ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 5.

УДК 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-5-15

Некорректность задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения

С. А. Алдашев

Алдашев Серик Аймурзаевич — доктор физико-математических наук, Институт математики и математического моделирования КН МНВО РК (г. Алматы).
e-mail: aldash51@mail.ru

Аннотация

Известно, что при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Если же среда обладает большой проводимостью, то приходим к многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводится к многомерным гиперболо-параболическим уравнениям.

Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями.

Изучение процесса распространения тепла в среде, заполненной массой, приводит к многомерным параболическим уравнениям.

Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к многомерным гиперболо-параболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, а их многомерные аналоги исследованы мало. Задача Трикоми для указанных уравнений на плоскости ранее исследована, но насколько нам известно, в пространстве не изучена. В данной работе показано, что для многомерного модельного смешанного гиперболо-параболического уравнения задача Трикоми разрешима неоднозначно. Приводится явный вид этого решения.

Ключевые слова: задача Трикоми, многомерное уравнение, разрешимость, сферические функции.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
Алдашев, С.А. Некорректность задачи Трикоми для многомерного гиперболо-параболического уравнения // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 5, с. 5–15.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 5.

UDC 517.956 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-5-5-15

Ill-posedness of the Tricomi problem for a multidimensional mixed hyperbolic-parabolic equation

S. A. Aldashev

Aldashev Serik Aimurzaevich — doctor of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Almaty).
e-mail: aldash51@mail.ru

Abstract

It is known that in mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the environment. If the medium is non-conducting, then we obtain multidimensional hyperbolic equations. If the medium has high conductivity, then we come to multidimensional parabolic equations.

Consequently, the analysis of electromagnetic fields in complex media (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to multidimensional hyperbolic-parabolic equations.

It is also known that vibrations of elastic membranes in space according to Hamilton's principle can be modeled by multidimensional hyperbolic equations.

The study of the process of heat propagation in a medium filled with mass leads to multidimensional parabolic equations.

Consequently, studying the mathematical modeling of the heat propagation process in vibrating elastic membranes, we also come to multidimensional hyperbolic-parabolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain an explicit representation of the solutions of the problems under study.

Boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations in the plane are well-explored, but their multidimensional analogues have been studied very little. The Tricomi problem for the above equations has been previously investigated on a plane, but far as is known, this problem in space has not been analyzed. In this paper, we show that for the multidimensional model mixed hyperbolic-parabolic equation, the Tricomi problem is non-uniquely solvable. An explicit form of this solution is provided.

Keywords: Tricomi problem, multidimensional equation, solvability, spherical functions.

Bibliography: 11 titles.

For citation:
Aldashev, S. A. 2024, "Ill-posedness of the Tricomi problem for a multidimensional hyperbolic-parabolic equation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 5, pp. 5–15.

1. Введение

Краевые задачи для гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены (см. [1], где исследованы задача Трикоми и первая краевая задача). Их аналоги в пространстве исследованы мало ([2]).

В данной статье найдена многомерная смешанная область, в которой задача Трикоми разрешима не однозначно для гиперболо-параболического уравнения. Приводится явный вид полученного классического решения.

2. Постановка задачи и результат

Пусть $D_\varepsilon-$ конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная в полупространстве $t>0$ конусами $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$, $0\leq t\leq\frac{(1-\varepsilon)}{2}$, а при $t<0-$ цилиндрической поверхностью $\Gamma=\{(x,t):|x|=1\}$ и плоскостью $t=t_0<0$, где $|x|-$ длина вектора $x=(x_1,...,x_m)$, а $0<\varepsilon<1$.

Обозначим через D_ε^+ и D^- части области D_ε, лежащие соответственно в полупространствах $t>0$ и $t<0$. Части конусов $|x|=t+\varepsilon$, $|x|=1-t$, ограничивающих области D_ε^+, обозначим через S^ε и S^1 соответственно. Пусть $S_\varepsilon=\{(x,t):t=0,\,\varepsilon<|x|<1\}$.

