

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-228-238

Численное моделирование принудительного многоэтапного роста полости в теле из упругопластического материала при наложении больших деформаций¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, М. А. Карцев

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Зингерман Константин Моисеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Карцев Михаил Александрович — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: cartsev@cae-fidesys.com

Аннотация

Выполнен расчет напряженно-деформированного состояния в окрестности полости, образованной в предварительно деформированном теле из упругопластического материала, для случая пошагового роста полости в несколько этапов. Задача решается в квазистатической постановке при конечных деформациях с учетом их перераспределения после каждого этапа деформирования. Предполагается, что переход материала в пластическое состояние происходит в соответствии с условием пластичности Мизеса, а пластическое деформирование материала описывается ассоциированным законом пластического течения. Постановка и решение задачи осуществляются на основе теории многократного наложения больших деформаций. Приведен общий алгоритм решения задачи в рамках этой теории. Для решения используются метод конечных элементов и метод спектральных элементов. При решении использованы методы и алгоритмы, реализованные в системе инженерного прочностного анализа Фидесис, и программные модули, входящие в эту систему. Модельные расчеты выполнены для случая плоской деформации тела квадратного сечения с центральной эллиптической (в момент образования) полостью, рост которой происходит в несколько этапов по заранее заданному закону. Приведены графики распределения напряжений в теле. Исследуется влияние пластических свойств материала и многоэтапности деформирования на напряженно-деформированное состояние.

Ключевые слова: принудительный рост дефекта, многоэтапное деформирование, многократное наложение больших деформаций, упругопластический материал, плоская деформация, метод конечных элементов, метод спектральных элементов.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Левин, В.А., Зингерман, К.М. Карцев, М.А. Численное моделирование принудительного многоэтапного роста полости в теле из упругопластического материала при наложении больших деформаций // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 228–238.

¹Работа выполнена в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00110).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-228-238

Numeric modeling of forced multistage growth of a hole in elastoplastic solid under superimposed large strains

V. A. Levin, K. M. Zingerman, M.A.Kartsev

Levin Vladimir Anatol'evich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Zingerman Konstantin Moiseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tver State University (Tver).

e-mail: Zingerman@rambler.ru

Kartsev Mikhail Alexandrovich — postgraduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: kartsev@cae-fidesys.com

Abstract

The stress-strain state in the vicinity of a cavity formed in a pre-strained body made of elastic-plastic material is calculated for the case of step-by-step cavity growth in several stages. The problem is solved in a quasi-static formulation for finite strains taking into account their redistribution after each stage of deformation. It is assumed that the transition of material to a plastic state occurs in accordance with the von Mises plasticity condition, and plastic deformation of the material is described by the associated law of plastic flow. The problem is formulated and solved based on the theory of multiple superposition of large strains. A general algorithm for solving the problem within the framework of this theory is presented. The finite element method and the spectral element method are used for the solution. The methods and algorithms implemented in the Fidesys engineering strength analysis system and software modules included in this system were used in the solution. Model calculations are performed for the case of plane deformation of a square body with a central elliptical (at the time of formation) cavity, the growth of which occurs in several stages according to a predetermined law. Graphs of stress distribution in the body are given. The influence of plastic properties of the material and multi-stage deformation on the stress-strain state is investigated.

Keywords: forced growth of defect, multi-stage deformation, multiple imposition of large deformations, elastic-plastic material, plane deformation, finite element method, spectral element method.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Levin, V.A., Zingerman, K.M. Kartsev, M.A. 2024, "Numeric modeling of forced multistage growth of a hole in elastoplastic solid under superimposed large strains", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 228–238.

1. Введение

Актуальная проблема современной механики деформируемого твердого тела — расчет напряженно-деформированного состояния вблизи полостей, образованных и растущих в нагруженных телах. В рамках теории многократного наложения больших деформаций может

быть рассмотрен рост полостей в несколько этапов, когда на каждом этапе в окрестности полости возникают конечные деформации, которые накладываются на уже имеющиеся в теле деформации [1]. На основе этой теории возможны различные подходы к постановке задач о напряженно-деформированном состоянии полостей при их росте. Один из подходов предполагает, что форма и размеры полости на каждом этапе задаются предварительно, т.е. рассматривается принудительный рост полости. Этот подход может быть применен, например, при моделировании сверления отверстий, бурения скважин, проведения горных выработок. В рамках другого подхода после расчета напряжений и деформаций на каждом этапе определяется область вблизи полости, в которой превышен некоторый критерий прочности, и на следующем этапе эта область присоединяется к полости [2, 3, 4]. Такой подход может быть применен к моделированию процессов разрушения.

