

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-239-249

Расчет напряженно-деформированного состояния в предварительно нагруженном упругопластическом теле при последовательном образовании полостей на основе теории многократного наложения больших деформаций¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. А. Карцев, К. А. Петровский

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Карцев Михаил Александрович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cartsev@cae-fidesys.com

Петровский Константин Александрович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: augus2s@rambler.ru

Аннотация

Получено и исследовано численное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии в теле из упругопластического материала при последовательном образовании в нем нескольких полостей после предварительного нагружения при конечных деформациях. Для моделирования пластичности использовано условие Мизеса и ассоциированный с этим условием закон пластического течения. Приведена общая механическая постановка задачи на основе теории многократного наложения больших деформаций. Изложен общий алгоритм решения. Для решения использован метод конечных элементов и его модификация — метод спектральных элементов. Решение получено с использованием методов и алгоритмов системы инженерного прочностного анализа. Приведены некоторые результаты численных расчетов для плоской статической задачи о концентрации напряжений в окрестности трех эллиптических полостей, образованных в теле квадратного сечения, в случае плоской деформации. Исследованы эффекты, обусловленные пластичностью, геометрической нелинейностью, перераспределением конечных деформаций. Выполнено сравнение результатов для случаев последовательного и одновременного образования полостей.

Ключевые слова: упругопластический материал, многократное наложение больших деформаций, метод конечных элементов, метод спектральных элементов, концентрация напряжений около отверстий.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Левин, В.А., Зингерман, К.М., Карцев, М.А. Петровский, К.А. Расчет напряженно-деформированного состояния в предварительно нагруженном упругопластическом теле при последовательном образовании полостей на основе теории многократного наложения больших деформаций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 239–249.

¹Работа выполнена в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00110).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-239-249

Calculation of the stress-strain state in a pre-loaded elastoplastic body with the sequential formation of cavities based on the theory of repeated superposition of large deformations

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M. A. Kartsev, K. A. Petrovskii

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Kartsev Mikhail Alexandrovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: kartsev@cae-fidesys.com

Petrovskii Konstantin Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: augus2s@rambler.ru

Abstract

A numerical solution to the problem of the stress-strain state in a body made of an elastoplastic material with the sequential formation of several cavities in it after preliminary loading at finite deformations has been obtained and studied. To model plasticity, the Mises condition and the law of plastic flow associated with this condition were used. A general mechanical formulation of the problem is given based on the theory of repeated superposition of large deformations. The general solution algorithm is outlined. To solve the problem, we used the finite element method and its modification — the spectral element method. The solution was obtained using methods and algorithms of the engineering strength analysis system. Some results of numerical calculations are presented for the plane static problem of stress concentration in the vicinity of three elliptical cavities formed in a body of square cross-section in the case of plane strain. Effects caused by plasticity, geometric nonlinearity, and redistribution of finite deformations were studied. The results were compared for cases of sequential and simultaneous formation of cavities.

Keywords: elastoplastic material, repeated superposition of large deformations, finite element method, spectral element method, stress concentration near cavities.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Levin, V.A., Zingerman, K.M., Kartsev, M.A., Petrovskii, K.A. 2024, "Calculation of the stress-strain state in a pre-loaded elastoplastic body with the sequential formation of cavities based on the theory of repeated superposition of large deformations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 239–249.

1. Введение

Важный класс задач механики деформируемого твердого тела — задачи о концентрации напряжений вблизи полостей различной формы [1, 2]. Особый интерес представляет решение этих задач при конечных деформациях для различных классов материалов. В частности, большое значение имеет исследование концентрации напряжений вблизи отверстий, образованных в предварительно нагруженных телах. Для постановки и решения этих задач используется теория многократного наложения больших деформаций [3, 4, 5, 6, 7]. Ранее с использованием этой теории был решен ряд задач данного класса для нелинейно-упругих [5, 7] и вязкоупругих [6, 8, 9] тел с использованием как приближенных аналитических методов, так и численных методов. Представляет интерес решение этих задач для упругопластических тел.