В области D_ε рассмотрим модельное смешанное гиперболо-параболическое уравнение

$$0=\left\{\begin{array}{l}\Delta_x u-u_{tt},\ t>0,\\ \Delta_x u-u_t,\ t<0,\end{array}\right. \tag{1}$$

где Δ_x- оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m,\ m\geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leq\pi$, $i=2,3,...,m-1$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Следуя ([1]) в качестве многомерного аналога задачи Трикоми рассмотрим следующую задачу.

Задача T. Найти решения уравнения (1) в области D_ε при $t\neq 0$ из класса $C(\bar{D}_\varepsilon)\cap C^1(D_\varepsilon)\cap C^2(D_\varepsilon^+\cup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon}=\varphi(r,\theta),\ u|_\Gamma=\psi(t,\theta). \tag{2}$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant$ $\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...-$ пространства Соболева, а $\tilde{S}_\varepsilon=\{(r,\theta)\in S_\varepsilon,\,\varepsilon<r<\frac{(1+\varepsilon)}{2}\}$.

Имеет место ([3])

Лемма. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S_\varepsilon)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\bar{\varphi}_n^k(r)$, $\psi_n^k(t)$, $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $\varphi(r,\theta)$, $\psi(r,\theta)$, $\tau(r,\theta)=u(r,\theta,0)$, $\nu(r,\theta)=u_t(r,\theta,0)$.

Введем множество функций

$$B^l(S_\varepsilon)=\{f(r,\theta):f\in W_2^l(S_\varepsilon),\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}(||f_n^k(r)||^2_{C^2((\varepsilon,1))}+$$

$$+||f_n^k(r)||^2_{C([\varepsilon,1])})\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty, l\geq m-1.\}$$

Тогда справедлива

Теорема. Если $\varphi(r,\theta)\in B^l(\tilde{S}_\varepsilon)$, $\psi(r,\theta)\in W^l(\Gamma)$, $l\geq m+1$, то задача T разрешима неоднозначно. Отметим, что в [4] построены примеры, которые показывают, что однородная задача T имеет бесчисленное множество решений.

3. Доказательство теоремы

В сферических координатах уравнение (1) в области D_ε^+ имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} = 0, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

При $t \to -0$ на S_ε получим функциональное соотношение между $\tau(r,\theta)$ и $\nu(r,\theta)$ вида

$$\tau_{rr} + \frac{m-1}{r}\tau_r - \frac{1}{r^2}\delta\tau = \nu(r,\theta),\ 0 < r < 1. \tag{5}$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, ...$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи Т в области D_ε^+ принадлежит классу $C(D_\varepsilon^+ \cup S_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon^+)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (4) и (5), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k = 0, \tag{7}$$

$$\bar{\tau}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r}\bar{\tau}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\tau}_n^k = \bar{\nu}_n^k(r),\ 0 < r < 1, \tag{8}$$

при этом первое условие краевого условия (2) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, r-\varepsilon) = \bar{\varphi}_n^k(r),\ \varepsilon \le r \le \frac{(1+\varepsilon)}{2},\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

В (7)-(9) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ соответственно получим

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi+\eta)^2}u_n^k = 0,\ \frac{\varepsilon}{2} < \eta < \xi < \frac{1}{2}, \tag{10}$$

$$\tau_{n\xi\xi}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{\xi^2}\tau_n^k = \nu_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \tag{11}$$

$$u_n^k(\xi, \frac{\varepsilon}{2}) = \varphi_n^k(\xi),\ \frac{\varepsilon}{2} \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(2\xi),\ \nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi),\ \varphi_n^k(\xi) = (\xi + \frac{\varepsilon}{2})^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\varphi}_n^k(\xi + \frac{\varepsilon}{2}),$$

$$\bar{\lambda}_n = ((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)/4,\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \ldots .$$

