) = \{\Omega_i \in \sigma_\Omega \mid \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing\} = \varnothing$. Значит, $\mathfrak{K}(G) \cap \Omega = \varnothing$ и $G \in \mathfrak{C}_{\Omega'}$. Поэтому $O^\Omega(G) = G \in \mathfrak{F} = f_4(\sigma_\Omega{}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varnothing = f_4(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ и $\mathfrak{F} \subseteq \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ и пусть G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\sigma_\Omega R(f_4, \varphi) \setminus \mathfrak{F}$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$, то $O^\Omega(G) \in f_4(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ и $G \neq \{0\}$. Пусть M_1 и M_2 — идеалы T-группы G, такие что $G = M_1 + M_2$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$, $M_1, M_2 \lhd G$ и $\sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ — класс Фиттинга, то $M_1, M_2 \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$. Но, в силу выбора G, имеем $M_1, M_2 \in \mathfrak{F}$. Класс $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга, поэтому $G = M_1 + M_2 \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, G — комонолитическая T-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Из $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F}$ имеем $O^\Omega(G) \subseteq M$. Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{C}_\Omega$ является формацией, следует $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M)$. Тогда $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$ и из $G \in \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$ получим $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_4(\Omega_i) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, \varphi)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга T-групп, такой что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{C}_{\Omega'}$. Тогда для любой T-группы $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{C}_{\Omega'} = (G \in \mathfrak{C} \mid \mathfrak{K}(G) \cap \Omega = \varnothing)$ и, значит, $\sigma_\Omega(G) = \varnothing$. Поэтому $\sigma_\Omega(\mathfrak{F}) = \cup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma_\Omega(G) = \varnothing$. В виду примера 4 $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_4, R(f_4, \varphi)$, где f_4 – $\sigma_\Omega R$-функция, такая что $f_4(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$, $f_4(\Omega_i) = \varnothing$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция.

Пример 5. *Пусть Δ — непустой подкласс класса $\mathfrak{I}$, такой что $\Omega_i \cap \Delta = \varnothing$ или $\Omega_i \subseteq \Delta$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Тогда $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$, где*

$$f_5(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}, f_5(\Omega_i) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } \Omega_i \cap \Delta = \varnothing, \\ \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}, & \text{если } \Omega_i \subseteq \Delta, \end{cases} \quad \text{для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega$$

и φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция.

Сначала покажем, что $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subseteq \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$. Пусть $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = f_5(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, т.е. $\Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Так как $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = (G \in \mathfrak{C} | \mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta \cap \Omega)$, то $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Delta$. Поэтому $\Omega_i \cap \Delta \neq \varnothing$. Тогда по условию $\Omega_i \subseteq \Delta$ и, значит, $f_5(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Поскольку $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = f_5(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ и $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subseteq \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$.

Допустим, что $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} \subset \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ и пусть G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\sigma_\Omega R(f_5, \varphi) \setminus \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Тогда, как и в примере 4, можно показать, что G — комонолитическая T-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}} \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Так как $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$, то $O^\Omega(G) \in f_5(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$. Поэтому $O^\Omega(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{C}_\Omega$. Отсюда $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Omega = \cup_{i\in I}\Omega_i$. Пусть для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M)$ верно $\Omega_i \subseteq \Delta$. Тогда $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Delta$. Значит $\mathfrak{K}(G/M) \subseteq \Delta \cap \Omega$ и $G \in \mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega}$; противоречие. Поэтому существует $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G/M)$, такой что $\Omega_j \cap \Delta = \varnothing$. Тогда из $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)$ и $G \in \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$ имеем $G^{\varphi(\Omega_j)} \in f_5(\Omega_j) = \varnothing$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{C}_{\Delta\cap\Omega} = \sigma_\Omega R(f_5, \varphi)$.

Определение 4. *Класс Фиттинга T-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$ называется σ_Ω-свободным или, коротко, $\sigma_\Omega Fr$-классом Фиттинга, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Omega_i{}'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и обозначается*

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(f) = (G \in \mathfrak{C} \mid\ O^{\Omega}(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \text{ и } O^{\Omega'_i}(G) \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)).$$

Обозначим направление $\sigma_\Omega Fr$-класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ через φ_0.

Определение 5. *Класс Фиттинга T-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$ называется σ_Ω-каноническим или, коротко, $\sigma_\Omega K$-классом Фиттинга, если $\varphi(\Omega_i) = \mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{\Omega_i{}'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и обозначается*

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KR(f) = (G \in \mathfrak{C} \mid\ O^{\Omega}(G) \in f(\sigma_\Omega{}') \text{ и } O^{\Omega_i,\Omega'_i}(G) \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)).$$

Обозначим направление $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ через φ_1.