2. Механическая постановка задачи

В теории многократного наложения больших деформаций деформирование тел рассматривается как многоэтапный процесс [3, 5]. Различают N состояний тела:

— начальное, или естественное (ненапряженное), состояние, когда в теле отсутствуют напряжения и деформации;

($N - 2$) промежуточных состояния, в которые поочередно переходит тело под влиянием внешних воздействий; при этом в теле накапливаются (возникают) большие дополнительные деформации и напряжения, которые накладываются на уже имеющиеся большие деформации и напряжения;

конечное, или текущее, состояние, в которое тело переходит после приложения к нему в заранее заданном порядке всех нагрузок.

Состояния нумеруются от 0 до N .

Механическая постановка задачи о последовательном образовании полостей следующая [5].

В начальном состоянии в теле отсутствуют напряжения и деформации. Затем под воздействием внешней начальной нагрузки, приложенной к телу, в нем накапливаются начальные большие деформации. Тело переходит в первое промежуточное состояние. В области, занимаемой телом, мысленно намечается замкнутая поверхность. Часть тела, ограниченная этой поверхностью, удаляется, а ее действие на оставшуюся часть заменяется по принципу освобожденности от связей силами, распределенными по данной поверхности. Далее эти силы, перешедшие в разряд внешних, мгновенно изменяются. Это вызывает возникновение в оставшейся части тела дополнительных больших (по крайней мере в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций и напряжений, которые накладываются на начальные. Изменяется граница тела, и оно переходит во второе промежуточное состояние.

В этом состоянии в теле намечается новая замкнутая поверхность. Часть тела, ограниченная этой поверхностью, удаляется, а ее действие на оставшуюся часть заменяется по принципу освобожденности от связей силами, распределенными по данной поверхности. Далее эти силы, перешедшие в разряд внешних, мгновенно изменяются. Это вызывает возникновение в оставшейся части тела дополнительных больших (по крайней мере в окрестности вновь образованной граничной поверхности) деформаций и напряжений, которые накладываются на уже имеющиеся. Тело переходит в третье промежуточное состояние.

Далее в теле могут образовываться новые отверстия по той же схеме.

3. Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи включает уравнения равновесия и граничные условия, записанные в координатных базисах различных состояний, определяющие соотношения и кинематические соотношения. Запись уравнений равновесия, граничных условий и кинематических соотношений приведена в работах [3, 5, 6, 7]. Приведем запись определяющих соотношений для упругопластического материала, следуя [10, 11, 12].

Используется мультипликативное разложение аффинора деформаций Ψ на упругую и пластическую составляющие [13, 14]: $\Psi = \Psi^p \cdot \Psi^e$.

Упругое поведение материала характеризуется определяющими соотношениями для гиперупругого материала. Функция плотности энергии деформации (упругий потенциал) представляется следующим образом:

$$\mathcal{W} = U(J^e) + W(\bar{\mathbf{F}}^e) = \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{2}(J^{e2} - 1) - \ln J^e\right) + \frac{1}{2}\mu(\text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^e) - 3), \quad (1)$$

где $\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\Psi}^{e*} \cdot \bar{\Psi}^e$ — сохраняющая объем часть тензора меры упругих деформаций Фингера; $J = \det \Psi$ — кратность изменения объема, $J^e = \det \Psi^e$ — кратность изменения объема при упругой деформации, $\bar{\Psi}^e = (J^e)^{-\frac{1}{3}}\Psi^e$ — сохраняющая объем часть аффинора упругой деформации; tr — первый инвариант тензора второго ранга; K, μ — упругие модули объемного сжатия и сдвига, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Тензор напряжений Кирхгофа τ выражается через упругий потенциал следующим образом [15]:

$$\tau = 2(\Psi^e)^* \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{G}^e} \cdot \Psi^e, \quad (2)$$

где $\mathbf{G}^e = \Psi^e \cdot (\Psi^e)^*$ — тензор меры упругих деформаций Грина.

