

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-213-227

Реализация и тестирование методов расчета напряженно-деформированного состояния упруго-пластических оболочек в САЕ Fidesys¹

В. А. Левин, В. В. Козлов, А. В. Филатова, А. В. Храименков

Левин Владимир Анатольевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Козлов Виктор Вячеславович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула); Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: vvkozlovtsu@mail.ru

Филатова Александра Вячеславовна — магистр, ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: filatovasasha-1@mail.ru

Храименков Александр Владиславович — магистр, ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: hav.2000@mail.ru

Аннотация

В статье приведена общая постановка краевых задач механики деформируемого твердого тела для упруго-пластических оболочек. Рассмотрен подход к численному моделированию оболочек в МПТС формулировке при малых деформациях в рамках метода конечных элементов, который был реализован в отечественном пакете прочностного анализа САЕ Fidesys. Особенностью разработки является учет эффектов пластического течения при расчете оболочек путем реализации алгоритмов интегрирования по толщине оболочки. Таким образом, появляется возможность использования напрямую критерия пластичности Губера-Мизеса в отличие от ряда исследований, в которых условие достижения пластичности записано в результатах. Для решения нелинейных систем уравнений применен метод Ньютона-Раффсона. В работе рассмотрен и приведен ряд ключевых аспектов соответствующей математической модели. Произведена оценка качества реализации алгоритмов посредством сравнения результатов, полученных в САЕ Fidesys, с аналогичными результатами в других САЕ пакетах для задач о нагружении упруго-пластических кольцевых пластин. В частности, рассмотрена задача, соответствующая задаче Ламе в условиях плоско-напряженного состояния, а также задача об изгибе пластинки.

Ключевые слова: оболочка, упруго-пластическая модель, метод конечных элементов, САЕ Fidesys, пластичность, физическая нелинейность, малые деформации, критерий пластичности Губера-Мизеса, МПТС формулировка.

Библиография: 34 названий.

Для цитирования:

Левин, В.А., Козлов, В.В., Филатова, А.В. Храименков А.В. Реализация и тестирование методов расчета напряженно-деформированного состояния упруго-пластических оболочек в САЕ Fidesys // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 213–227.

¹Работа выполнена в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00110).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-213-227

Implementation and testing of methods for calculating the stress-strain state of elasto-plastic shells in CAE Fidesys

V. A. Levin, V. V. Kozlov, A. V. Filatova, A. V. Khraimenkov

Levin Vladimir Anatolyevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Kozlov Victor Vyacheslavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula); Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: vkozlovtsu@mail.ru

Filatova Alexandra Vyacheslavovna — master of sciences, Fidesys LLC (Moscow).

e-mail: filatovasasha-1@mail.ru

Khraimenkov Alexander Vladislavovich — master of sciences, Fidesys LLC (Moscow).

e-mail: hav.2000@mail.ru

Abstract

In paper the general formulation of solid mechanics boundary problems for elasto-plastic shells is presented. The approach to numerical modeling of shells in the MITC formulation on small strains in the context of the finite element method, which was implemented in the local strength analysis software CAE Fidesys, is considered. The development specific is to take into account the effects of plastic flow in the calculation of shells by implementing algorithms of integration over the thickness of the shell. Thus, it is possible to use the Huber-Mises yield criterion directly in contrast to a number of studies, in which the condition for achieving plasticity is written in the resultants. The Newton-Raphson method was applied to solve nonlinear systems of equations. In paper the number of key aspects of the corresponding mathematical model is reviewed and presented. The algorithms implementation is evaluated by comparing the results obtained in the context of algorithms implementation in CAE Fidesys for elasto-plastic circular plate loading problems with similar results in other CAE programs. In particular, the problem which is appropriate to the Lamé problem under plane-stress conditions and the plate bending problem are considered.

Keywords: shell, elasto-plastic model, finite element method, CAE Fidesys, plasticity, physical nonlinearity, small strains, Huber-Mises yield criterion, MITC formulation.

