

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 519.6, 536.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-308-328

**Моделирование нелинейной эффективной теплопроводности с использованием программного комплекса «Фидесис»<sup>1</sup>**

М. Я. Яковлев, Н. С. Елфимов, В. А. Левин

**Яковлев Максим Яковлевич** — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru*

**Елфимов Никита Сергеевич** — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: terilat34634@yandex.ru*

**Левин Владимир Анатольевич** — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Аннотация**

Статья посвящена численной оценке эффективных коэффициентов теплопроводности гетерогенных сред. Описан алгоритм такой оценки, модифицированный для нелинейного случая: когда тепловые свойства компонентов среды зависят от температуры. С помощью программного комплекса «Фидесис» проведены линейные расчёты оценки эффективных коэффициентов теплопроводности строительных теплоизолирующих композитов из полимера, армированного полыми стеклянными микросферами. Исследованы случаи простой кубической упаковки частиц наполнителя и случайного их распределения в матрице. Модифицированный алгоритм реализован в виде исследовательского программного модуля для решения нелинейных задач оценки эффективной теплопроводности. С его помощью решены модельные задачи оценки нелинейной эффективной теплопроводности для ортогонально армированного и дисперсно армированного композитов. Подобрана конфигурация ортогонально армированного композита, эффективная теплопроводность которого не зависит от температуры. Выявлен существенно немонотонный характер зависимости эффективной теплопроводности дисперсно армированного композита от температуры.

*Ключевые слова:* теплопроводность, гетерогенные материалы, эффективные характеристики, численное моделирование, строительные композиты, нелинейная задача, метод конечных элементов, пакет «Фидесис»

*Библиография:* 32 названия.

**Для цитирования:**

М.Я. Яковлев, Н.С. Елфимов, В.А. Левин. Моделирование нелинейной эффективной теплопроводности с использованием программного комплекса «Фидесис» // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 308–328.

<sup>1</sup>Исследования проведены в МГУ имени М.В. Ломоносова за счёт гранта РФФИ №22-11-00110 (разработка алгоритма и исследовательского программного модуля, линейное моделирование теплопроводности строительных композитов) и гранта РФФИ №24-77-10022 (нелинейное моделирование эффективной теплопроводности).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 519.6, 536.2

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-308-328

**Simulation of nonlinear effective thermal conductivity using CAE Fidesys**

M. Ya. Yakovlev, N. S. Elfimov, V. A. Levin

**Yakovlev Maxim Yakovlevich** — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: maxim.yakovlev@math.msu.ru*

**Elfimov Nikita Sergeevich** — postgraduate student, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: terilat34634@yandex.ru*

**Levin Vladimir Anatolievich** — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: v.a.levin@mail.ru*

**Abstract**

This article is devoted to the numerical estimation of the effective thermal conductivity coefficients of heterogeneous media. An estimation algorithm is described, modified for the non-linear case (when the thermal properties of the material components depend on the temperature). Using the Fidesys CAE system, linear calculations are performed to estimate the effective thermal conductivity coefficients of construction heat-insulating composites made of polymer reinforced with hollow glass microspheres. The cases of simple cubic packing of filler particles and their random distribution in the matrix are investigated. The modified algorithm is implemented as a research software module for solving non-linear problems of estimating effective thermal conductivity. Using it, model problems of estimating non-linear effective thermal conductivity for orthogonally reinforced and particle-reinforced composites are solved. The configuration of an orthogonally reinforced composite is revealed, the effective thermal conductivity of which does not depend on temperature. A significantly non-monotonic dependence of the effective thermal conductivity on temperature is obtained for a particle-reinforced composite.

*Keywords:* thermal conductivity, heterogeneous materials, effective properties, numerical simulation, construction composites, non-linear problem, finite element method, CAE Fidesys

*Bibliography:* 32 titles.

**For citation:**

Yakovlev, M. Ya., Elfimov, N. S., Levin, V.A., 2024, "Simulation of nonlinear effective thermal conductivity using CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 308–328.

**1. Введение**

Проблема оценки эффективных (осреднённых) характеристик неоднородных материалов стала особо актуальной, начиная с середины XX столетия, в связи с использованием композитов в машиностроении. В то время основной задачей было вычисление эффективных механических свойств гетерогенных материалов в линейно-упругом виде при малых деформациях с использованием аналитических формул. Такими исследованиями занимались В.Л.

Бидерман [1], Б.Е. Победря [2], Р. Хилл, Ц. Хашин, Ш. Штрикман [3, 4] и многие другие. К концу XX века актуальность приобрела задача определения эффективных характеристик неоднородных материалов в нелинейном виде с учётом конечных деформаций. Р. Смит [5], П. Понте Кастанеда [6], Д. Тэлбот [7], Дж. Фиш [8], Л.Р. Вишняков, С.В. Шешенин [9] и другие учёные посвятили свои исследования этому вопросу.

Практический смысл оценки эффективных механических характеристик композитов определяется необходимостью упруго-прочностного моделирования изделий из композиционных материалов. Поскольку размер такого изделия обычно на несколько порядков превышает размер геометрической неоднородности в композите, для экономии времени и вычислительных ресурсов обычно применяется двухмасштабный подход: эффективные механические свойства оцениваются на микромасштабе (представительный объём либо ячейка периодичности) и затем используются на макромасштабе (изделие из композита).

Для многих изделий из композитов рассчитываются не только упруго-прочностные задачи, но и тепловые режимы. Поэтому для гетерогенных материалов, по аналогии с эффективными механическими характеристиками, также становится актуальной оценка ещё и эффективных коэффициентов теплопроводности. Эти исследования находили практическое применение в машиностроении, авиастроении и космонавтике, металлургии, энергетике, строительстве и других видах промышленности. Впервые связь между коэффициентом теплопроводности гетерогенной среды и концентрацией частиц наполнителя была получена Дж. Максвеллом [10] ещё в начале XX века. В середине столетия данные результаты, полученные в рамках теории Максвелла, были обобщены на случай несферических частиц наполнителя Р. Гамильтоном и О. Кроссером [11]. Позднее теплопроводностью в неоднородных средах занимались Л. Нильсен [12], К. Гранквист [13], Я. Бенвенист [14], Д. Хассельман [15], А. Салазар [16], В. Митюшев [17] и многие другие учёные. Эффективные коэффициенты теплопроводности оценивались при помощи аналитических формул и численного моделирования, однако в большинстве работ на эту тему не учитывается зависимость коэффициентов теплопроводности компонент гетерогенного материала от температуры.

В данной работе используется метод численной оценки эффективных тепловых характеристик, основанный на проведении конечноэлементных теплофизических расчётов на представительном объёме (либо ячейке периодичности) гетерогенного материала с последующим осреднением результатов по объёму. Метод был подробно описан в работах [18, 19] и реализован в программном модуле «Фидесис Композит» отечественного программного пакета для инженерного прочностного анализа «Фидесис» [20]. В данной статье с помощью модуля «Фидесис Композит» оцениваются эффективные коэффициенты теплопроводности строительных композитов и исследуется влияние случайного распределения частиц наполнителя в них на осреднённые параметры теплопроводности материала. Кроме того, исходный метод осреднения теплопроводности модифицируется: вносятся изменения, позволяющие оценивать эффективные коэффициенты теплопроводности гетерогенного материала, тепловые свойства компонентов которого зависят от температуры. Таким образом, в статье решается нелинейная задача численной оценки эффективных коэффициентов теплопроводности неоднородной среды.

## 2. Алгоритм численной оценки эффективных коэффициентов теплопроводности

Необходимо определить некоторые базовые понятия физики гетерогенных материалов, с использованием которых формулируется алгоритм оценки эффективной теплопроводности неоднородного материала.