Определение 6. *Направление φ σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп назовем r-направлением, если $\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i{}'}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Нетрудно проверить, что направления φ_0 $\sigma_\Omega Fr$-класса Фиттинга T-групп и φ_1 $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга T-групп являются r-направлениями.

Теорема 2. *Если φ — r-направление σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп, то для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\varphi(\Omega_i)$ является σ_Ω-расслоенным классом Фиттинга T-групп с направлением φ.*

Доказательство. Пусть φ — r-направление σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп, $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, $\mathfrak{F} = \varphi(\Omega_i)$, $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(h,\varphi)$, где h — $\sigma_\Omega R$-функция, имеющая следующее строение:

$$h(X) = \begin{cases} \mathfrak{F}, & \text{если } X \in \{\sigma_\Omega{}'\}; \\ (0), & \text{если } X \in \{\Omega_i\}; \\ \mathfrak{C}, & \text{если } X \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как, согласно определению 2, $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга T-групп и $O^\Omega(G) \lhd G$, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $Y \in \sigma_\Omega(G)$. Если $Y \in \{\Omega_i\}$, то из $G \in \mathfrak{F} = \varphi(\Omega_i) = \varphi(Y)$ следует, что $G^{\varphi(Y)} = \{0\} \in (0) = h(Y)$. Если $Y \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}$, то $G^{\varphi(Y)} \in \mathfrak{C} = h(Y)$. Согласно определению 3 получаем $G \in \sigma_\Omega R(h,\varphi) = \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $H \in \mathfrak{H}$. Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega(H)$, то по определению 3 $H^{\varphi(\Omega_i)} \in h(\Omega_i) = (0)$ и поэтому $H \in \varphi(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Пусть $\Omega_i \notin \sigma_\Omega(H)$. Так как, согласно условию теоремы, φ является r-направлением σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп, то $H \in \mathfrak{C}_{\Omega_i{}'} \subseteq \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_{\Omega_i{}'} = \varphi(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ — σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп с направлением φ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. $\square$

Теорема 3. *Пусть φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга T-групп $\varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega$ является σ_Ω-расслоенным классом Фиттинга с направлением φ.*

Доказательство. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$, $\mathfrak{M} = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega$, $\mathfrak{B} = \sigma_\Omega R(b,\varphi)$, где b — $\sigma_\Omega R$-функция такая, что

$$b(X) = \begin{cases} \varphi(\Omega_i), & \text{если } X \in \{\sigma_\Omega{}'\}; \\ \mathfrak{M}, & \text{если } X \in \sigma_\Omega. \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Пусть $M \in \mathfrak{M}$. Из $\mathfrak{M} = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega = \varphi(\Omega_i) \circ \mathfrak{C}_\Omega$ следует, что $O^\Omega(M) \in \varphi(\Omega_i) = b(\sigma_\Omega{}')$. Так как $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, то $M^{\varphi(\Omega_j)} \in \mathfrak{M} = b(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(M)$. Таким образом, $M \in \sigma_\Omega R(b,\varphi) = \mathfrak{B}$ и поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}$.

Пусть $B \in \mathfrak{B}$. Тогда $O^\Omega(B) \in b({\sigma_\Omega}') = \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $B \in \varphi(\Omega_i) \circ \mathfrak{C}_\Omega = \varphi(\Omega_i)\mathfrak{C}_\Omega = \mathfrak{M}$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M}$.

Таким образом, $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$. Тем самым установлено, что $\mathfrak{M}$ — σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп с направлением φ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. □

Теоремы 1 и 2 позволяют строить примеры σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп, в частности, примеры σ_Ω-свободных и σ_Ω-канонических классов Фиттинга T-групп.

Следствие 1. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{{\Omega_i}'}$ является σ_Ω-свободным классом Фиттинга T-групп.*

Следствие 2. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{{\Omega_i}'}$ является σ_Ω-каноническим классом Фиттинга T-групп.*

Следствие 3. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{{\Omega_i}'}\mathfrak{C}_\Omega$ является σ_Ω-свободным классом Фиттинга T-групп.*

Следствие 4. *Для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ класс Фиттинга $\mathfrak{C}_{\Omega_i}\mathfrak{C}_{{\Omega_i}'}\mathfrak{C}_\Omega$ является σ_Ω-каноническим классом Фиттинга T-групп.*

Замечание 1. *Пусть разбиение класса Ω имеет вид $\sigma_\Omega = \{(A) \mid A \in \Omega\}$. Тогда σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп превращается в Ω-расслоенный [7].*