Bibliography: 34 titles.

For citation:

Levin, V.A., Kozlov, V.V., Filatova, A.V., Khraimenkov, A.V. 2024, "Implementation and testing of methods for calculating the stress-strain state of elasto-plastic shells in CAE Fidesys", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 213–227.

1. Введение

Тела, моделируемые оболочками, применяются во многих отраслях промышленности, в частности в машиностроении и авиастроении [1]. Соответственно, важным научным вопросом является задача предсказания поведения оболочек под различными нагрузками. Исторически

первыми при моделировании оболочек развивались подходы, основанные на принципах теории упругости [2, 3, 4, 5]. Поскольку оболочки часто работают и производятся в условиях появления необратимых деформаций, развитие и реализация моделей, позволяющих корректно описывать соответствующее напряженно-деформированное состояние, также является актуальной научной проблемой. Ранние модели упруго-пластических оболочек связаны с разработкой критериев, формулируемых в терминах так называемых результатов [6, 7, 8, 9]. Однако в последнее время всё более распространенными являются подходы, обобщающие возможность применения стандартных критериев пластического течения в оболочках [10, 11, 12, 13].

Одним из основных численных методов проведения сложных инженерных расчетов является метод конечных элементов (МКЭ) [1, 14, 15, 16]. Данный метод используется в пакете САЕ Fidesys [17], в том числе имеющем модули для работы с упругими оболочками в малых деформациях [18, 19, 20, 21]. С учетом необходимости корректного моделирования физической нелинейности в оболочках, об актуальности которого сказано ранее, была поставлена задача реализации учета пластических эффектов по критерию Губера-Мизеса [22] для конечных элементов типа «оболочка» в САЕ Fidesys.

В статье авторами рассматриваются определяющие вопросы, связанные с решением данной проблемы: приведена постановка задачи, исследован ряд её ключевых аспектов, связанных с необходимостью встраивания алгоритмов в МКЭ. Помимо этого предложены конкретизированные задачи и подходы, позволяющие оценить качество выполненной работы по реализации учёта пластического течения. В частности, рассматриваются различные способы нагружения кольцевой пластинки, производится сравнение результатов, полученных с помощью реализованных алгоритмов, с решениями в других САЕ пакетах.

Полученные итоги могут быть полезны для развития применения численных методов в различных областях механики сплошной среды.

2. Постановка задачи

Рассматривается упруго-пластическая оболочка, занимающая область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ с замкнутой границей Ω_Γ . В одной или нескольких частях модели прикладываются граничные условия.

Уравнение равновесия среды записывается в виде [23]

$$\vec{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \vec{0}, \quad \forall \vec{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\vec{x})$ — тензор истинных напряжений Коши.

Деформации характеризуются тензором малых деформаций в соответствии с формулой [2]

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\overset{\circ}{\vec{\nabla}} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\vec{\nabla}} \right), \quad (2)$$

где $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ — неизвестный вектор перемещений, $\overset{\circ}{\vec{\nabla}}$ — оператор Гамильтона в начальном состоянии.

В качестве определяющего соотношения выступает обобщенный закон Гука [3]

$$\boldsymbol{\sigma} = \underset{\sim}{\mathbf{D}}_e \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (3)$$

где $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_e$ — тензор четвертого ранга, определяемый в соответствии с особенностями используемой теории оболочек.

Пусть базисный вектор \vec{e}_3 направлен ортогонально срединной поверхности оболочки. Тогда (3) дополняется условием

$$\sigma_{33} = 0. \quad (4)$$

Некоторая область оболочки Ω_e считается упругой, если в каждой её точке выполняется критерий пластичности Губера–Мизеса [22]

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \sigma_y < 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}}{3} \mathbf{I}$ — девиатор тензора напряжений, \mathbf{I} — единичный тензор, σ_y — предел текучести.