Алгоритм решения задач о пошаговом (в несколько этапов) росте полости с использованием метода конечных элементов приведен в монографии [5]. В этой же книге представлены некоторые результаты решения этих задач для тел из нелинейно-упругого материала. Для упругопластических материалов решение одной задачи о пошаговом росте полости представлено в [6]. В этой статье решена плоская задача о напряженном состоянии вблизи полости, имеющей первоначально форму кругового цилиндра. Рост этой полости осуществлялся посредством присоединения к ней областей, ограниченных в сечении дугами эллипса. При этом часть новой границы совпадала с соответствующей частью предыдущей границы.

В настоящей статье решена задача о пошаговом росте полости, первоначально имеющей форму цилиндра эллиптического сечения. На каждом следующем шаге новая граница также имеет форму цилиндра эллиптического сечения и полностью охватывает предыдущую границу, не имея с ней общих частей.

Переход материала в пластическое состояние определяется условием Мизеса, а пластическое деформирование материала описывается ассоциированным законом пластического течения. Приведен общий алгоритм решения задачи в рамках теории многократного наложения больших деформаций. Для решения используется метод конечных элементов и его модификация — метод спектральных элементов. Исследуется влияние пластических свойств материала и многоэтапности деформирования на напряженно-деформированное состояние.

2. Постановка задачи и общий алгоритм ее решения

Постановка задачи о росте полости (дефекта) в теле из упругопластического материала в рамках теории многократного наложения конечных деформаций не имеет принципиальных отличий от постановки аналогичной задачи для нелинейно-упругих тел, которая приведена в [1, 2], поэтому не будем ее здесь приводить. Для описания механического поведения материала в области упругих деформаций используется определяющее соотношение [6]

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{K}{2} J^e (J^e - \frac{1}{J^e}) \mathbf{I} + \mu \operatorname{dev}[\bar{\mathbf{F}}^e],$$

здесь dev — девиатор тензора; $\mathbf{I}$ — единичный тензор; $\boldsymbol{\tau}$ — тензор напряжений Кирхгофа, связанный с тензором истинных напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ соотношением $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$; J — кратность изменения объема; J^e — кратность изменения объема при упругой деформации; $\mathbf{F}^e$ — тензор меры упругих деформаций Фингера; $\bar{\mathbf{F}}^e = (J^e)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{F}^e$; K, μ — упругие модули объемного сжатия и сдвига, связанные с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Условие пластичности Мизеса записывается в форме

$$f_y(\boldsymbol{\tau}) = \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau})\| - \sigma_0 = 0. \quad (1)$$

Здесь σ_0 — предел текучести, $||\text{dev}(\boldsymbol{\tau})|| = \sqrt{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau})}$.

Используется мультипликативное разложение аффинора деформаций на упругую и пластическую составляющие [7] и ассоциированный с функцией (1) закон пластического течения [8].

Приведем общий алгоритм решения задачи о пошаговом росте полости в теле из упругопластического материала при конечных деформациях, основанный на общей методологии теории многократного наложения конечных деформаций [1, 2, 3, 5].

1. Решается в координатах начального состояния задача о начальном нагружении тела (о переходе из начального в первое промежуточное состояние). Решение этой задачи позволяет определить форму тела в первом промежуточном состоянии.

2. Решается в координатах первого промежуточного состояния задача о начальном нагружении тела (о переходе из начального в первое промежуточное состояние). Решение этой задачи позволяет определить характеристики напряженно-деформированного состояния тела в координатном базисе первого промежуточного состояния.

3. Решается в координатах первого промежуточного состояния задача об образовании полости в теле с начальными деформациями. Решение этой задачи позволяет определить форму тела (с образованной полостью) во втором промежуточном состоянии.

