

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК 519.114

О СТРУКТУРНЫХ КОНСТАНТАХ ДЖЕКА И ИХ ВЫЧИСЛЕНИИ

Е. А. Васильева (г. Париж)

Аннотация

Алгебра классов сопряжённости и алгебра двойных смежных классов – классические коммутативные подалгебры групповой алгебры симметрической группы. Структурные константы этих алгебр вызвали значительный интерес у комбинаториков в связи с тем, что они представляют собой число разложений данной перестановки в упорядоченное произведение перестановок с заданной структурой циклов. Несмотря на сходство свойств эти константы обычно изучались отдельно. Для обеих семей структурных констант они равны суммам характеров – неприводимых характеров симметрической группы и зональных сферических функций, двух частных случаев более общей семьи характеров, называемых характерами Джека.

Характеры Джека являются коэффициентами в разложении по базису степенных симметрических многочленов симметрических функций Джека, семьи симметрических функций, индексируемых параметром α . Структурные константы алгебры классов соответствуют случаю $\alpha = 1$ (в этом случае симметрические функции Джека пропорциональны полиномам Шура). Структурные константы алгебры двойных смежных классов относятся к случаю $\alpha = 2$ (в этом случае симметрические функции Джека являются зональными полиномами). Структурные константы Джека позволяют рассматривать их с единой точки зрения для произвольного параметра α . Настоящая работа посвящена этим обобщённым коэффициентам и их вычислению. Точнее, мы концентрируем наше внимание на обобщении формулы для числа разложений перестановки с заданной цикловой структурой в произведение r транспозиций. Мы пользуемся действием оператора Лапласа-Белтрами на симметрические функции Джека для доказательства общей формулы и даём более простые её эквиваленты для некоторых значений r .

Ключевые слова: симметрические функции Джека, структурные константы, факторизации.

ON JACK'S CONNECTION COEFFICIENTS AND THEIR COMPUTATION

E. A. Vassilieva (Paris)

Abstract

The class algebra and the double coset algebra are two commutative subalgebras of the group algebra of the symmetric group. The connection coefficients of these two algebraic structures received significant attention in combinatorics as they provide the number of factorizations of a given permutation into an ordered product of permutations satisfying given cyclic structures. While they are usually studied separately, these two families of connection coefficients share strong similarities. They are both equal to some sums of characters, respectively the irreducible characters of the symmetric group and the zonal spherical functions, two specific cases of a more general family of characters named Jack's characters.

Jack's characters are defined as the coefficients in the power sum expansion of the Jack's symmetric functions, a family of symmetric polynomials indexed by a parameter α . Connection coefficients of the class algebra corresponds to the case $\alpha = 1$ (Jack's symmetric functions are proportional to Schur polynomials in this case) and the connection coefficients of the double coset algebra corresponds to the case $\alpha = 2$ (Jack's symmetric functions are equal to zonal polynomials). We define Jack's connection coefficients to provide a unified approach for general parameter α . This paper introduces these generalized coefficients and focus on their computations. More specifically we focus on the generalization of the formula giving the number of factorizations of a permutation of a given cyclic structure into the product of r transpositions. We use the action of the Laplace-Beltrami operator on Jack's symmetric functions to provide a general formula and make this formula explicit for some given values of r .

Keywords: Jack symmetric functions, connection coefficients, factorizations.

1. Введение

1.1. Симметрические функции и характеры Джека

Для любого целого n обозначим S_n симметрическую группу на n элементах и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) \vdash n$ разбиение $|\lambda| = n$ на $\ell(\lambda) = p$ частей в невозрастающем порядке. Пусть $m_i(\lambda)$ число частей λ равных i , будем писать λ в виде $[1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \dots]$ и обозначим $Aut_\lambda = \prod_i m_i(\lambda)!$ и $z_\lambda = \prod_i i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$. Обычно разбиение λ представляют в виде диаграммы Юнга из $|\lambda|$ единичных квадратов, составляющих $\ell(\lambda)$ рядов, так что i -й ряд содержит λ_i квадратов. Для данного квадрата s диаграммы λ обозначим $l'(s), l(s), a(s), a'(s)$ число квадратов к северу, югу, востоку, западу от s соответственно. Для некоторого параметра α обозначим:

$$h_\lambda(\alpha) = \prod_{s \in \lambda} (\alpha a(s) + l(s) + 1), \quad h'_\lambda(\alpha) = \prod_{s \in \lambda} (\alpha(1 + a(s)) + l(s)). \quad (1)$$