Напряженно-деформированное состояние Ω_e полностью описывается соотношениями (1)–(4). Если в некоторой области Ω_p не выполняется (5), Ω_p считается пластической областью, на напряженное состояние которой накладывается дополнительное ограничение [22]

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0. \quad (6)$$

В Ω_p предполагается аддитивность разложения скорости деформаций на упругую и пластическую составляющие [10]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (7)$$

записывается закон пластического течения [10]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}}. \quad (8)$$

Соотношения (1)–(8) в Ω_p образуют замкнутую систему уравнений относительно вектора перемещений. Таким образом, для областей Ω_e и Ω_p получили постановку задачи (1)–(5) и (1)–(8) соответственно, приводящую с заданными граничными условиями к краевой задаче. Для решения дифференциальных уравнений и перехода к интегральной постановке задачи может быть использован метод Галеркина [1, 12].

3. Особенности численного метода решения

Для решения задач в общей постановке (1)–(8) реализуется МКЭ в соответствии с общими принципами [1, 12]. Используется теория оболочек в МИТС формулировке [24, 25, 26, 27, 28, 29].

После стандартной конечно-элементной дискретизации уравнения равновесия [23] задача сводится к следующей: найти вектор узловых перемещений \vec{u}_{n+1} для некоторой внешней нагрузки \vec{f}_{n+1}^{ext} , удовлетворяющей уравнению

$$\vec{r}(\vec{u}_{n+1}) = \vec{f}^{int}(\vec{u}_{n+1}) - \vec{f}_{n+1}^{ext} = \vec{0}, \quad (9)$$

где \vec{f}^{int} , \vec{f}_{n+1}^{ext} — вектора внутренних и внешних сил соответственно.

С учётом физической нелинейности уравнение (9) решается итерационным методом Ньютона-Рафсона [10]. Каждая итерация данного метода представляет решение линеаризованной задачи (9).

Пусть известно приближение узловых перемещений $\vec{u}_{n+1}^{(k-1)}$ (для первой итерации нулевое). Тогда итерация (k) метода Ньютона-Рафсона сводится к линейной системе уравнений

$$\begin{cases} K_T \delta \vec{u}^{(k)} &= -\vec{r}^{(k-1)} \\ \vec{r}^{(k-1)} &= \vec{f}^{int}(\vec{u}_{n+1}^{(k-1)}) - \vec{f}_{n+1}^{ext}, \end{cases} \quad (10)$$

где $\vec{r}^{(k-1)}$, $\delta \vec{u}^{(k)}$ — абсолютные приращения сил и перемещений соответственно, K_T — тангенциальная матрица жесткости [10].

Решив систему (10), получим обновленные узловые перемещения

$$\vec{u}_{n+1}^{(k)} = \vec{u}_{n+1}^{(k-1)} + \delta\vec{u}^{(k)}.$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\vec{u}_{n+1}^{(k)} = \vec{u}_n + \Delta\vec{u}_{n+1}^{(k)}, \quad \Delta\vec{u}_{n+1}^{(k)} = \delta\vec{u}^{(1)} + \dots + \delta\vec{u}^{(k)}.$$

В дальнейшем индекс k по разделу опускается.

В качестве критерия остановки итерационного процесса можно принять проверку, чтобы относительные невязки $\frac{|\vec{r}^{(m)}|}{|\vec{f}_{n+1}^{ext}|}$, $\frac{|\delta\vec{u}^{(k)}|}{|\vec{u}_{n+1}^{(k)}|}$ стали ниже некоторого выбранного порога.

Пусть получены приращения перемещений $\Delta\vec{u}$, накопленные к некоторой итерации. Отсюда определяются приращения деформаций $\Delta\vec{\varepsilon}$ с помощью формулы (2). Рассмотрим вычисление характеристик напряженного состояния, используемого при определении $\vec{f}^{int}(\vec{u}_{n+1})$, в произвольной точке.