**Представительный объём** – минимальный объём исследуемой гетерогенной среды, на

котором могут быть проведены некоторые эксперименты или измерения, с помощью результатов которых могут быть сделаны обоснованные выводы о свойствах среды в целом [21, 22, 23]. Каждый компонент в составе неоднородного материала должен входить в представительный объём в достаточном количестве, чтобы позволить осреднить свойства всего материала [24]. Если рассматривается модель, имеющая периодическую структуру – тогда в роли представительного объёма можно рассматривать ячейку периодичности [25, 26]. В этом случае при численном моделировании необходимо использовать периодические граничные условия [27].

**Эффективный материал** (с точки зрения теплопроводности) – модельный однородный материал, для которого выполняется следующее условие: представительный объём исходного гетерогенного материала и такой же объём, заполненный однородным материалом, имеют одинаковые средние (осреднённые по объёму) векторы теплового потока при одинаковых температурах на границе объёмов [18]. Это означает, что эффективный материал ведёт себя в среднем (с точки зрения распространения температуры) так же, как исходный неоднородный.

**Эффективные коэффициенты теплопроводности** неоднородной среды – коэффициенты теплопроводности модельного материала, являющегося для данной среды эффективным.

## 2.1. Алгоритм для линейного случая

Алгоритм оценки эффективных коэффициентов теплопроводности гетерогенного материала заключается в следующем. Для представительного объёма (либо ячейки периодичности)  $V$  в форме прямоугольного параллелепипеда размером  $2A \times 2B \times 2C$  решаются три статические краевые задачи теплопроводности (для стационарного устойчивого теплового режима без внутренних источников тепла)

$$\nabla \cdot q = 0 \quad (1)$$

с непериодическими граничными условиями в виде фиксированной температуры в каждой точке границы представительного объёма

$$T|_{\Gamma} = \nabla T^e \cdot r \quad (2)$$

либо с периодическими граничными условиями в виде связей, наложенных на температуры соответствующих друг другу точек на противоположных гранях ячейки периодичности

$$\begin{aligned} T_i - T_{-i} &= 2A \cdot (\nabla T^e)_1 \\ T_j - T_{-j} &= 2B \cdot (\nabla T^e)_2 \\ T_k - T_{-k} &= 2C \cdot (\nabla T^e)_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\nabla$  – оператор градиента,  $q$  – вектор теплового потока,  $T$  – температура,  $r$  – радиус-вектор точки на границе модели  $\Gamma$ . В периодических граничных условиях (3)  $(i, -i)$ ,  $(j, -j)$   $(k, -k)$  – пары точек на противоположных сторонах представительного объёма, проекции которых на эти грани совпадают. Эффективный градиент температуры  $\nabla T^e$  задаёт конкретные граничные условия (2) и (3) в каждой из трёх решаемых краевых задач теплопроводности (1). В (3)  $(\nabla T^e)_1$ ,  $(\nabla T^e)_2$ ,  $(\nabla T^e)_3$  – компоненты этого градиента.

Одним из результатов решения каждой краевой задачи теплопроводности является распределение вектора плотности теплового потока  $q$  на модели (представительном объёме либо ячейке периодичности). Осреднение его по объёму по формуле

$$q^e = \frac{1}{V} \int_V q dV \quad (4)$$

даёт эффективный вектор плотности теплового потока  $q^e$ . Таким образом, в каждой из трёх решаемых задач теплопроводности (1) задаётся эффективный градиент температуры  $\nabla T^e$

и вычисляется эффективный вектор теплового потока  $q^e$ . Эффективная теплопроводность исследуемого неоднородного материала оценивается в виде линейной связи между ними – закона теплопроводности Фурье:

$$q_i^e = -\lambda_{ij}(\nabla T^e)_j \quad (5)$$

В трёх решаемых краевых задачах теплопроводности эффективные градиенты температуры выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \nabla T^e &= (\delta; 0; 0) \Rightarrow \lambda_{i1} = -\frac{q_i^e}{\delta}, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2) \nabla T^e &= (0; \delta; 0) \Rightarrow \lambda_{i2} = -\frac{q_i^e}{\delta}, \quad i = 1, 2, 3 \\ 3) \nabla T^e &= (0; 0; \delta) \Rightarrow \lambda_{i3} = -\frac{q_i^e}{\delta}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, решение этих трёх задач позволяет вычислить все эффективные коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{ij}$  исследуемого неоднородного материала. Если матрица  $\lambda_{ij}$  имеет диагональный вид – эффективный материал является ортотропным, для описания его теплопроводности достаточно всего трёх коэффициентов  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$ . Если эти три эффективных коэффициента теплопроводности равны между собой (с достаточной точностью), то эффективный материал изотропен. В этом случае вычисляется всего один эффективный коэффициент теплопроводности  $\lambda$ .

Описанный алгоритм, как уже было сказано выше, реализован в программном модуле «Фидесис Композит» российского инженерного программного пакета «Фидесис» [20]. Алгоритм позволяет решить линейную задачу оценки эффективных коэффициентов теплопроводности гетерогенной среды – то есть осреднять тепловые свойства такого неоднородного материала, у компонентов которого коэффициенты теплопроводности не зависят от температуры.

## 2.2. Модификация алгоритма для нелинейного случая

В некоторых случаях коэффициенты теплопроводности материалов, входящих в состав композитов, имеют существенную зависимость от температуры. Задача оценки эффективных тепловых свойств такой гетерогенной среды становится нелинейной. Для численного решения этой задачи в вышеописанный алгоритм вносятся следующие изменения.

1. Каждая статическая краевая задача теплопроводности (1) решается с учётом зависимости коэффициентов теплопроводности компонентов композита от температуры, то есть в нелинейной постановке.
2. Зависимость коэффициентов теплопроводности материала от температуры обычно носит табличный характер. Три краевые задачи (1) необходимо решить для каждого значения температуры, заданного в таблице для компонент композита. То есть в общей сложности может потребоваться решение достаточно большого количества краевых задач теплопроводности, чтобы оценить эффективные тепловые свойства исследуемого неоднородного материала в широком температурном диапазоне.
3. В алгоритме для линейного случая граничные условия (2) и (3) предполагали, что температура на представительном объёме или ячейке периодичности варьируется вокруг нуля (то есть средняя температура на модели равна нулю). В модифицированном алгоритме температура варьируется каждый раз вокруг того табличного значения температуры, для которого решаются конкретные три краевые задачи (1).

4. В алгоритме для линейного случая разброс температуры на представительном объёме или ячейке периодичности (максимальная разность температур между двумя точками модели, задаваемая величиной  $\delta$  в (6)) мог быть любым. В модифицированном алгоритме разброс должен быть намного меньше, чем соседние значения температур в таблице свойств компонентов композита.
5. Эффективные тепловые характеристики исследуемого гетерогенного материала также представляют собой табличную зависимость коэффициентов теплопроводности от температуры. Таким образом, при последующем тепловом моделировании уже эффективного материала задачи также необходимо решать в нелинейной постановке.

Модифицированный алгоритм был реализован в виде исследовательского программного модуля, позволяющего вычислить эффективные коэффициенты теплопроводности неоднородного материала, тепловые свойства компонент которого зависят от температуры, и построить их табличную зависимость также от температуры. Для решения статических краевых задач теплопроводности на представительном объёме (либо ячейке периодичности) при этом используется нелинейный тепловой решатель инженерного пакета «Фидесис» [20].

### 3. Линейные расчёты эффективной теплопроводности строительного теплоизолирующего композита, армированного микросферами

В рамках работы проведена численная оценка эффективных тепловых характеристик композитов – искусственно созданных гетерогенных материалов, изготовленных из двух или более компонентов с существенно различными механическими или физическими свойствами. Их сочетание приводит к появлению нового материала с характеристиками, которые отличаются от характеристик отдельных компонентов и не являющимися простой их суперпозицией. В статье используется понятие *матрица композита* – та часть композита, которая занимает наибольшую долю объема. А *армирующий материал* – остальная часть композита, сделанная из другого материала, благодаря которой композит имеет поведение, отличное от матричного материала.