4. Решается в координатах второго промежуточного состояния задача об образовании полости. Решение этой задачи позволяет определить характеристики напряженно-деформированного состояния тела в координатном базисе второго промежуточного состояния.

5. Задается новая граница полости. Здесь возможны два варианта ее задания. Первый вариант — когда новая граница полностью охватывает предыдущую границу в координатах второго промежуточного состояния, не имея с ней общих частей. Второй вариант — когда новая граница частично охватывает предыдущую границу в координатах второго промежуточного состояния и при этом часть новой границы совпадает с соответствующей частью предыдущей границы.

6. Решается в координатах второго промежуточного состояния задача об образовании полости в теле с накопленными деформациями. Решение этой задачи позволяет определить форму тела (с образованной полостью) в третьем состоянии.

Далее вычисления могут быть продолжены по аналогичной схеме.

Для реализации этого алгоритма формулируется [1, 3] постановка задачи об образовании полости в координатах того состояния, в котором эта полость образуется. На основе общих положений теории многократного наложения конечных деформаций записываются уравнения равновесия, граничные условия, кинематические соотношения и определяющие соотношения в координатах этого состояния.

Для решения задачи на каждом этапе деформирования использован метод конечных элементов [5, 9] и его современная модификация — метод спектральных элементов [5, 10, 11]. При решении использованы методы и алгоритмы численного анализа, реализованные в САЕ-системе Фидесис [5, 11, 12, 13], и программные модули, входящие в эту систему.

3. Результаты расчетов

Выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния для случая плоской деформации тела квадратного сечения со стороной 60 м с пошагово растущей центральной эллиптической полостью (малая полуось изменяется от 0.5 м до 2 м, большая полуось — от 0.75 м до 3 м). Ввиду симметрии рассмотрена четверть модели (рис. 1, 2).

Параметры материала: модуль Юнга $E = 3$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.48$, предел текучести $\sigma_y = 0.1$ ГПа.

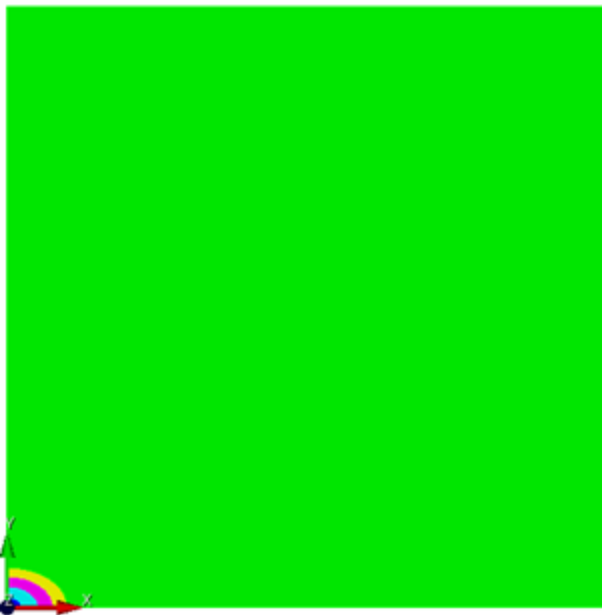


Рис. 1: Геометрическая модель задачи о пошаговом росте полости

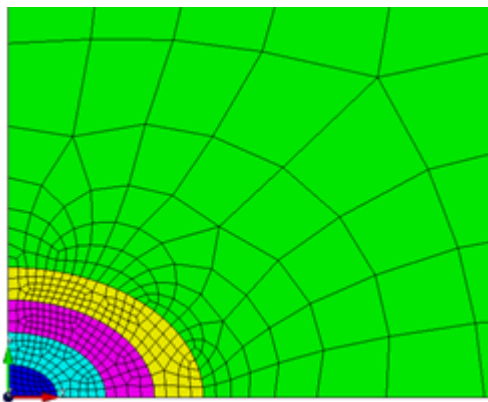


Рис. 2: Конечно-элементная сетка вблизи полости

На первом шаге деформирования к модели прикладываются следующие граничные условия: на границе $x = 0$ $u_x = 0$; на границе $y = 0$ $u_y = 0$; на границе $y = 30$ м $u_y = 2$ м. Далее на протяжении следующих четырёх шагов последовательно удаляются блоки полости, моделируя её рост.