Используя общее решение уравнения (10) полученное в [5], в работе [6] показано, что решение задачи Коши для уравнения (10) имеет вид

$$\begin{gathered} u_n^k(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R(\eta,\eta,;\xi,\eta)+\frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R(\xi,\xi,;\xi,\eta)+ \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{\eta}^{\xi}[\nu_n^k(\xi_1)R(\xi_1,\xi_1;\xi,\eta)-\tau_n^k(\xi_1)\frac{\partial}{\partial N}R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta)|_{\xi_1=\eta_1}]d\xi_1, \end{gathered} \tag{13}$$

где $R(\xi,\eta_1;\xi,\eta)=P_\mu\left[\frac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (10) ([7]), а $P_\mu(z)$– функция Лежандра, $\mu=n+\frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N}|_{\xi_1=\eta_1}=\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\eta_1}+\frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$– нормаль к прямой $\xi=\eta$ в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Далее из (2), (12) получим

$$\tau_n^k(\frac{\varepsilon}{2})=\varphi_n^k(\frac{\varepsilon}{2}),\ \tau_n^k(\frac{1}{2})=\psi_n^k(0),\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=0,1,\dots. \tag{14}$$

Решение уравнение (11) записывается в виде ([8])

$$\tau_n^k(\varepsilon)=\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+C_{1n}^k\xi^{s_1}+C_{2n}^k\xi^{s_2},\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2}, \tag{15}$$

$s_1=n+\frac{(m-1)}{2}$, $s_2=-n-\frac{(m-3)}{2}$, C_{1n}^k, C_{2n}^k– произвольные независимые постоянные.

Подставляя (14) в (15) для C_{1n}^k, C_{2n}^k получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_1}C_{1n}^k+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{s_2}C_{2n}^k=\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s_1}C_{1n}^k+\left(\frac{1}{2}\right)^{s_2}C_{2n}^k=\psi_n^k(0)-\frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1, \end{cases}$$

из которого найдем

$$\begin{gathered} C_{1n}^k=[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\varepsilon^{s_2}2^{s_1}(A_n^k-\psi_n^k(0)/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}), \\ C_{2n}^k=[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}(\psi_n^k(0)-A_n^k)-2^{s_2}\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)]/(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2}), \\ \frac{1}{s_2-s_1}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{-s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1=A_n^k=const, \end{gathered} \tag{16}$$

Из (13), (15), учитывая условие (12) будем иметь

$$\begin{gathered} f_n^k(\xi)=\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^{s_2}\xi_1^{3-s_2}-\xi^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+\sqrt{2}(s_2-s_1)\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1- \\ -\frac{(2\xi-\varepsilon)}{2\xi+\varepsilon}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\left\{\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi_1^{s_2-1}\xi_2^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_2^{3-s_1})P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]\right\}\nu_n^k(\xi_2)d\xi_2, \end{gathered} \tag{17}$$

где

$$f_n^k(\xi)=(s_2-s_1)\{2\varphi_n^k(\xi)-\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-C_{1n}^k\xi^{s_1}-C_{2n}^k\xi^{s_2}+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}C_{1n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}C_{2n}^k\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]d\xi_1\Bigg\}.$$

Продифференцировав уравнение (17) по ξ, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\chi_n^k(\xi)=\nu_n^k(\xi)+\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1,\ \frac{\varepsilon}{2}<\xi<\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)\chi_n^k(\xi)=\frac{df_n^k}{d\xi},\ \sqrt{2}(s_2-s_1)G_n(\xi,\xi_1)=s_2\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-s_1\xi^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1}+$$
$$+\sqrt{2}(s_2-s_1)\frac{(\varepsilon^2-4\xi_1^2)}{\xi_1(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right]-\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)}(\xi^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_1^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})-$$
$$-\int\limits_{\xi_1}^{\xi}(\xi_2^{s_2-1}\xi_1^{3-s_2}-\xi_2^{s_1-1}\xi_1^{3-s_1})\Bigg[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)+$$
$$+\frac{(2\xi-\varepsilon)(\varepsilon^2-4\xi_2^2)}{\xi_2(2\xi+\varepsilon)^3}P''_\mu\left(\frac{\xi_2^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_2(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)\Bigg]d\xi_2,$$