Наконец, обозначим λ' транспонированное разбиение λ , и для двух разбиений λ и μ будем писать $\lambda > \mu$, если для любого $i \geq 1$ выполняется $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i > \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i$.

Обозначим Λ – кольцо симметрических функций, $m_\lambda(x)$ – мономиальную симметрическую функцию, $p_\lambda(x)$ и $s_\lambda(x)$ – степенную симметрическую функцию и симметрическую функцию Шура соответственно. Назовём **симметрическими функциями Джека** J_λ^α множество симметрических функций, которые можно охарактеризовать следующими свойствами:

- (а) Функции J_λ^α ортогональны относительно альтернативного скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$, для которого выполняется

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda\mu}, \quad (2)$$

- (б) Матрица перехода между J_λ^α и мономиальными симметрическими функциями является верхнетреугольной, и коэффициент m_λ в разложении J_λ^α по мономиальному базису равен $h_\lambda(\alpha)$. С более формальной точки зрения это означает, что J_λ^α можно выразить с помощью некоторых скалярных коэффициентов $u_{\lambda\mu}^\alpha$ следующим образом:

$$J_\lambda^\alpha = h_\lambda(\alpha) m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} u_{\lambda\mu}^\alpha m_\mu. \quad (3)$$

В соответствии с этим определением J_λ^1 является нормализованной симметрической функцией Шура $h_\lambda(1)s_\lambda$, а J_λ^2 – зональной симметрической функцией Z_λ . Обозначим $\theta_\mu^\lambda(\alpha)$ коэффициент p_μ в разложении J_λ^α по степенному базису:

$$J_\lambda^\alpha = \sum_{\mu} \theta_\mu^\lambda(\alpha) p_\mu. \quad (4)$$

В случае $\alpha = 1$ коэффициенты $\theta_\mu^\lambda(1)$ равны неприводимым характеристам симметрической группы (с точностью до нормализующего множителя). В общем случае эти коэффициенты называются **характерами Джека** (смотрите [3]).

1.2. Структурные константы симметрической группы и алгебры двойных смежных классов

Для $\lambda \vdash n$ положим C_λ – **смежный класс** S_n , состоящий из перестановок с цикловым типом λ . Мощность смежных классов удовлетворяет $|C_\lambda| = n!/z_\lambda$. Далее, обозначим B_n **гипероктаэдральную группу** (т.е. централизатор элемента $f_\star = (12)(34) \dots (2n-1\ 2n)$ в S_{2n}). Обозначим K_λ **двусторонний смежный класс** B_n в S_{2n} , состоящий из всех перестановок ω из S_{2n} , таких что $f_\star \circ \omega \circ f_\star \circ \omega^{-1}$ имеет цикловую структуру $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \lambda_p)$. Имеем, $|B_n| = 2^n n!$ и $|K_\lambda| = |B_n|^2 / (2^{\ell(\lambda)} z_\lambda)$. Без ограничения общности будем далее

считать, что C_λ (соответственно K_λ) также обозначают формальную сумму их элементов в групповой алгебре $\mathbb{C}S_n$ (соответственно в $\mathbb{C}S_{2n}$). Тогда $\{C_\lambda, \lambda \vdash n\}$ (соответственно $\{K_\lambda, \lambda \vdash n\}$) составляют базис алгебры классов (соответственно алгебры двойных смежных классов, т.е. коммутативной подалгебры $\mathbb{C}S_{2n}$, заданной как алгебра Гекке пары Гельфанда (S_{2n}, B_n)). Для $\lambda^i \vdash n$ ($1 \leq i \leq r$) определим **структурные константы** $c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ и $b_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ следующим образом:

$$c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1} = [C_{\lambda^1}] \prod_{i \geq 2} C_{\lambda^i}, \quad b_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1} = [K_{\lambda^1}] \prod_{i \geq 2} K_{\lambda^i}. \quad (5)$$