Действительно, пусть $\sigma_\Omega = \{\Omega_i \mid i \in I\}$ — разбиение класса Ω, где $\Omega_i = (A), A \in \Omega$;

$$\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') \text{ и } G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(G))$$

$$\text{и } \mathfrak{H} = \Omega R(h, \psi) = (G \in \mathfrak{C} \mid O^\Omega(G) \in h(\Omega') \text{ и } G^{\psi(A)} \in h(A) \text{ для всех } A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)),$$

где h — такая ΩR-функция, что $h(\Omega') = f({\sigma_\Omega}')$ и $h(A) = f((A))$ для всех $A \in \Omega$; а ψ — FR-функция, для которой $\psi(A) = \varphi((A))$ и $\mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A)$ для всех $A \in \Omega$ [7]. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') = h(\Omega')$. Пусть $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Значит, существует $i \in I$, такой что $A \in \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G)$. Так как $A \in \Omega_i$, то $(A) = \Omega_i \in \sigma_\Omega$. Кроме того, из $A \in \mathfrak{K}(G)$ имеем $(A) \cap \mathfrak{K}(G) = \Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Поэтому $(A) = \Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Отсюда из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\psi(A)} = G^{\varphi((A))} = G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = f((A)) = h(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и, значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Заметим, что из определения 2 следует $\mathfrak{C}_{A'} = \mathfrak{C}_{{\Omega_i}'} \subseteq \varphi(\Omega_i) = \psi(A)$ для любого $A \in \Omega$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(G) \in h(\Omega') = f({\sigma_\Omega}')$. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, отсюда $\Omega_i \cap \mathfrak{K}(G) \neq \varnothing$. Так как $\Omega_i = (A)$, то $A \in \Omega_i \subseteq \Omega$ и $A \in \mathfrak{K}(G)$, значит, $A \in \Omega \cap \mathfrak{K}(G)$. Из $G \in \mathfrak{H}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} = G^{\varphi((A))} = G^{\psi(A)} \in h(A) = f((A)) = f(\Omega_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Заметим также, что из $\mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A)$ для всех $A \in \Omega$ следует $\mathfrak{C}_{{\Omega_i}'} = \mathfrak{C}_{A'} \subseteq \psi(A) = \varphi((A)) = \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

3.2. Минимальные спутники σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп

На множестве всех $\sigma_\Omega R$-функций и $\sigma_\Omega FR$-функций введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых таких функций μ_1 и μ_2 полагаем $\mu_1 \leqslant \mu_2$, если $\mu_1({\sigma_\Omega}') \subseteq \mu_2({\sigma_\Omega}')$ и $\mu_1(\Omega_i) \subseteq \mu_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Очевидно, что $\varphi_0 \leq \varphi_1$.

Дадим описание строения минимального элемента частично упорядоченного множества всех $\sigma_\Omega R$-функций.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$, φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(g, \varphi)$, где $g({\sigma_\Omega}') = f({\sigma_\Omega}') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i) \cap \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;

2) $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(h, \varphi)$, где $h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$ и $h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g,\varphi)$, где g – $\sigma_\Omega R$-функция из пункта 1) леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}')$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F}$. Поэтому $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') \cap \mathfrak{F} = g({\sigma_\Omega}')$. Также из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поскольку $G^{\varphi(\Omega_i)} \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \cap \mathfrak{F} = g(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^\Omega(G) \in g({\sigma_\Omega}') \subseteq f({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in g(\Omega_i) \subseteq f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(h,\varphi)$, где h – $\sigma_\Omega R$-функция, описанная в пункте 2) леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\Omega(G) \lhd G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\Omega(G) \in \mathfrak{F} = h({\sigma_\Omega}')$. Из $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = h(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_2$ и G – T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_2 \backslash \mathfrak{F}$. Тогда T-группа G является комонолитической с комонолитом $M = G_\mathfrak{F}$. Поскольку $G \in \mathfrak{F}_2$, то $O^\Omega(G) \in h({\sigma_\Omega}') = \mathfrak{F}$, и значит, $O^\Omega(G) \subseteq M$. Тогда $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{E}_\Omega$ и по [6, лемма 2, п. 5)] $O^\Omega(G) = O^\Omega(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^\Omega(G) = O^\Omega(M) \in f({\sigma_\Omega}')$. Из $G \in \mathfrak{F}_2$ следует $G^{\varphi(\Omega_i)} \in h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$. □