Исследовалась эффективная теплопроводность теплоизолирующего строительного композита, который представляет собой более современную замену для традиционных теплоизоляционных материалов (минеральная вата, стекловата, пенополиуретан, пенополистерол и т.д.), обладающих рядом недостатков: минеральная вата гигроскопична, стекловолокно не выдерживает механических нагрузок, пенополиуретан и пенополистерол – пожароопасные материалы, выделяющие при горении токсичные вещества. В таких теплоизолирующих композитах в качестве матрицы используются различные полимеры, а в качестве армирующих материалов – микрогранулы: шарики из пенополистерола, стеклянные микросферы, термопластичные микросферы или ценосферы.

Ценосферы – алюмосиликатные полые шарики, которые образуются в составе золы-уноса при высокотемпературном факельном сжигании угля, то есть являются побочным продуктом процесса горения угля. Ценосферы имеют диаметр в среднем 100 мкм, толщина стенки от 2 до 10 мкм, обладают низкой теплопроводностью и высокой температурой плавления (около 1400 – 1500°C), из-за чего этот материал получил широкое распространение в качестве изоляционного материала в строительстве и промышленности. Благодаря этим свойствам, их можно совмещать с различными матричными полимерными материалами, получая эффективный теплоизолирующий материал.

Но еще больший интерес представляют полые стеклянные микросферы (hollow glass microsphere – HGM) [28]. Обладая достоинствами ценосфер, они имеют преимущество перед

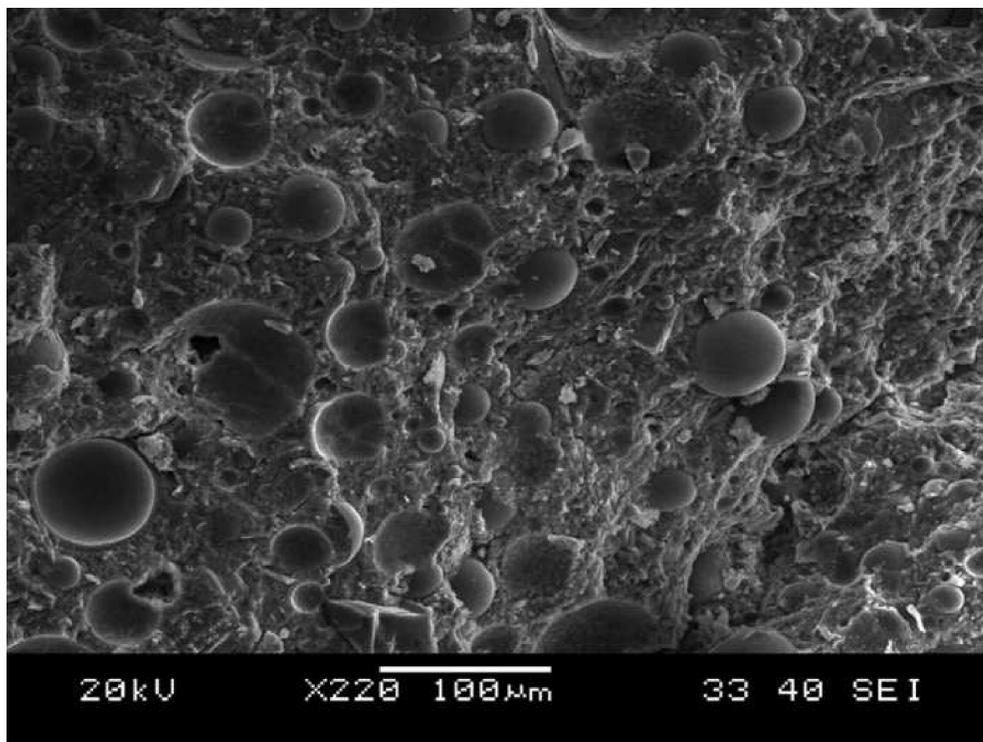


Рис. 1: Распределение полых стеклянных сфер внутри композита [28]

ними в виде высокой прочности на сжатие и легким весом. Моделирование композитов с НГМ затруднено тем, что такие композиты состоят из трех материалов – заполняющей матрицы, стенки микросферы и газа внутри (рис. 1).

### 3.1. Вариант с простой кубической упаковкой микросфер

В статье [29] рассматривается простая кубическая упаковка полых стеклянных микросфер в композите и проводится численное исследование эффективных коэффициентов теплопроводности такого композита при помощи программного комплекса ANSYS Fluent. В данной работе аналогичные численные эксперименты проведены при помощи программного модуля «Фидесис Композит». Для проверки была рассмотрена простая кубическая упаковка микросфер (рис. 2). Геометрическая структура такого композита обладает кубической симметрией, поэтому для описания его тепловых свойств достаточно одного коэффициента теплопроводности.

Исследовалась зависимость эффективной теплопроводности композита от объёмного содержания сфер  $\varphi$ . Рассматривались значения  $\varphi = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Из известного  $\varphi$  вычислялся внешний радиус сфер  $R$ . Внутренний радиус микросфер вычислялся по формуле  $r = R - d$ , где  $d$  – толщина стенки микросферы. Согласно экспериментальным данным [30, 31], внешний радиус микросферы можно принять за  $R = 29.32$  мкм, а толщину стенки за  $t = 1.6$  мкм. Коэффициенты теплопроводности компонентов композита:

- основного материала матрицы –  $\lambda_{\text{matrix}} = 0.93$  Вт/(м·К),
- газа внутри сферы –  $\lambda_{\text{gas}} = 0.023$  Вт/(м·К),
- стенки микросферы –  $\lambda_{\text{wall}} = 1.03$  Вт/(м·К).

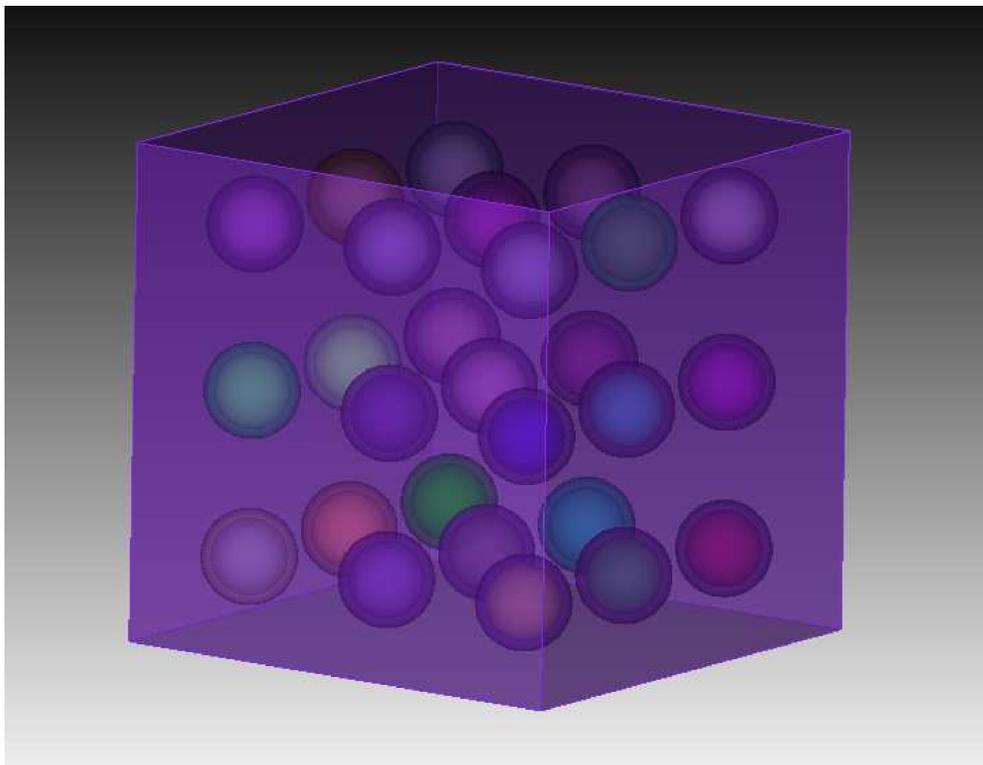


Рис. 2: Модель композита с простой кубической упаковкой микросфер

Как видно, основная теплоизоляция осуществляется за счёт газа, находящегося внутри микросфер: матрица и стенки микросфер обладают существенно большими коэффициентами теплопроводности. Объёмное содержание каждого материала в композите в зависимости от объёмного содержания микросфер показано в таблице ниже.