На последующих графиках (рис. 3–5) показано распределение характеристик напряженно-деформированного состояния вдоль оси x при $y = 0$ для последнего шага нагружения:

- красным цветом обозначены результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с конечными деформациями при решении методом конечных элементов (МКЭ),
- зеленым цветом обозначены результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с конечными деформациями при решении методом спектральных элементов (МСЭ),
- синим цветом — результаты решения задачи в упруго-пластической постановке с малыми деформациями при решении методом конечных элементов,
- черным цветом — результаты решения задачи при постановке в рамках теории упругости с конечными деформациями при решении методом конечных элементов.

На рис. 3 показано распределение истинных напряжений по Мизесу вдоль оси x . Из этого рисунка можно видеть, что при решении задачи в рамках теории упругости напряжения в несколько раз больше, чем при решении с учетом пластических свойств материала (на границе полости — в 7 раз больше). На этом графике различия между вариантами постановки задачи и методами решения для упругопластического материала мало заметны.

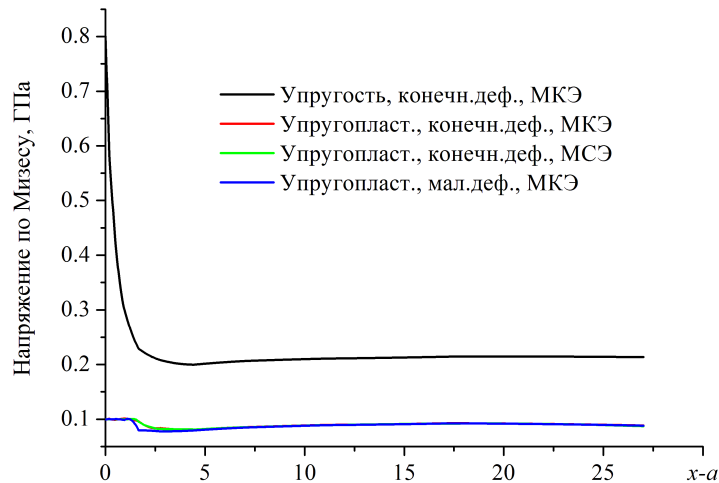


Рис. 3: Графики распределения напряжений вдоль оси x для последнего шага нагружения для различных вариантов постановки задачи и метода решения

На рис. 4 показано то же распределение напряжений, что и на рис. 3, но только для упругопластического материала. Можно видеть, что учет конечности деформаций приводит к некоторому увеличению напряжений. Различия между решением задачи методом конечных элементов и методом спектральных элементов незначительны.

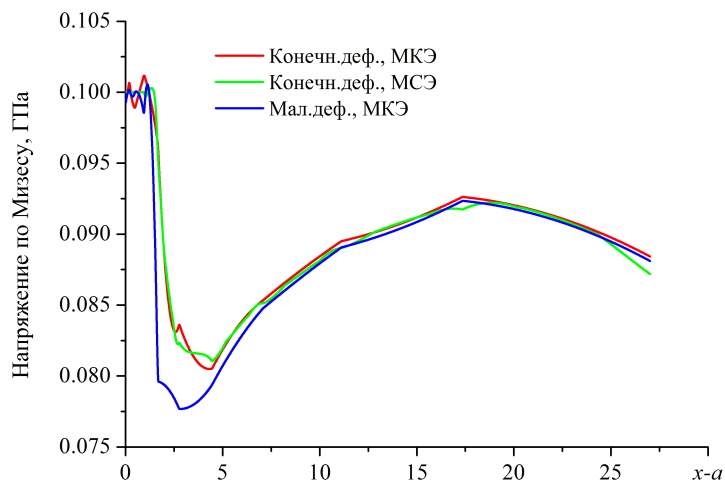


Рис. 4: Графики распределения напряжений вдоль оси x для последнего шага нагружения для различных вариантов постановки задачи (для упругопластического материала) и метода решения

На рис. 5 показано распределение пластических деформаций по Мизесу вдоль оси x . Из этого рисунка можно видеть, что учет конечности деформаций приводит к некоторому увеличению пластических деформаций. При решении задачи методом спектральных элементов пластические деформации вблизи полости получаются примерно на 10 % больше, чем при решении методом конечных элементов.