Пусть $\{f_j | j \in J\}$ – произвольный набор $\sigma_\Omega R$-функций. Обозначим через $\cap_{j\in J} f_j$ такую $\sigma_\Omega R$-функцию f, что $f({\sigma_\Omega}') = \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}')$ и $f(\Omega_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Лемма 2. *Пусть φ – произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция, $\mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, где $\mathfrak{F}_j = \sigma_\Omega R(f_j,\varphi)$, $j \in J$. Тогда $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$, где $f = \cap_{j\in J} f_j$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j$, тогда $G \in \mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$. Значит, для всех $j \in J$ имеем $O^\Omega(G) \in f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $O^\Omega(G) \in \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}') =$ $= f({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть $G \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f({\sigma_\Omega}') = \cap_{j\in J} f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) = \cap_{j\in J} f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Отсюда для всех $j \in J$ следует, что $O^\Omega(G) \in f_j({\sigma_\Omega}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_j(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_j$ для всех $j \in J$, и значит, $G \in \cap_{j\in J}\mathfrak{F}_j = \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Определение 7. *Спутник f класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$ называется минимальным спутником, если f является минимальным элементом множества всех спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое можество T-групп. Тогда $fit(\mathfrak{X})$ — пересечение всех классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\sigma_\Omega R(\mathfrak{X},\varphi)$ пересечение всех σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга с направлением φ, содержащих $\mathfrak{X}$.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп и φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция. Тогда σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X},\varphi)$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$$f({\sigma_\Omega}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. В виду примера 2 множество $\mathfrak{C}$ является σ_Ω-расслоенным классом Фиттинга T-групп с направлением φ. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi)$ существует, и множество $\mathfrak{L}$ всех его спутников не пусто. Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из $\mathfrak{L}$. По лемме 2 $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$. Так как $f_1 \leq f_i$ для любого $f_i \in \mathfrak{L}$, то f_1 – наименьший элемент частично упорядоченного множества $\mathfrak{L}$ и, значит, единственный минимальный спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Пусть f – $\sigma_\Omega R$-функция, указанная в заключении теоремы, и $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Пусть $M \in \mathfrak{X}$, тогда в силу строения f получим $O^\Omega(M) \in f(\sigma_\Omega{}')$ и из $\sigma_\Omega(M) \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$ следует, что $M^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(\mathfrak{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{H}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то для любой T-группы $G \in \mathfrak{X}$ верно $O^\Omega(G) \in f_1(\sigma_\Omega{}')$. Отсюда $f(\sigma_\Omega{}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\sigma_\Omega{}')$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$. Тогда найдется такая T-группа $H \in \mathfrak{X}$, что $\Omega_i \in \sigma_\Omega(H)$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, значит $H^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i)$. Поэтому $f_1(\Omega_i) \neq \varnothing$.

Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$, то из $G \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$ получаем $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i)$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}) \setminus \sigma_\Omega(G)$. Тогда $G \in \mathfrak{C}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ и, значит, $G^{\varphi(\Omega_i)} = \{0\} \in f_1(\Omega_i)$. Так как $f_1(\Omega_i)$ – класс Фиттинга, то $f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(\Omega_i)$.

Если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{X})$, то $f(\Omega_i) = \oslash \subseteq f_1(\Omega_i)$.

Следовательно, $f \leq f_1$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $S \in \mathfrak{H}$. Тогда $O^\Omega(S) \in f(\sigma_\Omega{}') \subseteq f_1(\sigma_\Omega{}')$ и $S^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \subseteq f_1(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(S)$. Значит, $S \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Таким образом, из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поэтому, $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi)$, и значит, $f \in \mathfrak{L}$. Так как f_1 – единственный минимальный элемент в $\mathfrak{L}$, то из $f \leq f_1$ следует $f = f_1$. □

Следствие 5. *Пусть f_i – минимальный спутник σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ, где φ — произвольная $\sigma_\Omega FR$-функция, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Покажем, что $f_1 \leq f_2$.

Так как $\mathfrak{F}_1 \subseteq \sigma_\Omega R(\mathfrak{F}_1, \varphi)$ и $\mathfrak{F}_2 \subseteq \sigma_\Omega R(\mathfrak{F}_2, \varphi)$, то по теореме 4

$$f_1(\sigma_\Omega{}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\sigma_\Omega{}'),$$

$$f_1(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{F}_1) \subseteq fit(G^{\varphi(\Omega_i)} | G \in \mathfrak{F}_2) = f_2(\Omega_i) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_1) \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_2),$$

$$f_1(\Omega_i) = \oslash \subseteq f_2(\Omega_i), \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{F}_1).$$

Следовательно, $f_1 \leq f_2$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(f_1, \varphi)$, $\mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega R(f_2, \varphi)$ и $f_1 \leq f_2$, т.е. $f_1(\sigma_\Omega{}') \subseteq f_2(\sigma_\Omega{}')$ и $f_1(\Omega_i) \subseteq f_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$, тогда $O^\Omega(G) \in f_1(\sigma_\Omega{}') \subseteq f_2(\sigma_\Omega{}')$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f_1(\Omega_i) \subseteq f_2(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда σ_Ω-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$$f(\sigma_\Omega{}') = fit(O^\Omega(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i'}(G) | G \in \mathfrak{X}) \textit{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \textit{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