из которого найдем

$$\nu_n^k(\xi)=\chi_n^k(\xi)-\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}R_n(\xi,\xi_1;-1)\chi_n^k(\xi_1)d\xi_1, \tag{18}$$

где $R_n(\xi,\xi_1;-1)-$ резольвента ядра $G_n(\xi,\xi_1)$.

Далее из (16)-(18) имеем

$$\sqrt{2}(s_2-s_1)^2A_n^k=\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{1}{2}}(2^{-s_2}\xi_1^{3-s_2}-2^{s_1}\xi_1^{3-s_1})\left[\frac{df_n^k}{d\xi_1}-\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi_1}R_n(\xi_1,\xi_2;-1)\frac{df_n^k}{d\xi_2}d\xi_2\right]d\xi_1, \tag{19}$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(\varepsilon^{s_1}-\varepsilon^{s_2})}{(s_2-s_1)}\frac{df_n^k}{\xi}=\Biggl\{\varepsilon^{s_1}2^{s_1}\Biggl[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\\
+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Biggr]-\\
-\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\Biggl[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\\
+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\xi^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Biggr]A_n^k+2\frac{d\varphi_n^k}{d\xi}+\\
+\Biggl[\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_1-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_1\right)\xi^{s_1-1}\\
+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_1-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Biggr]\left[2^{s_1}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\varepsilon^{s_2}2^{s_1}\psi_n^k(0)\right]+\\
+\Biggl[-\frac{4\varepsilon}{(2\xi+\varepsilon)^2}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}\xi_1^{s_2-1}P'_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1+\left(\frac{2\xi-\varepsilon}{2\xi+\varepsilon}-s_2\right)\xi^{s_2-1}+\\
+\frac{(2\xi-\varepsilon)}{(2\xi+\varepsilon)^3}\int\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi}(\varepsilon^2-4\xi_1^2)\xi_1^{s_2-2}P''_\mu\left(\frac{\xi_1^2+\xi\frac{\varepsilon}{2}}{\xi_1(\xi+\frac{\varepsilon}{2})}\right)d\xi_1\Biggr]\left[\varepsilon^{s_1}2^{s_2}\psi_n^k(0)-2^{s_2}\varphi_n^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right].
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Из (19), (20) однозначно определяется A_n^k, $k=\overline{1,\,k_n}$, $n=0,1,\dots$, при этом, если $\varphi_n^k(\xi)\equiv 0$, $\psi_n^k(0)\equiv 0$, то $A_n^k=0$.

Таким образом, из (18), (15), единственным образом найдем $\tau_n^k(\xi)$, $\forall\xi\in[\frac{\varepsilon}{2},\,\frac{1}{2}]$.

Учитывая оценки ([3])

$$
|k_n|\le c,\ n^{m-2},\ \left|\frac{\partial^p}{\partial\theta_j^p}Y_{n,m}^k(\theta)\right|\le cn^{\frac{m}{2}-p+1},\ c=const,
\tag{21}
$$

$j=\overline{1,m-1}$, $p=0,1,\dots$, а также ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta),\psi(t,\theta)$, аналогично [6], можно показать, что ряд

$$
\tau(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}\tau_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)
\tag{22}
$$

сходится абсолютно и равномерно.

Следовательно, функция

$$
u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{\frac{(1-m)}{2}}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)
\tag{23}
$$

является решением задачи (4), (2), (22) в области D_ε^+, где функции $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,\,k_n}$, $n=0,1,\dots$, находятся по формуле (13), в которой $\nu_n^k(\xi)$, $\tau_n^k(\xi)$ определяются из (18), (22).