Связь тензора истинных напряжений σ с тензором напряжений Кирхгофа имеет вид

$$\sigma = \frac{1}{J}\tau$$

Для упругого потенциала, записанного в форме (1), выражение (2) представляется следующим образом:

$$\tau = \frac{K}{2}J^e\left(J^e - \frac{1}{J^e}\right)\mathbf{I} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{F}}^e],$$

здесь dev — девиатор тензора.

Условие пластичности Мизеса, записанное в напряжениях Кирхгофа:

$$f_y(\tau) = \|\text{dev}(\tau)\| - \sigma_0, \quad (3)$$

где $\|\text{dev}(\tau)\| = \sqrt{\text{dev}(\tau) \cdot \text{dev}(\tau)}$, σ_0 — предел текучести. Ассоциированный с функцией (3) закон течения [16]:

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{G}^p)^{-1}] = -\frac{2}{3}\lambda \text{tr}(\bar{\mathbf{F}}^e)(\Psi^{-1})^* \cdot \mathbf{n} \cdot \Psi^{-1}, \quad (4)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\text{dev}(\tau)}{\|\text{dev}(\tau)\|}$ — нормаль к поверхности напряжений, λ — множитель Лагранжа.

4. Алгоритм решения задачи

Приведем общий алгоритм решения задачи о последовательном образовании полостей в теле из упругопластического материала при конечных деформациях. Этот алгоритм не имеет принципиальных отличий от соответствующего алгоритма для тел из нелинейно-упругого материала [5].

1. Решается в координатах начального состояния задача о начальном нагружении тела (о переходе из начального в первое промежуточное состояние). Решение этой задачи позволяет определить форму тела в первом промежуточном состоянии.

2. Решается в координатах первого промежуточного состояния задача о начальном нагружении тела (о переходе из начального в первое промежуточное состояние). Решение этой задачи позволяет определить характеристики напряженно-деформированного состояния тела в координатном базисе первого промежуточного состояния.

3. Решается в координатах первого промежуточного состояния задача об образовании первой полости в теле с начальными деформациями. Решение этой задачи позволяет определить форму тела (с образованной первой полостью) во втором промежуточном состоянии.

4. Решается в координатах второго промежуточного состояния задача об образовании первой полости. Решение этой задачи позволяет определить характеристики напряженно-деформированного состояния тела в координатном базисе второго промежуточного состояния.

5. Решается в координатах второго промежуточного состояния задача об образовании второй полости в теле с накопленными деформациями. Решение этой задачи позволяет определить форму тела (с образованными полостями) в третьем состоянии.

Далее, если число полостей больше двух, вычисления могут быть продолжены по аналогичной схеме.

Для решения задачи на каждом этапе деформирования использован метод конечных элементов [17, 18] и его современная модификация — метод спектральных элементов [11, 18, 19, 20]. При решении использованы методы и алгоритмы численного анализа, реализованные в САЕ-системе Фидесис, и программные модули, входящие в эту систему [10, 11, 18].

5. Результаты расчетов

Выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния для случая плоской деформации тела квадратного сечения со стороной 20 м с тремя эллиптическими полостями (малая полуось первой полости 0.25 м, большая полуось $a = 0.5$ м; малые полуоси двух других полостей 0.2 м, большие полуоси 0.4 м). Ввиду симметрии рассмотрена четверть модели (рис. 1). На рис. 2 приведена конечно-элементная сетка вблизи полостей.

Механические свойства упруго-пластического материала: модуль Юнга $E = 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.48$, предел текучести $\sigma_y = 0.1$ ГПа.

На первом шаге деформирования к модели прикладываются следующие граничные условия: на границе $x = 0$ $u_x = 0$; на границе $y = 0$ $u_y = 0$; на границе $y = 10$ м $u_y = 0.5$ м.

Далее на следующих двух шагах последовательно удаляются блоки полостей, моделируя их образование. Считается, что вторая и третья полости образуются одновременно.

Результаты расчета.