С комбинаторной точки зрения $c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ является числом способов представить σ_1 из C_{λ^1} в виде упорядоченного произведения $r-1$ перестановок $\sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_r$, где σ_i принадлежит C_{λ^i} . Аналогично, $b_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ есть число упорядоченных разложений данного элемента из K_{λ^1} в произведение $r-1$ перестановок из $K_{\lambda^2}, \dots, K_{\lambda^r}$. Несмотря на интерес к сюжету и элегантные комбинаторные интерпретации коэффициентов $c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ и $b_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$, за пределами некоторых частных случаев замкнутых формул до сих пор известно мало. Вначале, пользуясь методом индукции, Бедар и Гупиль [1] нашли формулу для $c_{\lambda, \mu}^{(n)}$ в случае, когда $\ell(\lambda) + \ell(\mu) = n+1$. Позднее, используя теорию характеров симметрической группы и комбинаторные методы, Гупиль и Шэффер [4] вывели выражение для структурных констант произвольного рода в виде суммы положительных слагаемых (смотри также статью Ирвинга [5] о дальнейших обобщениях). Замкнутые формулы для разложения производящих функций коэффициентов $c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{(n)}$ (для произвольного r) и $b_{\lambda, \mu}^{(n)}$ в мономиальном базисе были найдены Васильевой и Моралесом в [8], [9], [13] and [14]. Джексон ([6]) вывел общее выражение для производящих функций $\sum_{\ell(\lambda_i)=p_i} c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1}$ в терминах некоторых явных многочленов. Это выражение позволило ему доказать следующий результат для случая $\lambda_1 = (n)$ и $\lambda_2 = \dots = \lambda_r = [1^{n-2}2^1]$:

$$c_{[1^{n-2}2^1], \dots, [1^{n-2}2^1]}^{(n)} = \frac{(r-1)!}{n!} n^{r-1} 2^{n-r} [X^{r-1}] s h^{n-1} X. \quad (6)$$

ЛЕММА 1. *Структурные константы симметрической группы и алгебры двойных смежных классов связаны с характеристиками Джека для $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$ соотношениями:*

$$c_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1} = \frac{n!}{|C_{\lambda^1}|} \sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_\beta(1) h'_\beta(1)} \prod_{i \geq 1} \theta_{\lambda^i}^\beta(1), \quad (7)$$

$$b_{\lambda^2, \dots, \lambda^r}^{\lambda^1} = \frac{|B_n|^r}{|K_{\lambda^1}|} \sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_\beta(2) h'_\beta(2)} \prod_{i \geq 1} \theta_{\lambda^i}^\beta(2). \quad (8)$$

1.3. Структурные константы Джека

Уравнения 7 и 8 имеют большое сходство. Наша цель состоит в том, чтобы найти единый и более общий алгебраический подход для изучения структурных

констант. Для целого r большего или равного 1 и $\lambda^i \vdash n$ для $1 \leq i \leq r$ введём числа $a_{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^r}$:

$$a_{\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^r}(\alpha) = \sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_\beta(\alpha) h'_\beta(\alpha)} \prod_i \theta_{\lambda^i}^\beta(\alpha). \quad (9)$$

Назовём эти числа **структурными константами Джека**. Мы обратим особое внимание на случай, когда большинство λ^i равны $\rho = [1^{n-2}2]$. Обозначим $a_\lambda^r(\alpha) = a_{\lambda, \rho, \dots, \rho}(\alpha)$ (где ρ появляется r раз, $r \geq 0$), тогда:

$$a_\lambda^r(\alpha) = \sum_{\beta \vdash |\lambda|} \frac{1}{h_\beta(\alpha) h'_\beta(\alpha)} \theta_\lambda^\beta(\alpha) (\theta_\rho^\beta(\alpha))^r. \quad (10)$$