Пусть по формуле (3) в некоторой точке с радиус-вектором \vec{x} определен тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ и вычислен скаляр $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial})$. Если $F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) < 0$, то согласно (5) $\vec{x} \in \Omega_e$ и напряженное состояние $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$. В противном случае $\vec{x} \in \Omega_e$ и требуется решение системы (3), (4), (6)–(8). Опишем данный процесс согласно особенностям рассматриваемой постановки [10].

С учётом (3) напряженное состояние в локальной системе координат элемента представляется матрицей

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \quad (11)$$

Непосредственной проверкой установлено, что с помощью матрицы

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (12)$$

и выражения тензора напряжений (11) уравнение (5) может быть записано в виде

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}} - \sigma_y. \quad (13)$$

Поскольку для пластической области напряженное состояние удовлетворяет уравнению (6), дальнейшие выкладки оказываются проще, если представить (13) в равносильном с точки зрения решения уравнения (6) формате

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_y^2. \quad (14)$$

Аналогично представлению тензора напряжений в матричном виде (11) введем соответствующие выражения для деформационных характеристик

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{13}]^T \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = [\varepsilon_{11}^e \quad \varepsilon_{22}^e \quad \varepsilon_{12}^e \quad \varepsilon_{23}^e \quad \varepsilon_{13}^e]^T \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = [\varepsilon_{11}^p \quad \varepsilon_{22}^p \quad \varepsilon_{12}^p \quad \varepsilon_{23}^p \quad \varepsilon_{13}^p]^T \quad (17)$$

Заметим, что компоненты тензоров деформаций ε_{33} , ε_{33}^e , ε_{33}^p в рассматриваемой постановке отличны от нуля в общем случае, но являются зависимыми от (15)–(17) величинами и могут быть вычислены по известным формулам [10], но не участвуют в дальнейших выкладках, основанных на матричном представлении тензоров.

Дифференцируя (14), преобразуем уравнение пластического течения (8)

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \gamma \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (18)$$

Запишем уравнение (7) в приращениях

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \Leftrightarrow \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e - \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = (\boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (19)$$

Введем обозначение известной в (19) величины

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (20)$$

Тогда (19) с учётом (18) примет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta \gamma \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}. \quad (21)$$

Используя матричное представление \mathbf{D}_e тензора четвертого ранга \mathbf{D}_e и закон Гука (3), запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \mathbf{D}_e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta \gamma \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \Delta \gamma \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[(\mathbf{D}_e)^{-1} + \Delta \gamma \mathbf{P} \right]^{-1} \cdot (\mathbf{D}_e)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{A}(\Delta \gamma) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}}. \end{aligned} \quad (22)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} = \mathbf{D}_e \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{\text{trial}}$.

Потребуем для напряженного состояния (22) выполнения условия (6), что в соответствии с (14) приводит к нелинейному уравнению относительно $\Delta \gamma$

$$\frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} \right)^T \cdot \mathbf{A}^T(\Delta \gamma) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}(\Delta \gamma) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{\text{trial}} - \frac{1}{3} \sigma_y^2 = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) может быть решено методом Ньютона, в результате чего конкретизируется напряженное состояние $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ согласно формуле (22).

4. Численные результаты и тестирование

В этом разделе мы представляем некоторые численные результаты, полученные с использованием предложенных элементов типа “оболочка”. Изученные задачи были отобраны с целью оценки прогностических способностей (predictive capability в англ. литературе) предложенного подхода при конечно-элементном решении задач упруго-пластичности для оболочек.

4.1. Задача о растяжении кольцевой пластины

Рассмотрим кольцевую пластину, показанную на рис. 1. Равномерно распределенная нагрузка p прикладывается к внутреннему радиусу пластины. В силу симметрии постановки моделируется только четверть пластины, соответствующая заштрихованной области $ABCD$ (рис. 1, а). Граничными условиями являются $u_x = 0$ ($\theta_y = \theta_z = 0$) вдоль отрезка DC и $u_y = 0$ ($\theta_x = \theta_z = 0$) вдоль отрезка AB . Сетка построена таким образом, что она вдоль ребер AB и DC имеет N элементов, вдоль дуг AD и BC — $2N$ элементов. Количество гауссовых точек по толщине принято равным 5.