Объёмное содержание сфер, %	Объёмное содержание газа, %	Объёмное содержание твердой стенки, %
10	8.45	1.55
20	16.90	3.10
30	25.35	4.65
40	33.80	6.20

На рис. 3 приведены сравнительные результаты оценки эффективной теплопроводности композита (в зависимости от объёмной доли микросфер). Как видно из графиков, зависимость эффективного коэффициента теплопроводности от концентрации микросфер имеет линейный характер. Кроме того, результаты проделанных в данной работе расчётов в программном модуле «Фидесис Композит» и результаты расчётов в программном комплексе ANSYS Fluent [29] совпадают с погрешностью 5-10%, что представляет собой хорошую точность.

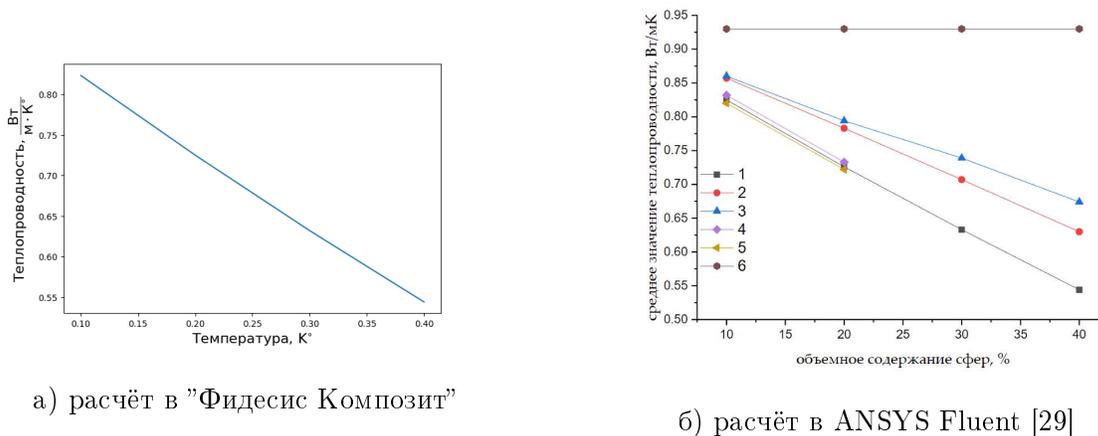


Рис. 3: Зависимость эффективной теплопроводности от объёмной доли микросфер

### 3.2. Вариант со случайным распределением микросфер

Вышеописанное моделирование проводилось для композитов с регулярной геометрической структурой. В реальности в процессе создания дисперсно армированного композита возникает множество факторов, которые могут влиять на конструкцию композита, часто случайным образом. Поэтому возникает вопрос: как сильно случайное распределение частиц наполнителя может влиять на эффективную теплопроводность композита?

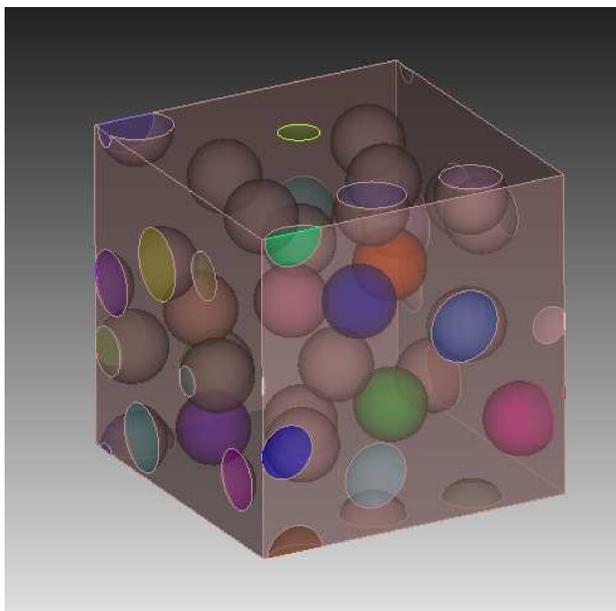


Рис. 4: Модель композита со случайным распределением микросфер

Пример трёхмерной модели дисперсно армированного композита, построенной в графическом интерфейсе инженерного программного пакета «Фидесис», показан на рис. 4 (объёмная доля микросфер здесь составляет 15%). Для исследования влияния случайного распределения армирующих частиц на эффективную теплопроводность была проведена серия расчётов со следующей постановкой задачи:

- внутри представительного объема всегда помещено 27 микросфер;

- исследуется зависимость эффективной теплопроводности от объемной доли микросфер внутри композита, то есть от величины радиуса микросфер;
- все микросферы имеют одинаковый размер;
- микросфера состоит из одного материала (предполагается, что на результат сравнения это не повлияет, так как микросферу из нескольких материалов можно заменить на микросферу из соответствующего эффективного материала);
- матрица композита изготовлена из эпоксидной смолы, микросферы – из алюминия;
- при фиксированном значении радиуса микросферы рассматривается 20 случаев различных заполнений композита, далее вычисляется среднее значение найденных величин эффективной теплопроводности,
- центры микросфер имеют координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  – равномерно распределенные случайные величины на отрезке  $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ , где  $l$  – длина стороны куба (если при создании композита микросферы пересекаются, то центр одной микросферы изменяется на случайный – и так до тех пор, пока не будет найдено новое расположение без пересечений с другими микросферами);
- если микросфера пересекает границы куба, то часть сферы, выходящая за пределы его, симметрично отражается относительно центра и располагается внутри куба, чтобы сохранять объемную долю микросфер;
- в силу равномерности распределения центров сфер, эффективная теплопроводность композита предполагается изотропной.

График сравнения эффективного коэффициента теплопроводности для композита с простой кубической упаковкой микросфер и со случайным их распределением показан на рис. 5. График среднеквадратичного отклонения (в зависимости от объёмной концентрации микросфер) приведён на рис. 6.

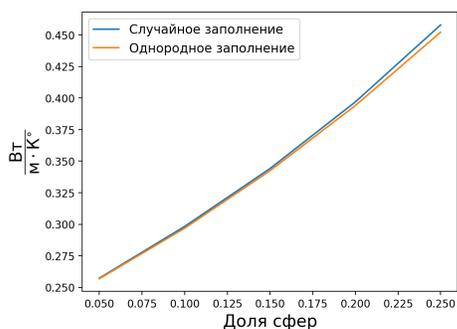


Рис. 5: Сравнение эффективной теплопроводности для случайной и простой упаковки микросфер

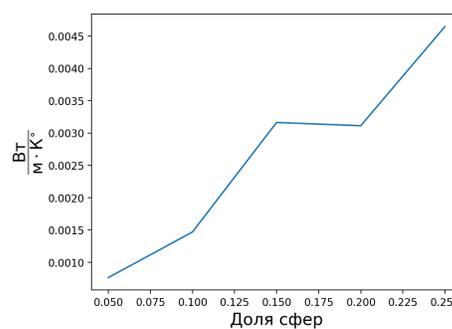


Рис. 6: Среднеквадратическое отклонение эффективной теплопроводности в зависимости от объёмной доли микросфер

Относительная погрешность среднего эффективного коэффициента теплопроводности для случайного распределения микросфер относительно коэффициента для простой упаковки (в зависимости от объёмной концентрации микросфер) показана в таблице:

Объёмная доля	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
Относительная погрешность, %	0.29	0.46	0.49	0.72	1.25

Все значения относительной погрешности меньше 1,5%. Можно сделать вывод, что разницей между эффективными коэффициентами теплопроводности для композита со случайной и простой упаковкой микросфер можно пренебречь. Поэтому в задачах моделирования композитов со случайной структурой можно пользоваться простой упаковкой.