В Секции 2 мы доказываем следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим $a_\lambda^r(\alpha)$, описанные выше. Тогда для разбиения λ имеем $a_\lambda^r(\alpha) = 0$ при $r < |\lambda| - \ell(\lambda)$ и*

$$a_\lambda^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(\alpha) = \frac{(|\lambda| - \ell(\lambda))!}{\alpha^{\ell(\lambda)} \text{Aut}_\lambda \prod_i \lambda_i!} \prod_i \lambda_i^{\lambda_i-2}. \quad (11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $\lambda = (n)$, Уравнение 11 принимает вид:

$$a_{(n)}^{n-1}(\alpha) = \frac{1}{\alpha n} n^{n-2}. \quad (12)$$

Мы рассматриваем эту формулу как обобщение классической формулы Денеса для числа разложений длинного цикла в симметрической группе в произведение минимального количества транспозиций.

2. Вычисление структурных констант Джека

Для того, чтобы доказать Теорему 1, мы используем два классических свойства симметрических функций Джека.

Во-первых, как показано Стэнли в [12], скалярное произведение J_λ^α может быть представлено в виде:

$$\langle J_\lambda^\alpha, J_\mu^\alpha \rangle_\alpha = \delta_{\lambda\mu} h_\lambda(\alpha) h'_\lambda(\alpha). \quad (13)$$

В результате имеем следующее выражение для характеров Джека:

$$\sum_\rho z_\rho \alpha^{\ell(\rho)} \theta_\rho^\lambda(\alpha) \theta_\rho^\mu(\alpha) = \delta_{\lambda\mu} h_\lambda(\alpha) h'_\lambda(\alpha). \quad (14)$$

Эквивалентным образом,

$$\sum_\lambda \frac{1}{h_\lambda(\alpha) h'_\lambda(\alpha)} \theta_\rho^\lambda(\alpha) \theta_\sigma^\lambda(\alpha) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{z_\rho \alpha^{\ell(\rho)}}. \quad (15)$$

Как следствие, получаем следующую лемму:

ЛЕММА 2. Между симметрическими функциями Джексона и степенными симметрическими функциями выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha)h'_{\lambda}(\alpha)} J_{\lambda}^{\alpha} = \frac{p_1^n}{\alpha^n n!}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот результат есть прямое следствие уравнения 15. Умножив на p_{σ} и просуммировав обе стороны, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \sigma} \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha)h'_{\lambda}(\alpha)} \theta_{\rho}^{\lambda}(\alpha) \theta_{\sigma}^{\lambda}(\alpha) p_{\sigma} &= \frac{p_{\rho}}{z_{\rho} \alpha^{\ell(\rho)}}, \\ \sum_{\lambda} \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha)h'_{\lambda}(\alpha)} \theta_{\rho}^{\lambda}(\alpha) J_{\lambda}^{\alpha} &= \frac{p_{\rho}}{z_{\rho} \alpha^{\ell(\rho)}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Формула доказывается, если положить $\rho = [1^n]$. В этом случае $\theta_{[1^n]}^{\lambda}(\alpha) = 1$ и результат следует немедленно. $\square$

Во-вторых, для $x = (x_1, x_2, \dots)$ введём оператор Лапласа Белтрами следующим образом:

$$D(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \sum_i x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{x_i x_j}{x_i - x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (18)$$

Симметрические функции Джексона являются собственными функциями $D(\alpha)$:

$$D(\alpha) J_{\lambda}^{\alpha} = (\alpha n(\lambda') - n(\lambda)) J_{\lambda}^{\alpha} = \theta_{[1^{n-2} 2^1]}^{\lambda}(\alpha) J_{\lambda}^{\alpha}. \quad (19)$$