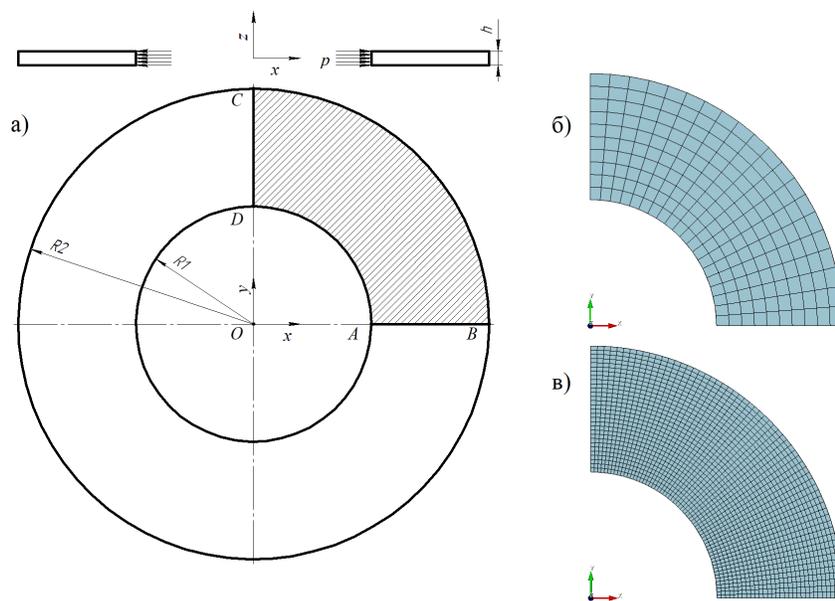


Рис. 1: Задача с кольцевой пластиной: а) Описание задачи ($R_1 = 100$ мм, $R_2 = 200$ мм, $h = 5$ мм, $p = 70$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 100$ МПа); б) Сетка в САЕ Fidesys при $N = 10$; в) Сетка в САЕ Fidesys при $N = 30$

Референсными результатами являются распределения окружных и радиальных напряжений, а также перемещений вдоль радиуса пластины, посчитанные в пакетах САЕ ANSYS и Абакус в условиях плоского напряженного состояния. Использование таких постановок обусловлено тем, что пластинка является тонкой и напряжениями σ_{33} , σ_{31} , σ_{32} можно пренебречь. Результаты, представленные на рис. 2–3, позволяют сделать вывод о том, что разность между решением данной задачи с использованием оболочечных элементов в САЕ Fidesys и ее решением в других пакетах находится в пределах инженерной точности, а при измельчении сетки погрешность уменьшается.