На рис. 3, 4 приведены зависимости характеристик напряженно-деформированного состояния от координаты x для точек отрезка $(0.5, 0) - (2, 0)$ (т.е. на оси первой полости). На этих рисунках использованы следующие обозначения:

— красным цветом обозначены результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с конечными деформациями при решении методом конечных элементов,

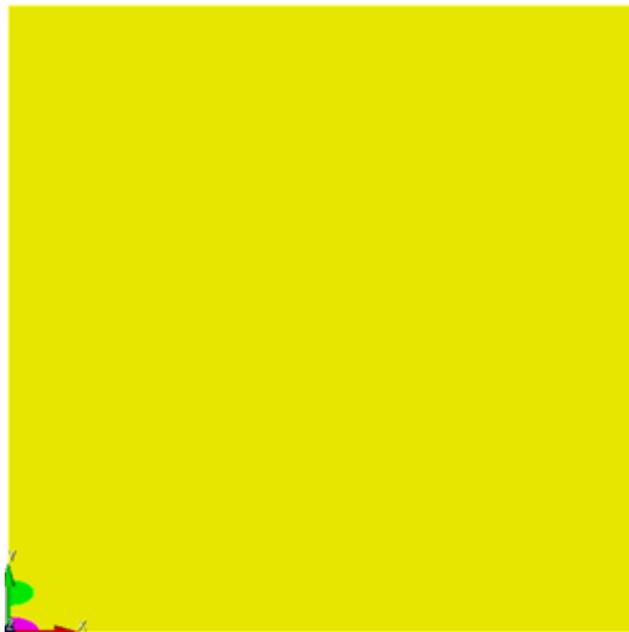


Рис. 1: Геометрическая модель задачи

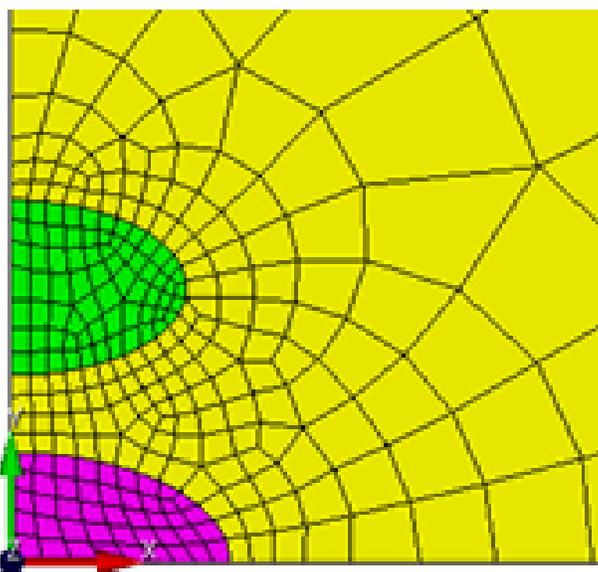


Рис. 2: Конечно-элементная сетка вблизи полостей

- зеленым цветом обозначены результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с конечными деформациями при решении методом спектральных элементов,
- синим цветом — результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с малыми деформациями при решении методом конечных элементов,
- черным цветом — результаты решения задачи при постановке в рамках теории упругости с конечными деформациями при решении методом конечных элементов.

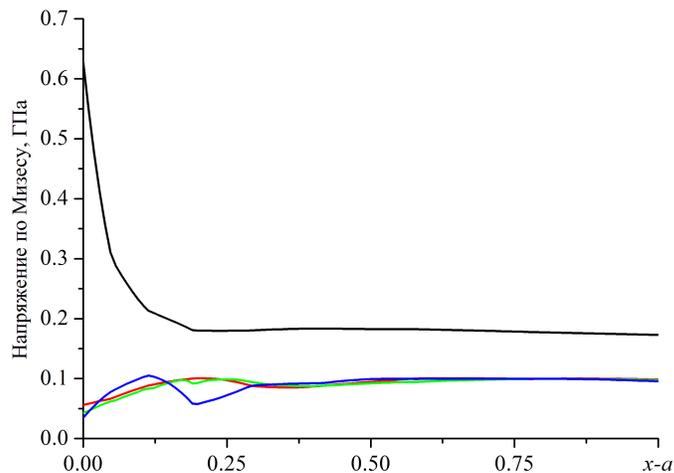


Рис. 3: Графики распределения напряжений вдоль оси x для последнего шага нагружения для различных вариантов постановки задачи и метода решения