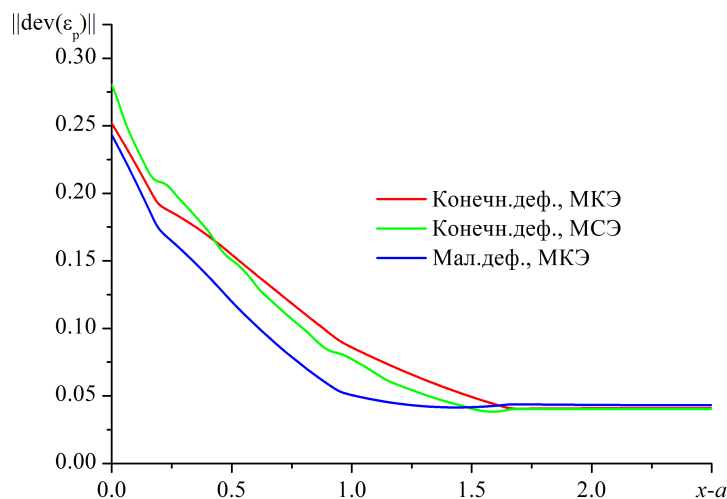


Рис. 5: Графики распределения интенсивности пластических деформаций вдоль оси x для последнего шага нагружения для различных вариантов постановки задачи и метода решения

На рис. 6 приведены результаты сравнения пошагового роста полости (слева) и прямого перехода к конечному состоянию (справа). Из рисунка можно видеть, что поля напряжений для этих вариантов постановки задачи мало различаются, в то время как поля пластических и полных деформаций различаются существенно.

На рис. 7 показано для всех этапов роста полости поле пластических деформаций (по Мизесу) при решении задачи методом спектральных элементов. Из рисунка можно видеть существенную неоднородность распределения пластических деформаций. Отметим также, что на каждом шаге роста полости максимальное значение пластической деформации по Мизесу существенно меньше, чем на предыдущем шаге.

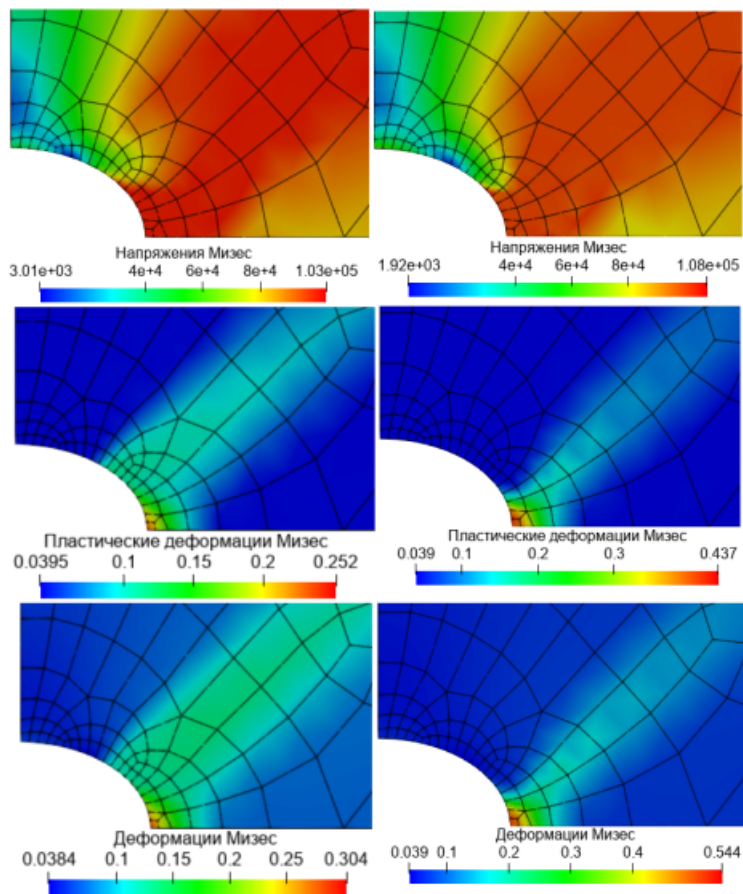


Рис. 6: Поля напряжений (сверху) и пластических (в середине) и полных (снизу) деформаций вблизи полости. Слева — результаты для случая пошагового роста полости, справа — для случая прямого перехода к конечному состоянию