Следствие 7. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс T-групп. Тогда σ_Ω-канонический класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega KR(\mathfrak{X})$ обладает единственным минимальным спутником f таким, что*

$$f({\sigma_\Omega}') = fit(O^{\Omega}(G) | G \in \mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i,\Omega_i'}(G) | G \in \mathfrak{X}) \text{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{X}),$$

$$f(\Omega_i) = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \backslash \sigma_\Omega(\mathfrak{X}).$$

3.3. Внутренние спутники σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп

Определение 8. *Спутник f σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ называется внутренним, если $f({\sigma_\Omega}') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Замечание 2. *Из леммы 1 следует, что каждый σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп обладает внутренним спутником.*

Дадим описание строения внутренних спутников σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп для некоторых направлений.

Следуя работе [20] введем следующее определение.

Определение 9. *Направление φ σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп назовем:*
1) a-направлением, если $\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;
2) b_{Ω_i}-направлением, если $\mathfrak{E}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$ для некоторого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;
3) b-направлением, если $\mathfrak{E}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;
4) $i_1 i_2 \ldots i_k$-направлением, если φ является i_j-направлением для любого $j = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 3. *Очевидно, что всякое b-направление является a-направлением, а направление φ_1 $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга есть b-направление.*

Лемма 3. *Пусть f — внутренний спутник σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ с ar-направлением φ. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Так как f — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ — формация, то $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \diamond \mathfrak{E}_{\Omega_i}$ является классом Фиттинга.

Допустим, что $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая T-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Причем из $f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ по [6, лемма 2, п. 2)] $G_{f(\Omega_i)} \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$.

Поскольку $G \in f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \diamond \mathfrak{E}_{\Omega_i}$, то $G/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{E}_{\Omega_i}$. Поэтому $G/M \cong G/G_{f(\Omega_i)}/M/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\Omega}$. По [6, лемма 2, п. 5)] имеем $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F}$, то $O^{\Omega}(G) = O^{\Omega}(M) \in f({\sigma_\Omega}')$.

По условию φ является a-направлением, значит $\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$. По [6, лемма 2, п. 1)] $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq G^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}} = O^{\Omega_i}(G)$. Так как $G/G_{f(\Omega_i)} \in \mathfrak{E}_{\Omega_i}$, то $O^{\Omega_i}(G) \subseteq G_{f(\Omega_i)}$. Таким образом, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq O^{\Omega_i}(G) \subseteq G_{f(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$.

Пусть $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G) \setminus \{\Omega_i\}$. Поскольку из $G/O^{\Omega_i}(G) = G/G^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}} \in \mathfrak{E}_{\Omega_i}$ следует $\mathfrak{K}(G/O^{\Omega_i}(G)) \subseteq \Omega_i$, то $\Omega_j \in \sigma_\Omega(O^{\Omega_i}(G))$. Так как φ — r-направление, т.е. $\varphi(\Omega_j)\mathfrak{E}_{\Omega_j'} = \varphi(\Omega_j)$ и $G/O^{\Omega_i}(G) \in \mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\Omega_j'}$, то по [6, лемма 2, п. 9)] $G^{\varphi(\Omega_j)} = (O^{\Omega_i}(G))^{\varphi(\Omega_j)}$. Из того, что $O^{\Omega_i}(G) \in f(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $(O^{\Omega_i}(G))^{\varphi(\Omega_j)} \in f(\Omega_j)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_j)} \in f(\Omega_j)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Следовательно, $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. □

Следствие 8. *Пусть f — внутренний спутник σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ с r-направлением φ, таким что $\varphi_1 \le \varphi$. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть φ – r-направление класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$, такое что $\varphi_1 \leq \varphi$. Тогда $\varphi_1(\Omega_i) = \mathfrak{E}_{\Omega_i}\mathfrak{E}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Поскольку $\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ и $\mathfrak{E}_{\Omega_i'}$ – классы Фиттинга, то $\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{E}_{\Omega_i} \diamond \mathfrak{E}_{\Omega_i'} = \mathfrak{E}_{\Omega_i}\mathfrak{E}_{\Omega_i'} \subseteq \varphi(\Omega_i)$, отсюда $\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \varphi(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Таким образом, φ является ar-направлением и, по лемме 3, утверждение верно. □

Следствие 9. *Пусть f — внутренний спутник σ_Ω-канонического класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$. Тогда $f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$ с b_{Ω_i}-направлением φ, $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$ для любой T-группы G;

2) $\mathfrak{F}$ обладает спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}')$, $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ и $g(\Omega_j) = f(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega \setminus \{\Omega_i\}$.