Вследствие двух приведённых свойств имеем:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a_{\lambda}^r(\alpha)$ структурные константы Джексона, заданные уравнением 10. Тогда верно следующее соотношение:

$$a_{\lambda}^r(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n n!} [p_{\lambda}] D(\alpha)^r (p_1^n), \quad (20)$$

где $[p_{\lambda}] D(\alpha)^r (p_1^n)$ обозначает коэффициент p_{λ} в разложении $D(\alpha)^r (p_1^n)$ по базису степенных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $a_{\lambda}^r(\alpha)$'s имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \vdash n} a_{\lambda}^r(\alpha) p_{\lambda} &= \sum_{\lambda, \beta \vdash n} \frac{1}{h_{\beta}(\alpha)h'_{\beta}(\alpha)} (\theta_{\rho}^{\beta}(\alpha))^r \theta_{\lambda}^{\beta}(\alpha) p_{\lambda} = \sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_{\beta}(\alpha)h'_{\beta}(\alpha)} (\theta_{\rho}^{\beta}(\alpha))^r J_{\beta}^{\alpha} \\ &= \sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_{\beta}(\alpha)h'_{\beta}(\alpha)} D(\alpha)^r (J_{\beta}^{\alpha}) = D(\alpha)^r \left(\sum_{\beta \vdash n} \frac{1}{h_{\beta}(\alpha)h'_{\beta}(\alpha)} J_{\beta}^{\alpha} \right) = D(\alpha)^r \left(\frac{p_1^n}{\alpha^n n!} \right). \end{aligned}$$

Второе равенство следует из определения $\theta_{\lambda}^{\beta}(\alpha)$ в качестве коэффициентов в разложении симметрических функций Джексона по базису степенных симметрических функций. Третье равенство получается применением r раз формулы 19. Последнее равенство есть следствие леммы 2. $\square$

ПРИМЕР 1. Последовательные применения оператора Лапласа Белтрами к $p_1^n/\alpha^n n!$ дают значения $a_\lambda^r(\alpha)$. Для $r = 1$, $r = 2$ и $\lambda \vdash n$ имеем:

$$D(\alpha) \left(\frac{p_1^n}{\alpha^n n!} \right) = \frac{1}{2\alpha^{n-1}(n-2)!} p_{[1^{n-2}2^1]}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D(\alpha)^2 \left(\frac{p_1^n}{\alpha^n n!} \right) &= \frac{1}{2\alpha^{n-1}(n-2)!} p_{[1^n]} + \frac{(\alpha-1)}{\alpha^{n-1}(n-2)!} p_{[1^{n-2}2^1]} \\ &+ \frac{1}{4\alpha^{n-2}(n-4)!} p_{[1^{n-4}2^2]} + \frac{1}{\alpha^{n-2}(n-3)!} p_{[1^{n-3}3^1]}. \end{aligned} \quad (22)$$

Чтобы доказать Теорему 1, нам потребуется следующее классическое свойство:

ЛЕММА 3. Оператор $D(\alpha)$ можно представить в виде

$$D(\alpha) = (\alpha-1)N + \alpha U + S, \quad (23)$$

где для $\lambda \vdash n$

$$N(p_\lambda) = n(\lambda')p_\lambda, \quad (24)$$

$$U(p_\lambda) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} ij p_{i+j} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) p_\lambda, \quad (25)$$

$$S(p_\lambda) = \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} (i+j) p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{i+j}} \right) p_\lambda. \quad (26)$$

Разложения по базису степенных симметрических функций результатов действий N , U и S на данный многочлен p_λ имеют следующие свойства:

- $\ell(\mu) \neq \ell(\lambda) \Rightarrow [p_\mu]N(p_\lambda) = 0$,
- $\ell(\mu) \neq \ell(\lambda) - 1 \Rightarrow [p_\mu]U(p_\lambda) = 0$,
- $\ell(\mu) \neq \ell(\lambda) + 1 \Rightarrow [p_\mu]S(p_\lambda) = 0$.