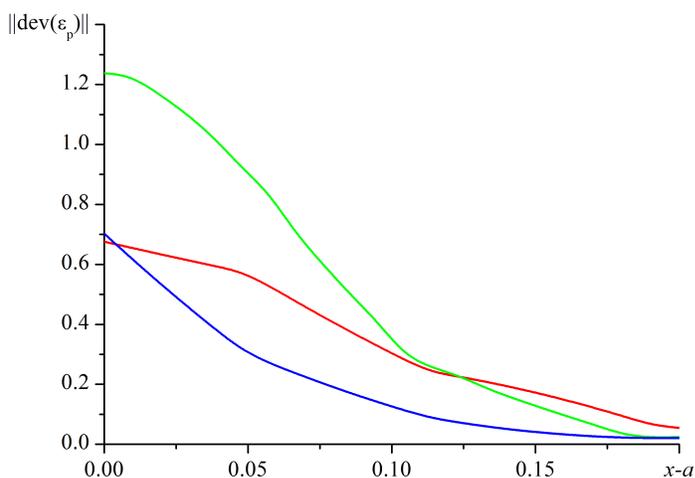


Рис. 4: Графики распределения интенсивности пластических деформаций вдоль оси x для последнего шага нагружения для различных вариантов постановки задачи и метода решения

Можно видеть, что учет пластических деформаций приводит к существенному увеличению перемещений и значительному (примерно в 10 раз) уменьшению напряжений вблизи вершины первой полости. Следует также отметить заметное влияние геометрической нелинейности на напряжения и пластические деформации вблизи этой вершины. Можно видеть также, что результаты решения задачи методом спектральных элементов и методом конечных элементов мало различаются.

Выполним сравнение результатов для случаев последовательного и одновременного образования полостей. На рис. 5 приведено распределение напряжений и деформаций вблизи полостей для этих двух случаев. Можно видеть, что в случае одновременного образования

полостей напряжение по Мизесу вблизи вершины первой полости значительно меньше, чем в случае одновременного их образования, а полные и пластические деформации вблизи вершины второй полости значительно больше в случае одновременного образования полостей, чем при их последовательном образовании.