Доказательство. 1) Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega$ и $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = R$. Тогда $R \subseteq G^{\varphi(\Omega_i)}$. Так как $\varphi(\Omega_i)$ — формация Фиттинга, то $G/G^{\varphi(\Omega_i)} \in \varphi(\Omega_i)$. Кроме того, $G^{\varphi(\Omega_i)}/R = G^{\varphi(\Omega_i)}/O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) \in \mathfrak{E}_{\Omega_i}$. Так как φ — b_{Ω_i}-направление, то из $G/G^{\varphi(\Omega_i)} \cong G/R/G^{\varphi(\Omega_i)}/R$ имеем $G/R \in \mathfrak{E}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i) = \varphi(\Omega_i)$. Следовательно, $G^{\varphi(\Omega_i)} \subseteq R$. Поэтому $R = G^{\varphi(\Omega_i)}$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g,\varphi)$, где g — $\sigma_\Omega R$-функция из заключения леммы. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $O^\Omega(G) \in f(\sigma_\Omega{}') = g(\sigma_\Omega{}')$, $G^{\varphi(\Omega_j)} \in$ $\in f(\Omega_j) = g(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)\setminus\{\Omega_i\}$ и $G^{\varphi(\Omega_i)} = G^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}\varphi(\Omega_i)} = G^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}\circ\varphi(\Omega_i)} = (G^{\varphi(\Omega_i)})^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}} \in$ $\in f(\Omega_i)$, т.е. $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i) \circ \mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = g(\Omega_i)$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая T-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega R(g,\varphi)$, то $O^\Omega(G) \in g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}')$ и $G^{\varphi(\Omega_j)} \in g(\Omega_j)$ для любого $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G)$. Если $\Omega_j \in \sigma_\Omega(G) \setminus \{\Omega_i\}$, то $G^{\varphi(\Omega_j)} \in g(\Omega_j) = f(\Omega_j)$. В противном случае $G^{\varphi(\Omega_i)} \in g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i) \circ \mathfrak{E}_{\Omega_i}$. Поэтому $(G^{\varphi(\Omega_i)})^{\mathfrak{E}_{\Omega_i}} = O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) \in f(\Omega_i)$. По п. 1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$, значит $G^{\varphi(\Omega_i)} \in f(\Omega_i)$.

В любом случае $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. □

Следствие 10. *Пусть $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f,\varphi)$ с b-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) $O^{\Omega_i}(G^{\varphi(\Omega_i)}) = G^{\varphi(\Omega_i)}$ для любой T-группы G и любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$;

2) $\mathfrak{F}$ обладает спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}')$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Следствие 11. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ_Ω-канонический класс Фиттинга T-групп со спутником f. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}')$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Следствие 12. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-канонический класс Фиттинга T-групп с внутренним спутником f. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.*

Доказательство. Пусть f — внутренний спутник $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. В силу леммы 1 можем считать, что $f(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$. По следствию 11 $\mathfrak{F}$ обладает спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = f(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$ и $g(\Omega_i) = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. В виду следствия 9 g — внутренний спутник $\sigma_\Omega K$-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Теорема 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп с br-направлением φ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником g, таким что*

$$g(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F},$$

$$g(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\Omega_i} \textit{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}),$$

$$g(\Omega_i) = \varnothing, \textit{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп. По теореме 4 $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником f, таким что $f(\sigma_\Omega{}') = fit(O^\Omega(G)|G \in \mathfrak{F})$, $f(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $f(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.

В виду леммы 1 класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma_\Omega R(f, \varphi) = \sigma_\Omega R(h, \varphi)$, где $h(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$, $h(\Omega_i) = f(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$.

Теперь, учитывая следствие 10, $\mathfrak{F}$ обладает спутником g, таким что

$$g(\sigma_\Omega{}') = h(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F},$$

$$g(\Omega_i) = h(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\Omega_i} \text{ для любого } \Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}),$$

$$g(\Omega_i) = h(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = f(\Omega_i)\mathfrak{E}_{\Omega_i} = \varnothing\mathfrak{E}_{\Omega_i} = \varnothing, \text{ если } \Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F}).$$

Так как f — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то, применяя замечание 3 и лемму 3, заключаем, что g — внутренний спутник σ_Ω-расслоенного класс Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Следствие 13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-расслоенный класс Фиттинга T-групп с ar-направлением φ. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$, $g(\Omega_i) = fit(G^{\varphi(\Omega_i)}|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $g(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.*