Среднеквадратическое отклонение увеличивается с ростом концентрации микросфер. Это можно объяснить тем, что растёт и радиус микросфер. Тогда отдельно взятая микросфера сильнее влияет на распределение теплового потока, тем самым оказывая более значительное влияние на значение эффективной теплопроводности.

#### 4. Нелинейные расчёты эффективной теплопроводности композитов

В рамках исследования нелинейной эффективной теплопроводности гетерогенных материалов решались модельные задачи для двух видов композитов: ортогонально армированного и дисперсно армированного. Каждый композит состоит из двух компонентов, тепловые свойства которых зависят от температуры. В качестве материалов, использованных при изготовлении композита, рассматривались алюминий [32], железо либо сталь [33] и эпоксидная смола [34]. Зависимость коэффициента теплопроводности от температуры для этих материалов показана в виде графиков на рис. 7.

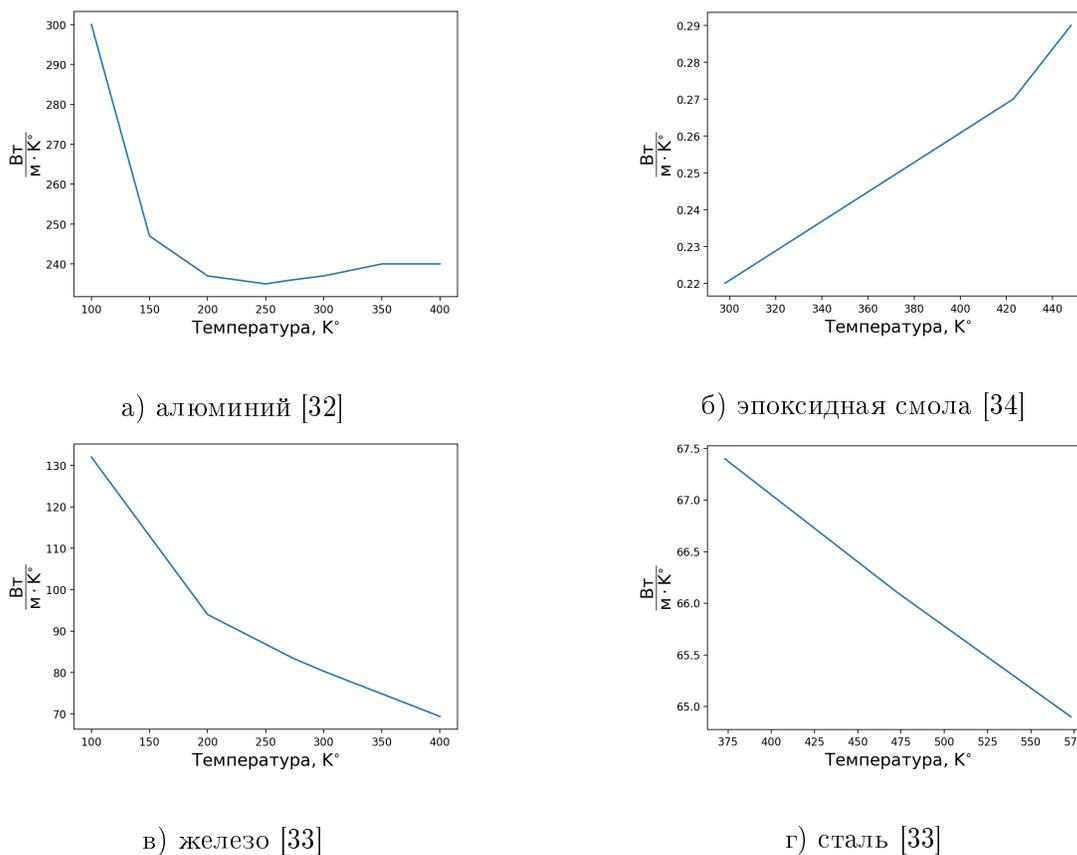


Рис. 7: Теплопроводность компонентов композитов в зависимости от температуры

### 4.1. Ортогонально армированный композит

Ортогонально армированный композит представляет собой слоисто-волоконистый композит из двух (или большего чётного количества) слоёв, в котором направления армирующих волокон в соседних слоях перпендикулярны друг другу. Пример трёхмерной модели ячейки периодичности такого композита, построенной в графическом интерфейсе инженерного программного пакета «Фидесис», показан на рис. 8.

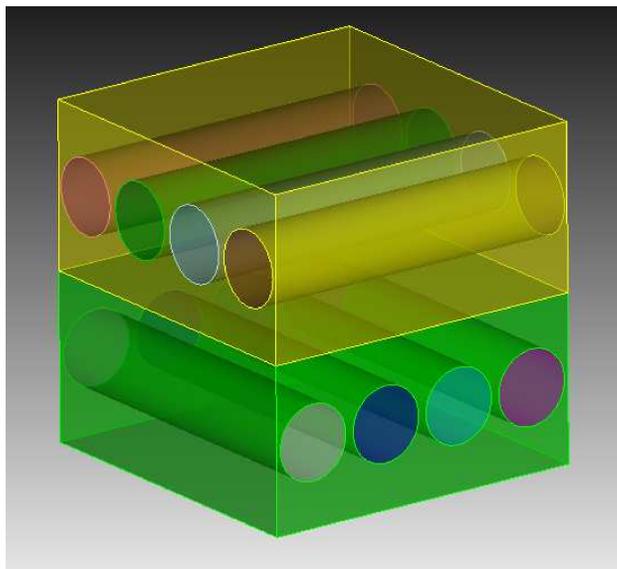
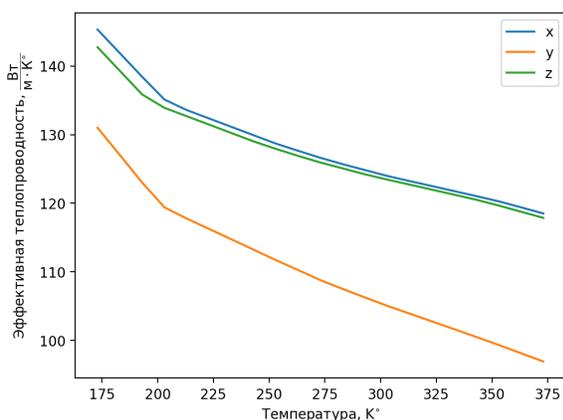
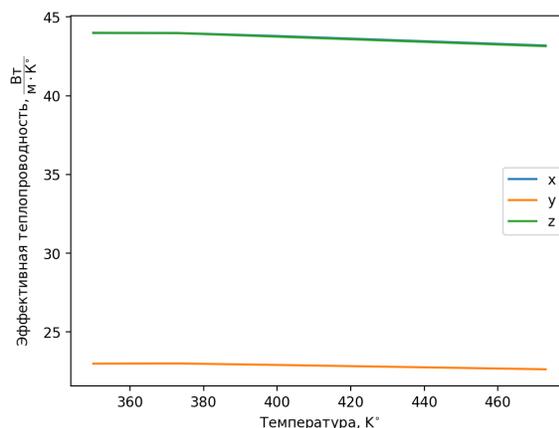


Рис. 8: Ячейка периодичности дисперсно армированного композита

Нелинейная эффективная теплопроводность для данного композита моделировалась для двух вариантов: матрица из алюминия, армирующие волокна из железа – и матрица из эпоксидной смолы, армирующие волокна из алюминия.