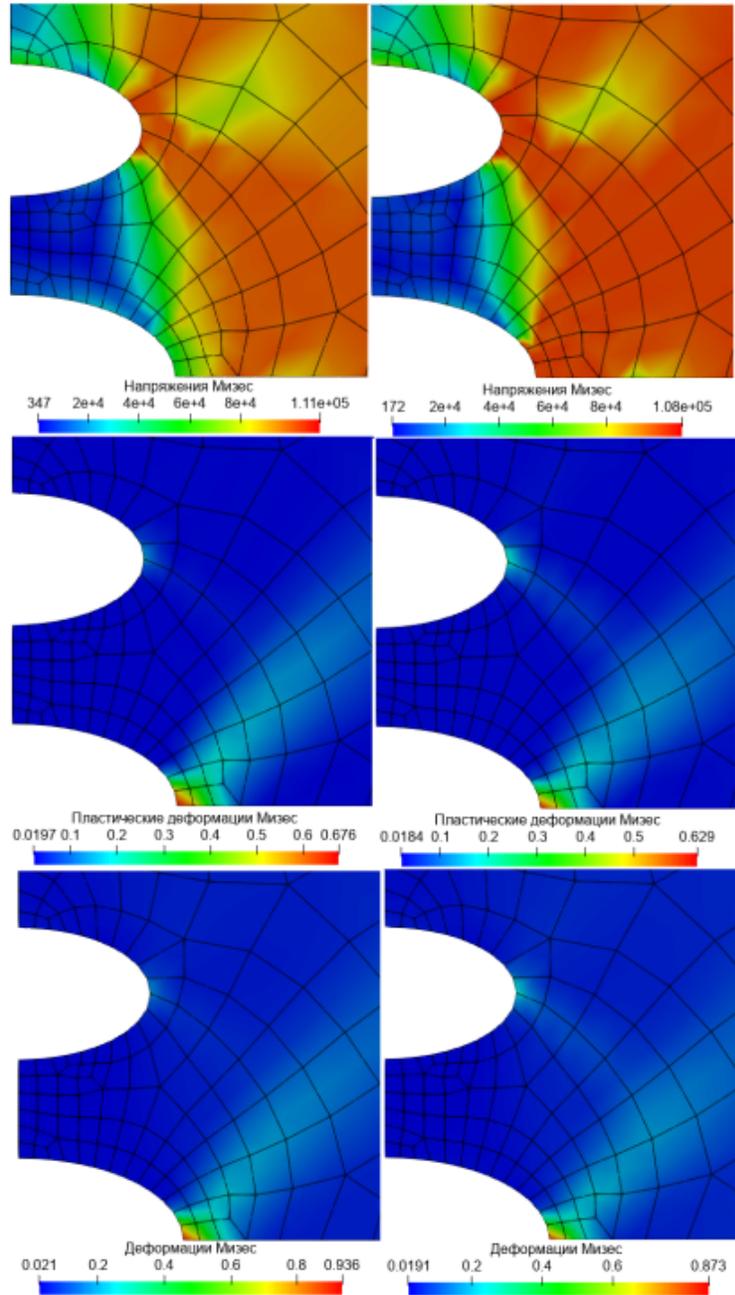


Рис. 5: Поля напряжений (сверху) и пластических (в середине) и полных (снизу) деформаций вблизи полостей. Слева — результаты для случая последовательного образования полостей, справа — для случая одновременного их образования

6. Заключение

Таким образом, получено на основе теории многократного наложения больших деформаций численное решение задачи о концентрации напряжений вблизи отверстий, образованных в предварительно нагруженном упругопластическом теле при конечных деформациях. Результаты числовых расчетов показывают, что учет нелинейных эффектов, связанных с пластичностью материала и геометрической нелинейностью, в данной задаче является существенным. Имеются существенные количественные различия характеристик напряженно-деформированного состояния при последовательном и одновременном образовании полостей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.
3. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains // *International Journal of Engineering Science*, 2018, V. 133, P. 47–59.
4. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009. V. 73, Issue 6. P. 710–721, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.011>.
5. Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи многократного наложения больших деформаций. Методы решения. М.: Физматлит, 2002. 272с.
6. Zingerman K.M., Levin V.A. Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 77, Issue 2, 2013, Pages 235-244, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.07.016>.
7. Levin V.A., Zingerman K.M. Interaction and Microfracturing Pattern for Successive Origination (Introduction) of Pores in Elastic Bodies: Finite Deformation // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. no. 2. P. 431-435.
8. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008. V. 24, Issue 12. P. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>
9. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Freiman E.I., Yangirova A.V. Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains // *International Journal of Solids and Structures*, 2013. V. 50, no. 20-21, p. 3119–3135. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019>
10. Абрамов С.М., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске // *Чебышевский сборник*. 2017. Т. 18, № 3. С. 15–27.
11. Левин В.А., Зингерман К.М., Крапивин К.Ю., Яковлев М.Я. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21, № 3. С. 306–316.

12. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y. Numerical Solution of Stress Concentration Problems in Elastic-Plastic Bodies Under the Superposition of Finite Deformations // *Advanced Structured Materials*, 2023, V. 198. P. 305–323.
13. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
14. Mandel, J. Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique. *Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics*. 1966. P. 502-509.
15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
16. Simo J. C., Hughes T. J. R. *Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics*. Vol. 7. 1998. Springer, New York. 392 p.
17. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 7-th edition. Elsevier, 2014. - 624 p.
18. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. 544 с.
19. Komatitsch D., Vilotte J. P. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 88:2 (1998), 368–392.
20. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modeling and Simulation in Engineering*. 2017 (2017), art. id. 1797561.