Следствие 14. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-канонический класс Фиттинга T-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает внутренним спутником g, таким что $g(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$, $g(\Omega_i) = fit(O^{\Omega_i, \Omega_i{}'}(G)|G \in \mathfrak{F})\mathfrak{E}_{\Omega_i}$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ и $g(\Omega_i) = \varnothing$, если $\Omega_i \in \sigma_\Omega \setminus \sigma_\Omega(\mathfrak{F})$.*

Определение 10. *Спутник f σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}$ называется максимальным внутренним спутником, если f является максимальным элементом множества всех внутренних спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — σ_Ω-свободный класс Фиттинга T-групп. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным максимальным внутренним спутником h, таким что*

$$h(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F} \textit{ и } h(\Omega_i) = \mathfrak{F} \textit{ для всех } \Omega_i \in \sigma_\Omega.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$, где h — $\sigma_\Omega R$-функция, описанная в заключении теоремы. По следствию 6 σ_Ω-свободный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным спутником, обозначим его через m. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Сначала покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F} = \sigma_\Omega FrR(m)$, тогда по следствию 6 и лемме 1 $O^\Omega(G) \in m(\sigma_\Omega{}') \subseteq \mathfrak{F} = h(\sigma_\Omega{}')$ и $O^{\Omega_i'}(G) \in m(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Поэтому $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$ и, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{H}$ и G — T-группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая T-группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$, то $O^\Omega(G) \in h(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}$. Поэтому $O^\Omega(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^\Omega(G)/M/O^\Omega(G) \in \mathfrak{E}_\Omega$.

Пусть $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G/M) \subseteq \sigma_\Omega(G)$. Тогда из $G \in \mathfrak{H} = \sigma_\Omega FrR(h)$ следует $O^{\Omega_i'}(G) \in h(\Omega_i) = \mathfrak{F}$. Отсюда $O^{\Omega_i'}(G) \subseteq M$ и $G/M \cong G/O^{\Omega_i'}(G)/M/O^{\Omega_i'}(G) \in \mathfrak{E}_{\Omega_i'}$; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Покажем, что h — единственный максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Пусть g — внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Тогда $g(\sigma_\Omega{}') \subseteq \mathfrak{F} = h(\sigma_\Omega{}')$ и $g(\Omega_i) \subseteq \mathfrak{F} = h(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Поэтому $g \leq h$. Таким образом, h — наибольший элемент частично упорядоченного множества всех внутренних спутников класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, и, значит, h — единственный максимальный внутренний спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. □

Следствие 15. *Пусть h_i — максимальный внутренний спутник σ_Ω-свободного класса Фиттинга T-групп $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $h_1 \leq h_2$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega FrR(h_1) \subseteq \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$, покажем, что $h_1 \leq h_2$. По теореме 6 $h_1(\sigma_\Omega{}') = \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 = h_2(\sigma_\Omega{}')$ и $h_1(\Omega_i) = \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 = h_2(\Omega_i)$ для всех $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Следовательно, $h_1 \leq h_2$.

Достаточность. Пусть $h_1 \leq h_2$, т.е. $h_1(\sigma_\Omega{}') \subseteq h_2(\sigma_\Omega{}')$ и $h_1(\Omega_i) \subseteq h_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 = \sigma_\Omega FrR(h_1) \subseteq \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$. Пусть $G \in \sigma_\Omega FrR(h_1)$, тогда $O^\Omega(G) \in h_1(\sigma_\Omega{}') \subseteq h_2(\sigma_\Omega{}')$ и $O^{\Omega_i'}(G) \in h_1(\Omega_i) \subseteq h_2(\Omega_i)$ для любого $\Omega_i \in \sigma_\Omega(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_2 = \sigma_\Omega FrR(h_2)$ и, следовательно, $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. □

4. Заключение

Понятие σ_Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп обобщает понятие Ω-расслоенного класса Фиттинга T-групп. Дальнейшие исследования σ_Ω-расслоенных классов Фиттинга T-групп могут быть продолжены в направлении изучения их произведений и решеток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Zeitschr. 1963. Vol. 80. P. 300–305.

2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 19, iss. 3. P. 193–207.

3. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43, № 4. С. 5–8.

4. Ведерников В. А., Сорокина М. М. Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискрет. математика. 2001. Т. 13, № 3. С. 125–144.

5. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43–60.

6. Ведерников В. А., Демина Е. Н. Ω-расслоенные формации мультиоператорных T-групп // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 990–1009.

7. Бажанова Е. Н., Ведерников В. А. Ω-расслоенные классы Фиттинга T-групп // Сиб. электр. мат. известия. 2017. Т. 14. С. 629–639.

8. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // Problems of Physics, Mathematics and Technics. 2018. Vol. 1, № 34. P. 79–82.

9. Камозина О. В. $\Omega\zeta$-расслоенные классы Фиттинга // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 4. С. 424–433.