В качестве прямого следствия получаем лемму:

ЛЕММА 4. Пусть λ – произвольное разбиение числа n на $\ell(\lambda) = n - r$ частей. Тогда для коэффициента p_λ в $D(\alpha)^r(p_1^n)$ выполняется:

$$[p_\lambda]D(\alpha)^r(p_1^n) = \alpha^r [p_\lambda]U^r(p_1^n). \quad (27)$$

Более того, если $\ell(\lambda) < n - r$, то $[p_\lambda]D(\alpha)^r(p_1^n) = 0$.

Для доказательства Теоремы 1 достаточно изучить оператор U . Внимательное рассмотрение действия U на данную степенную симметрическую функцию p_λ показывает, что $[p_\mu]U(p_\lambda)$ ненулевые только в случае, когда μ имеет вид $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_j, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots)$, то есть когда μ может быть получено присоединением (добавлением) двух частей λ . В этом случае коэффициент $[p_\mu]U(p_\lambda)$ зависит только от этих двух присоединённых частей, а именно $[p_\mu]U(p_\lambda) = \lambda_i \lambda_j$. Сумма всех вкладов $\lambda_i \lambda_j p_\mu$ всевозможных μ , содержащих две части λ , даёт $U(p_\lambda)$. Например, существует $n(n-1)/2$ способов комбинирования двух частей разбиения $[1^n]$. Любая из этих комбинаций приводит к разбиению $[1^{n-2}2^1]$, и в этом частном случае $\lambda_i \lambda_j = 1$. В результате имеем:

$$U(p_1^n) = \frac{n(n-1)}{2} p_{[1^{n-2}2^1]}. \quad (28)$$

Далее, существует $(n-2)(n-3)/2$ способов комбинирования двух единиц в $[1^{n-2}2^1]$ для получения разбиения $[1^{n-4}2^2]$ (коэффициент 1) и $n-2$ способа комбинирования одной единицы 1 и одной двойки для получения разбиения $[1^{n-3}3^1]$ (коэффициент 2). Из этого следует, что

$$U(p_{[1^{n-2}2^1]}) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} p_{[1^{n-4}2^2]} + 2(n-2) p_{[1^{n-3}3^1]}. \quad (29)$$

Действие $n-1$ раз оператора U на p_1^n даёт ненулевой коэффициент только при p_n (равный $\alpha n! a_{[n^1]}^{n-1}$). Этот коэффициент является суммой вкладов всевозможных последовательных комбинаций частей $[1^n]$. На рисунке 1 показано, как эти различные комбинации участвуют в результирующем коэффициенте при p_n для $n=5$ ($U^4(p_{[1^5]}) = 3000 p_{[5^1]}$).

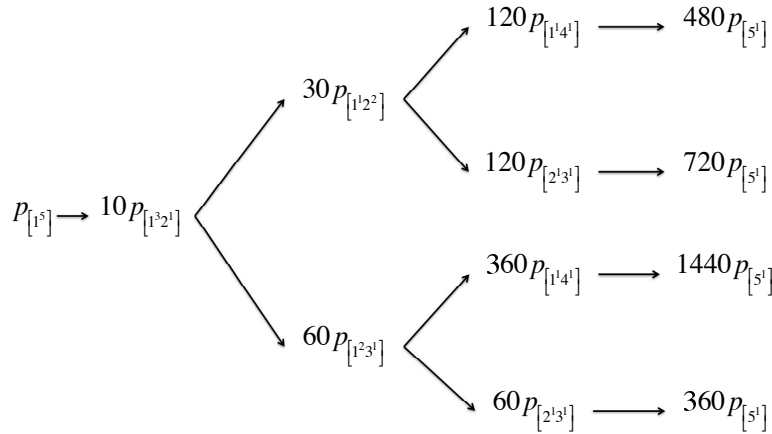


Рис. 1: Иллюстрация действия оператора U .