REFERENCES

1. Muskhelishvili, N. I. 1963, “Some basic problems of the theory of elasticity”, *Noordhof, Groningen*, P. 707.
2. Savin, G.N. 1968, “Распределение напряжений около отверстий. [Stress distribution near holes]”, *Kiev: Naukova dumka*, 887 p. (in Russian).
3. Levin, V.A., Zubov, L.M., Zingerman, K.M. 2018, “Multiple joined prestressed orthotropic layers under large strains”, *International Journal of Engineering Science*. V. 133, pp. 47–59.
4. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2009, “Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, V. 73, Iss. 6. pp. 710–721. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.011>.
5. Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2002, “Ploskie zadachi mnogokratnogo nalozheniya bol'shikh deformacij. Metody resheniya. [Plane problems of the theory of repeated superposition of large strains: Methods of solution]”, *M.: Fizmatlit*, 272 p. (in Russian).
6. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2013, “Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, V. 77, Iss. 2. pp. 235-244. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.07.016>.

7. Levin, V.A., Zingerman, K.M. 1998, "Interaction and microfracturing pattern for successive origination (introduction) of pores in elastic bodies: Finite deformation", *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. no. 2. pp. 431–435. doi: 10.1115/1.2789072.
8. Levin, V.A., Zingerman, K.M., 2008. "A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains *Communications in Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24, Issue 12. pp. 2240–2251. doi: 10.1002/cnm.1080.
9. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Vershinin, A.V., Freiman, E.I., Yangirova, A.V. 2013, "Numerical analysis of the stress concentration near holes originating in previously loaded viscoelastic bodies at finite strains", *International Journal of Solids and Structures*. V. 50, no. 20–21, pp. 3119–3135. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2013.05.019.
10. Abramov, S.M., Amel'kin, S.A., Kljuev, L.V., Krapivin, K.J., Nozhnickij, J.A., Servetnik, A.N., Chichkovskij, A.A. 2017, "Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk in the Fidesys program", *Chebyshevskii Sbornik*. V. 18(3). pp.15-27. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-15-27.
11. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Yu., Yakovlev, M.Ya. 2020, "Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains", *Chebyshevskii Sbornik*. V. 21(3). pp. 306–316. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316.
12. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y. 2023, "Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations", *Advanced Structured Materials*. V. 198. pp. 305–323. doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.
13. Lee E. H. 1969, "Elastic-plastic deformation at finite strains", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 36. Iss. 1. pp. 1–6.
14. Mandel, J. 1966, "Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique", *Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics*. pp. 502–509.
15. Lurie, A.I. 1990, "Nonlinear Theory of Elasticity", *North-Holland, Amsterdam*.
16. Simo, J. C., Hughes, T.J.R. 1998, "Computational Inelasticity", *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Vol. 7. *Springer, New York*. 392 p.
17. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Fox, D.D. 2014, "The finite element method for solid and structural mechanics", *7-th edition. Elsevier*. 624 p.
18. Levin, V.A., Vershinin, A.V. 2015, "Nelinejnaya vy'chislitel'naya mekhanika prochnosti. Tom 2. Chislenny'e metody'. Parallel'ny'e vy'chisleniya na E'VM. [Nonlinear Computational Strength Mechanics. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel computing.]", Pod obshh. red. V.A. Levina. *Fizmatlit, Moscow*. 544 p. (in Russian).
19. Komatitsch, D., Vilotte, J. P. 1998, "The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures", *Bull. Seismol. Soc. Am.* V. 88, no. 2. pp. 368–392. doi: 10.1785/BSSA0880020368.
20. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. 2017, "The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes", *Modeling and Simulation in Engineering*. V. 2017, art. id. 1797561. doi: 10.1155/2017/1797561.