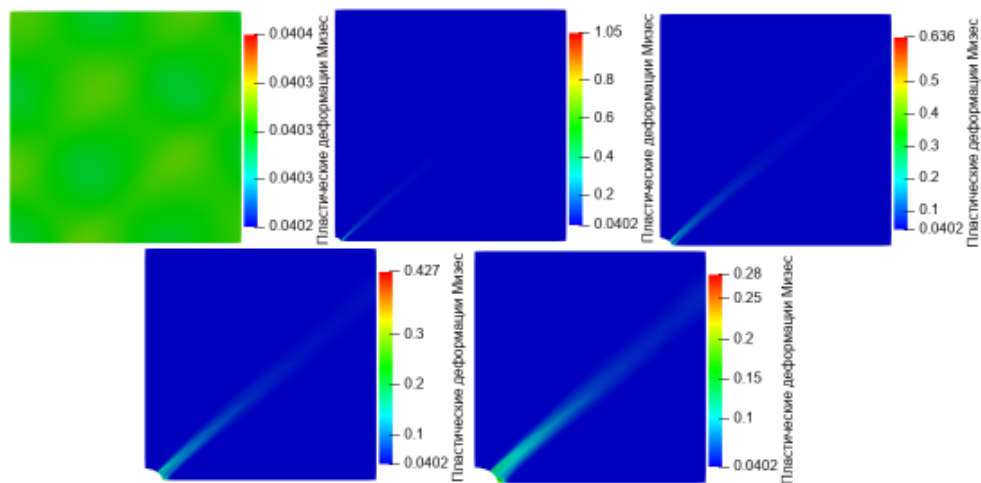


Рис. 7: Поле пластических деформаций по Мизесу вблизи полости для всех этапов роста полости

4. Заключение

Таким образом, получено численное решение задачи о принудительном многоэтапном росте полости, образованной в предварительно нагруженном упругопластическом теле при конечных деформациях. Задача формулируется и решается на основе теории многократного наложения больших деформаций. Результаты расчетов показывают, что учет нелинейных эффектов, связанных с пластичностью материала, в данной задаче является существенным. Геометрическая нелинейность также влияет на результат, но ее влияние менее заметно. Имеются существенные количественные различия характеристик напряженно-деформированного состояния при пошаговом росте полости и в случае, когда полость образуется сразу (в один шаг).

Предложенный подход может быть в дальнейшем применен к решению задач о росте включений, образованных в предварительно нагруженных упругопластических телах при конечных деформациях (для нелинейно-упругих тел постановка таких задач и некоторые результаты их решения приведены в [14]), а также к задачам о соединении предварительно нагруженных упругопластических тел (например, к задаче Ламе–Гадолина [15]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains. Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 24, Issue 12. P. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>
2. Левин В.А. Нелинейная вычислительная механика прочности. Т. 1. Модели и методы. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2014. — 456 с.
3. Левин В.А., Лохин В.В., Зингерман К.М. Рост узкой щели, образованной в предварительно нагруженном нелинейно-упругом теле. Анализ с помощью теории многократного наложения больших деформаций // Доклады РАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 764–766.
4. Левин В.А., Морозов Е.М. Нелокальные критерии для определения зоны предразрушения при описании роста дефекта при конечных деформациях // Доклады Академии наук. 2007. Т. 415, № 1, с. 52–54.
5. Левин В.А., Вершинин А.В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. 544 с.
6. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y. Numerical Solution of Stress Concentration Problems in Elastic-Plastic Bodies Under the Superposition of Finite Deformations // Advanced Structured Materials, 2023, V. 198. P. 305–323.
7. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. Issue 1. pp. 1-6.
8. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 7. 1998. Springer, New York. 392 p.
9. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition. Elsevier, 2014. — 624 p.