Теперь задачу T будем изучать в области D^-. Для этого сначала функцию $\tau_n^k(r)$ продолжим гладким образом на отрезке $[0,1]$ в виде

$$
g_n^k(r)=\begin{cases}\tau_n^k(r),\ \varepsilon\le r\le 1\\ \tilde\tau_0^1(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\\ n^{-l}\tilde\tau_n^k(r),\ 0\le r\le\varepsilon,\ k=\overline{1,\,k_n},\ n=1,2,\dots,\end{cases}
\tag{24}
$$

где $\tilde\tau_n^k(r)\in C([0,\varepsilon])$, причем $\tilde\tau_n^k(\varepsilon)=\tau_n^k(\varepsilon)$, $\tilde\tau_n^k(r)=r^\alpha\hat\tau_n^k(r)$, $\alpha\ge\frac{(m-1)}{2}$.

В силу оценок (21) ряд

$$u(r,\theta,0)=g(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} g_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),\ 0\le r\le 1,$$

сходится абсолютно и равномерно, если $l>\frac{3m}{2}$.

В области D^- рассмотрим первую краевую задачу для уравнения

$$u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{1}{r^2}\delta u-u_t=0, \tag{25}$$

с условием

$$u|_{S_0}=g(r,\theta),\ u|_{\Gamma}=\psi(r,\theta). \tag{26}$$

Решение задачи (25), (26) будем искать в виде (6).

Подставляя (6) в (25) получим уравнение

$$u_{nrr}^k-u_{nt}^k+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}u_n^k=0, \tag{27}$$

при этом краевое условие (26) имеет вид

$$u_n^k(r,0)=g_n^k(r),\ \ u_n^k(1,t)=\psi_n^k(t), k=\overline{1,\,k_n},\ \ n=0,1,\dots. \tag{28}$$

Произведя замену $\upsilon_n^k(r,t)=u_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$ задачу (27), (28) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k-\upsilon_{nt}^k+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\upsilon_n^k=f_n^k(r,t), \tag{29}$$

$$\upsilon_n^k(r,0)=\tilde g_n^k(r),\ \ \upsilon_n^k(1,t)=0,\ 0<r<1, \tag{30}$$

$$f_n^k(r,t)=\psi_{nt}^k-\frac{\bar\lambda_n}{r^2}\psi_n^k(t),\ \tilde g_n^k(r)=g_n^k(r)-\psi_n^k(0).$$

Решение задачи (29), (30) ищем в виде $\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k+\upsilon_{2n}^k$ где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ - решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=f_n^k(r,t), \tag{31}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,0)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0, \tag{32}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{33}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,0)=\tilde g_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0,\ 0<r<1. \tag{34}$$

Решение вышеуказанных задач аналогично [9] рассмотрим в виде

$$\nu_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{35}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a_{s,n}(t)R_s(r),\ \tilde g_n^k(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b_{s,n}R_s(r). \tag{36}$$

Подставляя (35) в (31),(32) с учетом (36), получим

$$R_{srr}+\frac{\bar\lambda_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ \ 0<r<1, \tag{37}$$

$$R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{38}$$

$$T_{st} + \mu T = -a_{s,n}(t), \tag{39}$$

$$T_s(0) = 0. \tag{40}$$

Ограниченное решение задачи (37), (38) имеет вид ([9])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r), \tag{41}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $J_\nu(z)-$ функция Бесселя первого рода, γ_s- ее нули, $\mu = \gamma_{s,n}^2$.

Решение задачи (39), (40) записывается в виде

$$T_s(t) = -\int_0^t a_{s,n}(\xi)\exp[-\gamma_{s,n}^2(t-\xi)]d\xi. \tag{42}$$

Подставляя (41) в (36) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1, \tag{43}$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_\nu(\gamma_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{44}$$

Ряды (43), (44)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ([10]), если

$$a_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi)d\xi, \tag{45}$$

$$b_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\gamma_s)]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{g}_n^k(\xi) J_\nu(\gamma_{s,n}\xi)d\xi, \tag{46}$$

где $\gamma_{s,n}, s = 1, 2, ...-$ положительные нули функции Бесселя, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (41), (42) получим решение задачи (31), (32) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = -\sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r)\{\int_0^t a_{s,n}(\xi)\exp[-\gamma_{s,n}^2(t-\xi)]d\xi\}, \tag{47}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (45).