ЛЕММА 5. Пусть i и j большие или равные единице целые числа. Тогда для коэффициентов в разложении $U^r(p_1^n)$ по базису степенных симметрических функций верна следующая рекурсивная формула :

$$[p_{(i,j)}]U^{i+j-2}(p_{[1^{i+j}]}) = \frac{1}{2\delta_{ij}} \binom{i+j}{i} \binom{i+j-2}{i-1} ([p_i]U^{i-1}(p_{[1^i]})) ([p_j]U^{j-1}(p_{[1^j]})) . \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было отмечено в предыдущем параграфе, применение оператора U^r к $p_{[1^{i+j}]}$ даёт ненулевой коэффициент при p_λ , где разбиение λ получено r последовательными комбинациями частей, начиная с $[1^{i+j}]$. Во время каждой итерации комбинируются две части и результирующий коэффициент зависит только от выбранных частей (а не от всего разбиения на этом этапе). В результате коэффициенты, полученные $i+j-2$ комбинациями частей для разбиения (i,j) из исходного $[1^{i+j}]$, равны произведению коэффициентов, полученных $k-1$ комбинациями частей для разбиения (k) из исходного разбиения $[1^k]$ для $k = i, j$, умноженному на

- число способов выбора изначальных единичных частей 1, впоследствии комбинируемых для получения (i) (существует $\binom{i+j}{i}$ таких способов);
- число способов выбора $i-1$ (среди $i+j-2$) итераций, используемых для комбинирования частей, чтобы получить (i) (существует $\binom{i+j-2}{i-1}$ таких способов, все из которых, очевидно, дают равный вклад).

Когда $i = j$ это число делится на 2, чтобы дважды не считать одинаковый случай. $\square$

Совмещением равенства из Леммы 5 с уравнениями 20 и 25 получается следующая рекурсивная формула для $a_{(n)}^{n-1}$:

$$\alpha n! a_{(n)}^{n-1}(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) \binom{n}{i} \binom{n-2}{i-1} (\alpha i! a_{(i)}^{i-1}(\alpha)) (\alpha(n-i)! a_{(n-i)}^{n-i-1}(\alpha)) , \quad (31)$$

которую можно привести к виду

$$\alpha n a_{(n)}^{n-1}(\alpha) = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1} (\alpha i a_{(i)}^{i-1}(\alpha)) (\alpha(n-i) a_{(n-i)}^{n-i-1}(\alpha)) . \quad (32)$$

Заметим, что $t_n = \alpha n a_{(n)}^{n-1}(\alpha)$. Как показано в [11], приведённая выше рекурсия разрешается с помощью производящей функции

$$G(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{t_n}{(n-1)!} u^n . \quad (33)$$

Используя уравнения 32, получаем

$$\frac{1}{2} \frac{dG^2}{du}(u) = \frac{dG}{du}(u) - \frac{G(u)}{u} , \quad (34)$$

что приводит к

$$\frac{dG}{du} = \frac{d \ln(G)}{du} - \frac{d \ln}{du}. \quad (35)$$

Начальные условия $G(0) = 0$ и $\frac{G(u)}{u} \big|_{u=0} = t_1 = 1$ дают следующее функциональное уравнение:

$$G(u) = u \exp(G(u)), \quad (36)$$

и, как следствие,

$$G(u) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} u^n. \quad (37)$$

Доказательство Теоремы 1 на этом завершается, так как легко заметить, что Лемма 5 легко обобщается следующим образом

$$Aut_\lambda[p_\lambda] U^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(p_{[1^{|\lambda|}]}) = \binom{|\lambda|}{\lambda} \binom{|\lambda|-\ell(\lambda)}{\lambda-1} \prod_i ([p_{\lambda_i}] U^{\lambda_i-1}(p_{[1^{\lambda_i}]})) , \quad (38)$$