10. Komatitsch D., Vilotte J. P. The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 88:2 (1998), 368–392.
11. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modeling and Simulation in Engineering*. 2017 (2017), art. id. 1797561.
12. Абрамов С.М., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске // *Чебышевский сборник*. 2017. Т. 18, № 3. С. 15–27.
13. Левин В.А., Зингерман К.М., Крапивин К.Ю., Яковлев М.Я. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций // *Чебышевский сборник*. 2020. Т. 21, № 3. С. 306–316.
14. Zingerman K.M., Levin V.A. Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009. V. 73, Issue 6. P. 710–721, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.011>.
15. Zingerman K.M., Levin V.A. Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 77, Issue 2, 2013, pp. 235–244, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.07.016>.

REFERENCES

1. Levin, V.A., Zingerman, K.M. 2008, “A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24, Issue 12. pp. 2240–2251. doi: 10.1002/cnm.1080.
2. Levin, V.A. 2014, “Nelinejnaya vy‘chislitel‘naya mekhanika prochnosti. T. 1. Modeli i metody. [Nonlinear computational strength mechanics. Vol. 1. Models and methods.]”, (*in Russian*) *Pod obshh. red. V.A. Levina. M.: Fizmatlit*, 2014. — 456 s.
3. Levin, V.A., Lokhin, V.V., Zingerman, K.M. 1995, “Growth of a narrow crack formed in a pre-loaded nonlinear-elastic body: Analysis using the theory of repeated superposition of severe strains”, *Physics-Doklady*. Vol. 40, No. 8. P. 431–433.
4. Levin, V.A., Morozov, E.M. 2007, “Nonlocal criteria for determining a prefraction zone in the process of defect growth for finite strains”, *Dokl. Phys.* V. 52, No. 7, p. 391–393. <https://doi.org/10.1134/S1028335807070129>
5. Levin V.A., Vershinin A.V. 2015, “Nelinejnaya vy‘chislitel‘naya mekhanika prochnosti. Tom 2. Chislenny‘e metody‘. Parallel‘ny‘e vy‘chisleniya na E‘VM. [Nonlinear Computational Strength Mechanics. Vol. 2. Numerical Methods. Parallel computing.]”, *Pod obshh. red. V.A. Levina. (in Russian). Fizmatlit, Moscow*. 544 p.
6. Levin, V.A., Zingerman, K.M., Krapivin, K.Y. 2023, “Numerical solution of stress concentration problems in elastic-plastic bodies under the superposition of finite deformations”, *Advanced Structured Materials*. V. 198. P. 305–323. doi: 10.1007/978-3-031-43210-1_18.

7. Lee E.H. 1969, “Elastic-plastic deformation at finite strains”, *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 36. Issue 1. P. 1–6.
8. Simo, J.C., Hughes, T.J.R. 1998, “Computational Inelasticity”, *Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, New York*. Vol. 7, 392 p.
9. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Fox, D.D. 2014, “The finite element method for solid and structural mechanics”, *Elsevier*, 7-th edition, 624 p.
10. Komatitsch, D., Vilotte, J. P. 1998, “The spectral element method: An efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures”, *Bull. Seismol. Soc. Am.* V. 88, no. 2. P. 368–392. doi: 10.1785/BSSA0880020368.
11. Konovalov D. Vershinin A., Zingerman K., Levin V. 2017, “The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes”, *Modeling and Simulation in Engineering*. V. 2017, art. id. 1797561. doi: 10.1155/2017/1797561.
12. Abramov, S.M., Amel’kin, S.A., Kljuev, L.V., Krapivin, K.J., Nozhnickij, J.A., Servetnik, A.N., Chichkovskij, A.A. 2017, “Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk in the Fidesys program”, *Chebyshevskii Sbornik*. V. 18(3). P.15-27. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-3-15-27.
13. Levin V.A., Zingerman K.M., Krapivin K.Yu., Yakovlev M.Ya. 2020, “Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains”, *Chebyshevskii Sbornik*. V. 21(3). P. 306–316. (In Russ.) doi: 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316.
14. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2009, “Redistribution of finite elastic strains after the formation of inclusions. Approximate analytical solution”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. V. 73, Issue 6. P. 710–721, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.01.011>.
15. Zingerman, K.M., Levin, V.A. 2013, “Extension of the Lamé–Gadolin problem for large deformations and its analytical solution”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. V. 77, Issue 2. P. 235-244, <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.07.016>.

Получено: 14.04.2024

Принято в печать: 24.12.2024