Далее, подставляя (35) в (33), (34) будем иметь

$$T_{st} + \gamma_{s,n}^2 T_s = 0,$$

решением которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n}\exp(-\gamma_{s,n}^2 t). \tag{48}$$

Из (41), (48) с учетом (36) получим

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}\sqrt{r} J_\nu(\gamma_{s,n} r)\exp(-\gamma_{s,n}^2 t), \tag{49}$$

где $b_{s,n}$ находится из (46).

Следовательно, решением задачи (25), (26) в области D^- является функция

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}[\psi_n^k(t)+\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)]r^{\frac{(1-m)}{2}}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{50}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t),\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (47) и (49).

Так как продолжение (24) неоднозначно, то решение (33) также является неоднозначным.

Учитывая ограничения на заданные функции $\varphi(r,\theta),g(t,\theta),\psi(t,\theta)$, а также оценки (21), аналогично [6, 11] можно показать, что полученное решение вида (23) и (50) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных // М.: Наука, 2006. 287 с.

2. Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики // Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.

3. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения // М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

4. Алдашев С. А. Неединственость решения многомерной задачи Трикоми для гиперболо-параболического уравнения // Украинский математический Вестник. 2015. Т. 12, № 1. С. 1–10.

5. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа // М.: Изд. АН СССР, 1959. 164 с.

6. Алдашев С. А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений // Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

7. Copson E. T. On the Riemann-Green function // J.Rath. Mech and Anal. 1958. Vol. 1. P. 324–348.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1 // М.: Наука, 1973. 294 с.

9. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // М.: Наука, 1965. 703 с.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 // М.: Наука, 1974. 295 с.

11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики // М.: Наука, 1977. 659 с.

REFERENCES

1. Nakhushev, A. M. 2006, “Offset problems for equation in partial derivatives”, *Moscow: Nauka.* 287 p. (in Russian).

2. Vragov, V. N. 1983, “Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics”, *Novosibirsk: NSU.* 84 p. (in Russian).

3. Mikhlin, S. G. 1962, "Multidimensional singular integrals and integral equations", *Moscow: Fizmatgiz.* 254 p. (in Russian).
4. Adlashev, S. A. 2015, "Non-uniqueness of the solution of the multidimensional Tricomi problem for the hyperbolic-parabolic equation", *Ukrainian Mathematical Bulletin*, vol. 12, №1. P. 1–10. (in Russian).
5. Bitsadze, A. V. 1959, "Mixed Type Equations", *Moscow: Izd. AN USSR.* 164 p. (in Russian).
6. Aldashev, S. A. 1994, "Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations", *Almaty: Gylym*, 170 p. (in Russian).
7. Copson, E. T. 1958, "On the Riemann-Green function", *J. Rath. Mech and Anal.*, vol. 1. P. 324–348.
8. Bateman, G., Erdelyi A. 1973, "Higher Transcendental Functions", *Moscow: Nauka*, vol. 1. 294 p. (in Russian).
9. Kamke, E. 1965, "Handbook of ordinary differential Equations", *Moscow: Nauka.* 703 p. (in Russian).
10. Bateman, G., Erdelyi, A. 1974, "Higher Transcendental Functions", *Moscow: Nauka*, vol. 2. 295 p. (in Russian).
11. Tikhonov, A. N., Samarsky, A. A. 1977, "Equations of mathematical Physics", *M.: Nauka.* 659 p. (in Russian).

Получено: 06.06.2024
Принято в печать: 26.12.2024