а) матрица - алюминий, армирующие волокна - железо



б) матрица - эпоксидная смола, армирующие волокна - алюминий

Рис. 9: Значения эффективной теплопроводности ортогонально армированного композита в зависимости от температуры

Графики зависимостей эффективных коэффициентов теплопроводности в зависимости от

температуры приведены на рис. 9. Данный композит обладает существенной анизотропией, поэтому вычислялись все три эффективных ортотропных коэффициента теплопроводности. Для случая, когда матрица изготовлена из эпоксидной смолы, а армирующие волокна из алюминия (рис. 9, б) – эффективные коэффициенты теплопроводности не зависят от температуры (объёмная концентрация алюминия в модели составляет 31,8%). Такой результат может найти применение на практике в областях, где важно постоянство величины теплопроводности материала при изменениях температуры.

#### 4.2. Дисперсно армированный композит

Была рассмотрена простейшая элементарная ячейка дисперсно армированного композита, предполагающая регулярное распределение сферических частиц наполнителя в матрице – ячейка в форме куба с включением в центре (рис. 10).

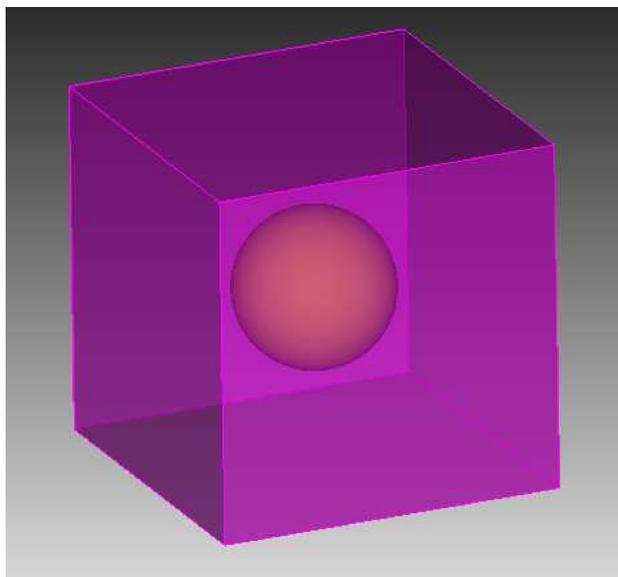
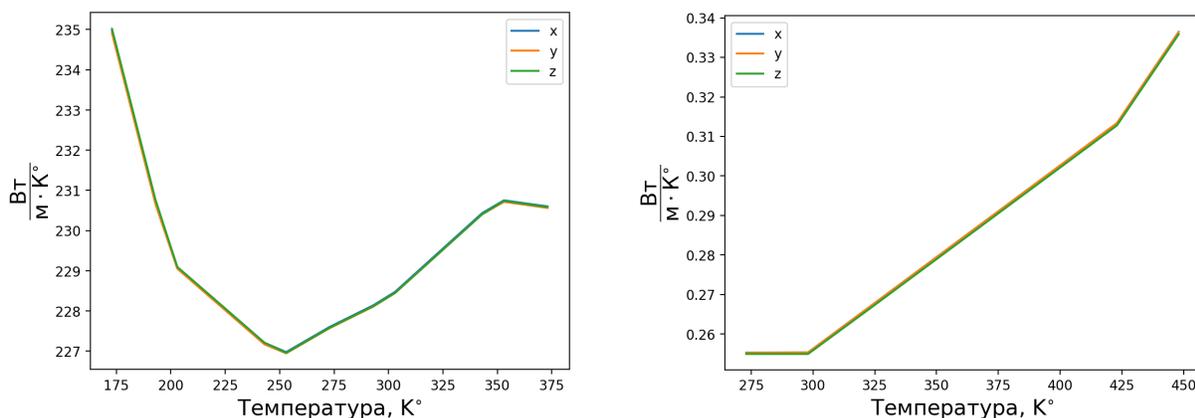


Рис. 10: Ячейка периодичности дисперсно армированного композита

Нелинейная эффективная теплопроводность для данного композита моделировалась также для двух вариантов: матрица из алюминия, армирующие частицы из железа – и матрица из эпоксидной смолы, армирующие частицы из алюминия. Графики зависимостей эффективных коэффициентов теплопроводности в зависимости от температуры приведены на рис. 11 (объёмная доля наполнителя в расчётах составляет 5%). Как видно из графиков, зависимость эффективного коэффициента теплопроводности композита от температуры имеет нелинейный – а для случая алюминия, армированного частицами железа (рис. 11, а), и немонотонный характер.



а) матрица - алюминий, армирующие частицы - железо

б) матрица - эпоксидная смола, армирующие частицы - алюминий

Рис. 11: Значения эффективной теплопроводности дисперсно армированного композита в зависимости от температуры

Кроме того, было проведено исследование эффективного коэффициента теплопроводности такого композита при фиксированной температуре в  $300\text{K}$  (линейный расчёт) в зависимости от объёмной доли частиц наполнителя. В этом случае матрица была алюминиевой, наполнитель - частицами железа. График зависимости показан на рис. 12.

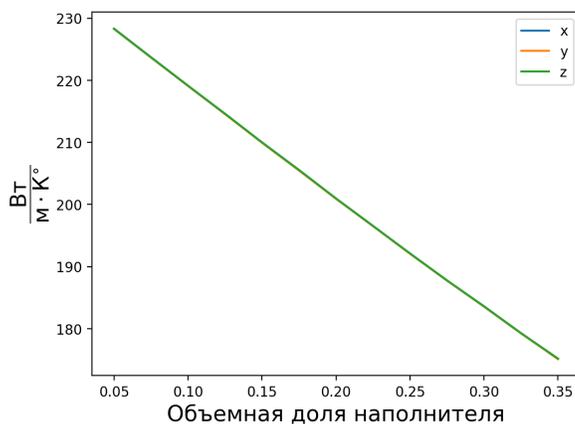


Рис. 12: Значения эффективной теплопроводности дисперсно армированного композита в зависимости от объёмной доли частиц наполнителя

Можно заметить, что зависимость эффективной теплопроводности от объёмной доли наполнителя зависит линейным образом. Это также имеет практическую ценность, так как позволяет подбирать необходимое значение теплопроводности, варьируя концентрацию наполнителя. Правильный подбор материалов может способствовать необходимому распределению значений эффективной теплопроводности от температуры.

## 5. Заключение

В ходе работы модифицирован алгоритм численной оценки эффективных коэффициентов теплопроводности гетерогенного материала. Добавлена возможность гомогенизации теплопроводности неоднородных сред, тепловые свойства которых зависят от температуры. На основе модифицированного алгоритма и с использованием нелинейного теплового решателя российского инженерного программного пакета «Фидесис» создан исследовательский программный модуль для решения нелинейных задач оценки эффективной теплопроводности. Модуль позволяет вычислить эффективные коэффициенты теплопроводности неоднородного материала, тепловые свойства компонент которого зависят от температуры, и построить их зависимость также от температуры.

В рамках исследования также проведено линейное моделирование эффективной теплопроводности строительного теплоизолирующего композита, изготовленного из полимера, армированного полыми стеклянными микросферами. Расчёты выполнялись с помощью промышленного программного модуля «Фидесис Композит» в составе пакета «Фидесис». Результаты моделирования сравнивались с результатами аналогичных расчётов, проведённых в ANSYS Fluent [29], получено совпадение с точностью в пределах 5-10%. Также для этого дисперсно армированного композита исследовалось влияние случайного распределения частиц наполнителя на эффективную теплопроводность. Существенного влияния не выявлено, что позволяет сделать вывод: возможно оценивать эффективную теплопроводность такого композита на модели с простой кубической упаковкой армирующих микросфер, при этом потенциальная погрешность (по сравнению со случайным распределением) не превышает 1,5%.

Оценка нелинейной эффективной теплопроводности (с помощью разработанного исследовательского программного модуля) реализована в модельных задачах для двух композитов: ортогонально армированного и дисперсно армированного. Рассмотрены разные варианты матрицы и армирующего материала: эпоксидная смола, алюминий, железо. Для ортогонально армированного материала с эпоксидной матрицей и алюминиевыми армирующими волокнами подобрана такая концентрация алюминия (составляющая 31,8%), при которой эффективные коэффициенты теплопроводности композита практически не зависят от температуры. Для дисперсно армированного композита из алюминия, армированного частицами железа, получена существенно немонотонная зависимость эффективного коэффициента теплопроводности от температуры.