где $\lambda - 1$ – разбиение $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1, \dots)$ числа $|\lambda| - \ell(\lambda)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} Aut_\lambda[p_\lambda] U^{|\lambda|-\ell(\lambda)} \left(\frac{p_{[1^{|\lambda|}]}}{\alpha^{|\lambda|} |\lambda|!} \right) &= \frac{1}{\prod_i (\lambda_i - 1)!} (|\lambda| - \ell(\lambda))! \prod_i \left([p_{\lambda_i}] U^{\lambda_i-1} \left(\frac{p_{[1^{\lambda_i}]}}{\alpha^{\lambda_i} \lambda_i!} \right) \right), \\ Aut_\lambda a_\lambda^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(\alpha) &= \frac{1}{\prod_i (\lambda_i - 1)!} (|\lambda| - \ell(\lambda))! \prod_i a_{(\lambda_i)}^{\lambda_i-1}(\alpha), \\ Aut_\lambda a_\lambda^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(\alpha) &= \frac{1}{\prod_i (\lambda_i - 1)!} (|\lambda| - \ell(\lambda))! \prod_i \frac{1}{\alpha \lambda_i} \lambda_i^{\lambda_i-2}. \end{aligned}$$

□

3. Заключение

В настоящей работе вводятся структурные константы Джека $a_\lambda^r(\alpha)$, доказано, что они равны нулю при $r < |\lambda| - \ell(\lambda)$ и

$$a_\lambda^{|\lambda|-\ell(\lambda)}(\alpha) = \frac{(|\lambda| - \ell(\lambda))!}{\alpha^{\ell(\lambda)} Aut_\lambda \prod_i \lambda_i!} \prod_i \lambda_i^{\lambda_i-2}.$$

Для произвольного r доказана формула

$$a_\lambda^r(\alpha) = \frac{1}{\alpha^n n!} [p_\lambda] D(\alpha)^r (p_1^n).$$

Было бы интересно найти способ представить этот результат в более явном виде. В случае $\alpha = 1, 2$ структурные константы Джека комбинаторно интерпретируются как факторизации перестановок, остаётся открытым вопрос их комбинаторной интерпретации для других параметров α .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. Bédard and A. Goupil The poset of conjugacy classes and decomposition of products in the symmetric group, *Can. Math. Bull.*, 35(2):152–160, 1992.
2. J. Dénes, The representation of a permutation as the product of a minimal number of transpositions and its connection with the theory of graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, 4:63–70, 1959.
3. M. Dołęga and V. Féray On Kerov polynomials for Jack characters. *DMTCS Proceedings (FPSAC 2013)* AS:539–550, 2013.
4. A. Goupil A. and G. Schaeffer. Factoring n -cycles and counting maps of given genus, *European Journal of Combinatorics*, 19:819–834(16), 1998.
5. J. Irving. On the number of factorizations of a full cycle, *J. Comb. Theory Ser. A*, 113(7):1549–1554, 2006.
6. D. M. Jackson. Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group, *J. Comb. Theory Ser. A*, 49(2):363–369, 1988.
7. I. Macdonald Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, Second Edition, 1999.
8. A. H. Morales and E. Vassilieva, Bijective enumeration of bicolored maps of given vertex degree distribution, *DMTCS Proceedings (FPSAC 2009)*, AK:661–672, 2009.
9. A. H. Morales and E. Vassilieva, Bijective evaluation of the connection coefficients of the double coset algebra, *DMTCS Proceedings (FPSAC 2011)*, AO:681–692, 2011.
10. G. Schaeffer and E. Vassilieva. A bijective proof of Jackson’s formula for the number of factorizations of a cycle, *J. Comb. Theory Ser. A*, 115(6):903–924, 2008.
11. A. B. Shukla A short proof of Cayley’s tree formula, *arXiv:0908.2324v2*, 2009.
12. R. P. Stanley Some combinatorial properties of Jack symmetric functions, *Advances in Mathematics*, 77:76–115, 1989.
13. E.A. Vassilieva Explicit generating series for connection coefficients, *DMTCS Proceedings (FPSAC 2012)* AR:123–134, 2012.
14. E.A. Vassilieva Long cycle factorizations : bijective computation in the general case, *DMTCS Proceedings (FPSAC 2013)* AS:1077–1088, 2013.

CNRS LIX – Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex France

Поступило 28.02.2014