10. Камозина О. В. $\omega\sigma$-веерные классы Фиттинга // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 4. С. 107–116.

11. Сорокина М. М., Горепекина А. А. $\overline{\omega}$-веерные формации конечных групп // Чебышевский сб. 2021. Т. 22, № 3. С. 232–244.

12. Нестеров А. С., Сорокина М. М. Построение $\overline{\Omega}$-расслоенных формаций конечных групп // Ученые записки Брянского гос. ун-та. 2023. Т. 2. С. 7–12.

13. Бажанова Е. Н. Минимальные спутники $\Omega\sigma$-расслоенных классов Фиттинга мультиоператорных T-групп // Материалы II Всероссийской научно-практической конференции «Математика в современном мире», посвященной 160-летию Д.А. Граве. Вологда: ВоГУ, 2023, С. 9–11.

14. Бажанова Е. Н., Сорокина М. М. О σ_Ω-расслоенных классах Фиттинга T-групп // Материалы Междунар. науч.-практич. конф. «Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике». Брест: БрГУ, 2024, С. 6–9.

15. Higgins P. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6, iss. 3. P. 366–416.

16. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. СПб.: Лань, 2002. 556 с.

17. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.

18. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New Jork: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.

19. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Буларуская навука, 1997. 240 с.

20. Ведерников В. А. Максимальные спутники Ω-расслоенные формаций и классов Фиттинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 2. С. 55–71.

REFERENCES

1. Gaschütz, W., 1963. “Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen”, *Math. Zeitschr.*, vol. 80, pp. 300–305.

2. Hartley, B., 1969. “On Fischer’s dualization of formation theory”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, iss. 3, pp. 193–207.

3. Skiba, A. N., Shemetkov, L. A., 1999. “Partially composition formations of finite groups”, *Doclady of the national academy of science of Belarus*, vol. 43, no. 4, pp. 5–8.

4. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M., 2001. “Ω-Foliated formations and Fitting classes of finite groups”, *Discrete Math. Appl.*, vol. 11, no. 5, pp. 507–527.

5. Vedernikov, V. A., Sorokina, M. M., 2002. “ω-Fibered Formations and Fitting Classes of Finite Groups”, *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 39–55.

6. Vedernikov, V. A., Demina, E. N., 2010. “Ω-Foliated formations of multioperator T-groups”, *Siberian Math. Journal*, vol. 51, no. 5, pp. 789–804.

7. Bazhanova, E. N., Vedernikov, V. A., 2017. “Ω-Foliated Fitting classes of T-groups”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, vol. 14, pp. 629–639.

8. Skiba, A. N., 2018. “On one generalization of the local formations”, *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, vol. 1, no. 34, P. 79–82.

9. Kamozina, O. V., 2020. “$\Omega\zeta$-foliated Fitting classes”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta novaya seriya-Matematika Mekhanika Informatika*, vol. 4, iss. 4, pp. 424–433.

10. Kamozina, O. V., 2020. “$\omega\sigma$-fibered Fitting classes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. С. 107–116.

11. Sorokina, M. M., Gorepekina, A. A., 2021. “$\overline{\omega}$-fibered formations of finite groups”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 232–244.

12. Nesterov, A. S., Sorokina, M. M., 2023. “Construction of $\overline{\Omega}$-foliated formations of finite groups”, *Uchenie zapiski Bryanskogo gosudarstvennogo universiteta*, vol. 2, pp. 7–12.

13. Bazhanova, E. N., 2023. “Minimal satellites of $\Omega\sigma$-foliated Fitting classes of multioperator T-groups”, *Materiali II Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferencii «Matematika v sovremennom mire», posvyachennoi 160-letiu D.A. Grave*, Vologda: VoSU, pp. 9–11.

14. Bazhanova, E. N., Sorokina, M. M., 2024. “σ_Ω-foliated Fitting Classes of T-groups”, *Materiali Mezhdynarodnoi nauchno-prakticheskoi konferencii «Matematicheskoe modelirovanie i novie obrazovatelnie tehnologii v matematike»*, Brest: BSU, pp. 6–9.

15. Higgins, P. J., 1956. “Groups with multiple operators”, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 6, iss. 3, pp. 366–416.

16. Kurosh, A. G., 2002. *Lectures on general algebra*, Lan, Saint-Petersburg, 556 p.

17. Shemetkov, L. A., Skiba, A. N., 1989. *Formations of algebraic systems*, Nauka, Moscow, 256 p.

18. Doerk, K., Hawkes, T., 1992. *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New Jork, 891 p.

19. Skiba, A. N., 1997. *Алгебра формаций*, Belarusskaya Nauka, Minsk, 240 p.

20. Vedernikov, V. A., 2001. “Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 2, pp. 217–233.

Получено: 27.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024