Результаты численной оценки нелинейной эффективной теплопроводности, полученные в данной статье, могут найти своё применение при численном решении связанных задач механики и теплофизики. Проведённое исследование может найти продолжение в сопряжении задач нелинейной упругости и термоупругости с нелинейной теплопроводностью для композиционных материалов и прочих гетерогенных сред. При повышенных температурах компоненты композита могут под действием механических нагрузок испытывать конечные [35] необратимые деформации: упруго-пластические [36] или вязкоупругие. Вследствие этих деформаций может изменяться размер представительного объёма композита или концентрации компонентов композита, что приведёт к изменению эффективной теплопроводности.

Авторы благодарят разработчика-алгоритмиста ООО «Фидесис» С.А. Маркова за помощь в интеграции исследовательского программного модуля оценки нелинейной эффективной теплопроводности с нелинейным тепловым решателем программного пакета «Фидесис».

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.

2. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Издательство Московского университета, 1984. – 335 с.
3. Hashin Z., Shtrikman S. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, V. 10, 1962. – P. 335–342.
4. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, V. 11, 1963. – P. 127–140.
5. Smit R.J.M., Brekelmans W.A.M., Meijer H.E.H. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V. 155, I. 1–2, 1998. – P. 181–192.
6. Ponte Castañeda P., Willis J.R. Variational second-order estimates for nonlinear composites // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, V. 455, I. 1985, 1999. - P. 1799-1811.
7. Talbot D.R. S., Willis J. R. Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite // *Proceedings of the Royal Society A*, V. 460, 2004. – P. 2705–2723.
8. Fish J. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures // *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, V. 55, 2011. – P. 215-231.
9. Победря Б.Е., Шешенин С.В. Трехмерное моделирование напряженно-деформированного состояния пневматических шин // VIII симпозиум «Проблемы шин и резинокордных композитов» - Москва, НИИШП - 20-24 октября 1997 – С. 320–325.
10. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. Oxford: Oxford University Press, Vol. I, 3rd Ed, 1904. - 435 p.
11. Hamilton R. L., Crosser O. K. Thermal conductivity of heterogeneous two component systems // *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, V. 1, I. 3, 1962. - P. 187-191.
12. Nielsen L. E. The thermal and electrical conductivity of twophase systems // *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, V. 13 I. 1, 1974. - P. 17-20.
13. Granqvist C.G., Hunderi O. Conductivity of inhomogeneous materials: Effective-medium theory with dipole-dipole interaction // *Physical Review B*, V. 18, I. 4, 1978. - P. 1554-1561.
14. Benveniste Y., Miloh T. The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces // *International Journal of Engineering Science*, V. 24, I. 9, 1986. - P. 1537-1552.
15. Hasselman D.P.H., Johnson L.F. Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance // *Journal of Composite Materials*, V. 21, I. 6, 1987. - P. 508-515.
16. Salazar A., Terron J. M., Sánchez-Lavega A., Celorrio R. On the effective thermal diffusivity of fiber-reinforced composites // *Applied Physics Letters*, V. 80, I. 11, 2002. - P. 1903-1905.
17. Mityushev V., Obnosov Y., Pesetskaya E., Rogosin S. Analytical methods for heat conduction in composites // *Mathematical Modelling and Analysis*, V. 13, I. 1, 2008. - P. 67-78.

18. Vdovichenko I.I., Yakovlev M.Ya., Vershinin A.V., Levin V.A. Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems [Электронный ресурс] // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, Vol. 158, № 1, Article ID 012094, 2016. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094>
19. Yakovlev M.Ya., Tanasevich P.S., Vershinin A.V., Levin V.A. Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys // AIP Conference Proceedings, V. 2509, Article ID 020210. – Режим доступа: <https://aip.scitation.org/doi/pdf/10.1063/5.0084835>
20. Официальный сайт ООО «Фидесис» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://cae-fidesys.com/>
21. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures, V. 131, 2015. – P. 25–36.
22. Vershinin A.V., Levin V.A., Zingerman K.M., Sboychakov A.M., Yakovlev M.Ya. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // Advances in Engineering Software, V. 86, 2015. – P. 80–84.
23. Yakovlev M.Ya., Lukyanchikov I.S., Levin V.A., Vershinin A.V., Zingerman K.M. Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method [Электронный ресурс] // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 1158, № 4, Article ID 042037, 2019. – Режим доступа: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037>
24. Коновалов Д.А., Яковлев М.Я. О численной оценке эффективных упругих характеристик эластомерных композитов при конечных деформациях с использованием метода спектральных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник, т. 18, №3, 2017. – С. 316–329.
25. Левин В.А., Вдовиченко И.И., Вершинин А.В., Яковлев М.Я., Зингерман К.М. Подход к расчёту эффективных прочностных характеристик пористых материалов // Письма о материалах, т. 7, №4, 2017. – С. 452–454.
26. Левин В.А., Зингерман К.М., Яковлев М.Я., Курденкова Е.О., Немтинова Д.В. О численной оценке эффективных характеристик периодических ячеистых структур с использованием балочных и оболочечных конечных элементов с помощью CAE Fidesys // Чебышевский сборник, т. 20, №2, 2019. – С. 528–541.
27. Vladimir Levin, Ignatiy Vdovichenko, Anatoly Vershinin, Maksim Yakovlev, Konstantin Zingerman. Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case [Электронный ресурс] // Modelling and Simulation in Engineering, Vol. 2016, Article ID 9010576, 10 pages, 2016. – Режим доступа: <https://www.hindawi.com/journals/mse/2016/9010576/>
28. Hui Wang, Feng Hou, Chao Chang. Experimental and computational modeling of thermal conductivity of cementitious syntactic foams filled with hollow glass microspheres [Электронный ресурс] // Construction and Building Materials, V. 265, 120739, 2020. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.120739>

29. Соловьев С.А., Соловьева О.В., Ахметова И.Г., Ваньков Ю.В., Шакурова Р.З. Численное исследование теплопроводности композитного теплоизоляционного материала с микрогранулами // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. Т. 24, № 1, 2022. - С. 86-98.
30. Liu, Bing & Wang, Hui & Qin, Qinghua. Modelling and Characterization of Effective Thermal Conductivity of Single Hollow Glass Microsphere and Its Powder [Электронный ресурс] // Materials, V. 11, Article ID 133, 2018. – Режим доступа: <https://doi.org/10.3390/ma11010133>
31. Wang, Hui & Ma, Chong & Yuan, Yihui & Chen, Yanglei & Liu, Tao & Wang, Ning. (2023). Lightweight insulating oil-well cement filled with hollow glass microspheres and numerical simulation of its unsteady heat transfer process // Advanced Composites and Hybrid Materials, V. 7, Article ID 98, 2024. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1007/s42114-024-00902-w>
32. Weast, Robert C., Editor-in chief. Handbook of Chemistry and Physics // Cleveland: The Chemical Rubber Co., 48th Edition, 1967, - P. 1967-1968.
33. Touloukian Y. S., Powell R. W., Ho C. Y., Klemens P. G. Thermophysical Properties of Matter // The TPRC Data Series, volume 1: Thermal Conductivity - Metallic Elements and Alloys, 1970. - 1595 p.
34. Чэнь Я., Мараховский П.С., Малышева Г.В. Определение теплофизических свойств эпоксидных материалов в процессе их отверждения // Труды ВИАМ, №9, 2018. - С. 119-123.
35. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, V. 73, I. 6, 2009. - P. 710-721.
36. Moulas E., Podladchikov Y., Zingerman K., Vershinin A., Levin V. Large-strain Elastic and Elasto-Plastic Formulations for Host-Inclusion Systems and Their Applications in Thermobarometry and Geodynamics [Электронный ресурс] // American Journal of Science, V. 323, 2, 2023. – Режим доступа: <https://doi.org/10.2475/001c.68195>

## REFERENCES

1. Biderman, V. L., Guslitsler, R. L., Zakharov, S. P., Nenakhov, B. V., Seleznev, I. I. and Tsukerberg, S. M. 1963, "Automobile tires (design, calculation, testing, operation). Edited by Biderman, V. L.", *Moscow: State Scientific and Technical Publishing House of Chemical Literature*.
2. Pobedrya, B. E. 1984, "Mechanics of composite materials", *Moscow: Moscow University Publishing House*.
3. Hashin, Z. and Shtrikman, S. 1962, "On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, pp. 335-342.
4. Hashin, Z. and Shtrikman, S. 1963, "A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiscale materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, pp. 127-140.
5. Smit, R. J. M., Brekelmans, W. A. M. and Meijer, H. E. H. 1998, "Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 155(1-2), pp.181-192.

6. Ponte Castañeda, P. and Willis, J. R. 1999, "Variational second-order estimates for nonlinear composites", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 455(1985), pp. 1799–1811.
7. Talbot, D. R. S. and Willis, J. R. 2004, "Bounds for the effective constitutive relation of a nonlinear composite", *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 460, pp. 2705-2723.
8. Fish, J. 2011, "Multiscale modeling and simulation of composite materials and structures", *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, vol. 55, pp. 215-231.
9. Pobedrya, B. E. and Sheshenin, S. V. 1997, "Three-dimensional modeling of the stress-strain state of pneumatic tires. VIII Symposium on the Problems of Tires and Rubber Cord Composites", *Moscow: NIISHP*, pp. 320-325.
10. Maxwell J. C. 1904, "A treatise on electricity and magnetism", *Oxford University Press*, Vol. I, 3rd Ed.
11. Hamilton, R. L. and Crosser, O. K. 1962, "Thermal conductivity of heterogeneous two component systems", *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 1(3), pp. 187-191.
12. Nielsen, L. E. 1974, "The thermal and electrical conductivity of twophase systems", *Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals*, vol. 13(1), pp. 17-20.
13. Granqvist, C.G. and Hunderi O. 1978, "Conductivity of inhomogeneous materials: Effective-medium theory with dipole-dipole interaction", *Physical Review B*, vol. 18(4), pp. 1554-1561.
14. Benveniste, Y. and Miloh, T. 1986, "The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces", *International Journal of Engineering Science*, vol. 24(9), pp. 1537-1552.
15. Hasselman, D.P.H. and Johnson, L.F. 1987, "Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance", *Journal of Composite Materials*, vol. 21(6), pp. 508-515.
16. Salazar, A., Terron, J. M., Sánchez-Lavega, A. and Celorrio, R. 2002, "On the effective thermal diffusivity of fiber-reinforced composites", *Applied Physics Letters*, vol. 80(11), pp. 1903-1905.
17. Mityushev, V., Obnosov, Y., Pesetskaya, E. and Rogosin, S. 2008 "Analytical methods for heat conduction in composites", *Mathematical Modelling and Analysis*, vol. 13(1), pp. 67-78.
18. Vdovichenko, I.I., Yakovlev, M.Ya., Vershinin, A.V. and Levin, V.A. 2016, "Calculation of the effective thermal properties of the composites based on the finite element solutions of the boundary value problems", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, vol. 158(1), 012094. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012094>
19. Yakovlev, M.Ya., Tanasevich, P.S., Vershinin, A.V., Levin, V.A. 2022, "Numerical analysis of the effective thermal properties and the stability for NTE metamaterials using CAE fidesys", *AIP Conference Proceedings*, vol. 2509, doi: 10.1063/5.0084835
20. Fidesys LLC official website: <http://cae-fidesys.com/>
21. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya. 2015, "Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains", *Composite Structures*, vol. 131, pp. 25–36.

22. Vershinin, A.V., Levin, V.A., Zingerman, K.M., Sboychakov, A.M. and Yakovlev, M.Ya. 2015, “Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for”, *Advances in Engineering Software*, vol. 86, pp. 80–84.
23. Yakovlev, M.Ya., Lukyanchikov, I.S., Levin, V.A., Vershinin, A.V. and Zingerman K.M. 2019, “Calculation of the effective properties of the prestressed nonlinear elastic heterogeneous materials under finite strains based on the solutions of the boundary value problems using finite element method”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1158(4), 042037. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1158/4/042037>
24. Konovalov, D.A. and Yakovlev, M.Ya. 2017, “Numerical estimation of effective elastic properties of elastomer composites under finite strains using spectral element method with CAE Fidesys”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18(3), pp. 316–329.
25. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Y. and Zingerman, K.M. 2017, “An approach to the computation of effective strength characteristics of porous materials”, *Letters on Materials*, vol. 7(4), pp. 452-454. <https://doi.org/10.22226/2410-3535-2017-4-452-454>
26. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Yakovlev, M.Ya., Kurdenkova, E.O. and Nemtinova, D.V. 2019, “Estimation of Effective Properties of Periodic Cellular Structures using Beam and Shell Finite Elements with CAE Fidesys”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 528–541.
27. Levin, V.A., Vdovichenko, I.I., Vershinin, A.V., Yakovlev, M.Ya. and Zingerman, K.M. 2016, “Numerical Estimation of Effective Mechanical Properties for Reinforced Plexiglas in the Two-Dimensional Case”, *Modelling and Simulation in Engineering*, vol. 2016, doi: 10.1155/2016/9010576
28. Wang, H., Hou, F. and Chang, C. 2020, “Experimental and computational modeling of thermal conductivity of cementitious syntactic foams filled with hollow glass microspheres”, *Construction and Building Materials*, vol. 265, 120739. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.120739>.
29. Solovyev, S. A., Solovyeva, O. V., Akhmetova, I. G., Vankov, Yu. V. and Shakurova, R. Z. 2022, “Numerical investigation of the thermal conductivity of a composite heat-insulating material with microgranules”, *Energy Problems*, vol. 24(1), pp. 86-98. <https://doi.org/10.30724/1998-9903-2022-24-1-86-98>.
30. Liu, B., Wang, H. and Qin, Q. 2018, “Modelling and characterization of effective thermal conductivity of single hollow glass microsphere and its powder”, *Materials*, vol. 11(1), Article ID: 133. <https://doi.org/10.3390/ma11010133>.
31. Wang, H., Ma, C., Yuan, Y., Chen, Y., Liu, T. and Wang, N. 2023, “Lightweight insulating oil-well cement filled with hollow glass microspheres and numerical simulation of its unsteady heat transfer process”, *Advanced Composites and Hybrid Materials*, vol. 7, Article ID: 98. <https://doi.org/10.1007/s42114-024-00902-w>
32. Weast, R. C. 1967, “Handbook of Chemistry and Physics”, *Cleveland: The Chemical Rubber Co.*, 48th Edition., pp. 1967-1968.
33. Touloukian, Y. S., Powell, R. W., Ho, C. Y. and Klemens, P. G. 1970, “Thermophysical and Electronic Properties Information and Analysis Center”, *The TPRC Data Series*, vol. 1: Thermal Conductivity - Metallic Elements and Alloys.

34. Chen, Y., Marakhovsky, P. S. and Malysheva, G. V. 2018, "Determination of the thermophysical properties of epoxy materials during their curing process", *Proceedings of VIAM*, vol. 9, pp. 119-123. <https://doi.org/10.18577/2307-6046-2018-0-9-119-123>
35. Zingerman, K.M. and Levin, V.A. 2009, "Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 73(6), pp. 710-721. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.011>
36. Moulas, E., Podladchikov, Y., Zingerman, K., Vershinin, A. and Levin, V. 2023, "Large-strain Elastic and Elasto-Plastic Formulations for Host-Inclusion Systems and Their Applications in Thermobarometry and Geodynamics", *American Journal of Science*, vol. 323, 2. <https://doi.org/10.2475/001c.68195>

Получено: 16.10.2024

Принято в печать: 24.12.2024