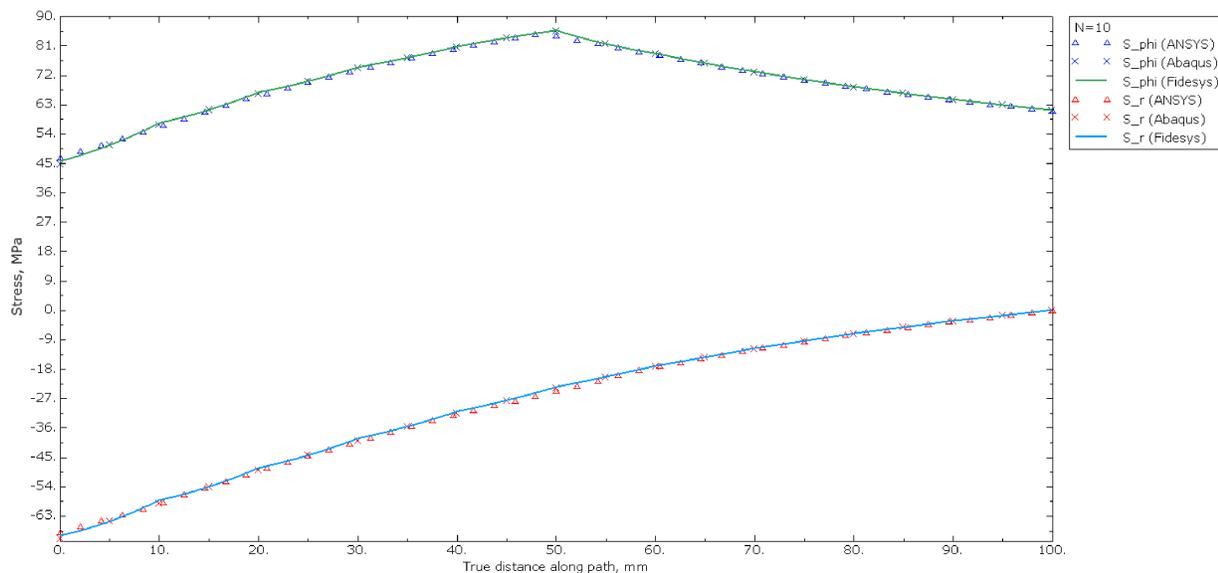


Рис. 2: Распределение окружных и радиальных напряжений при $N = 10$

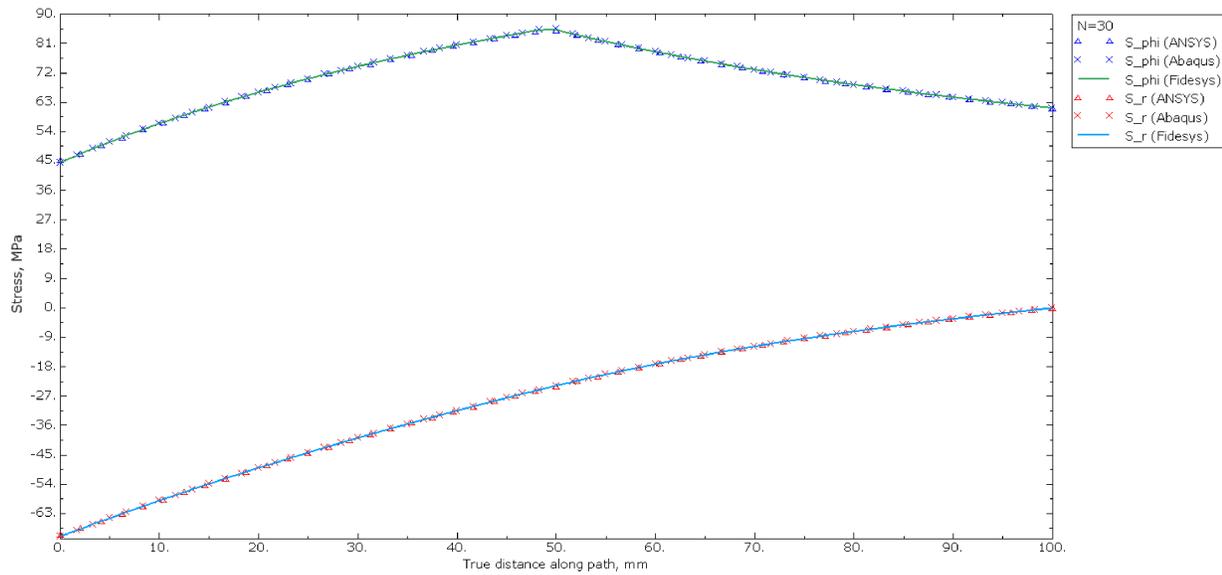


Рис. 3: Распределение окружных и радиальных напряжений при $N = 30$

Показательными результатами также являются графики распределения радиальных перемещений, представленные на рис. 4–5.

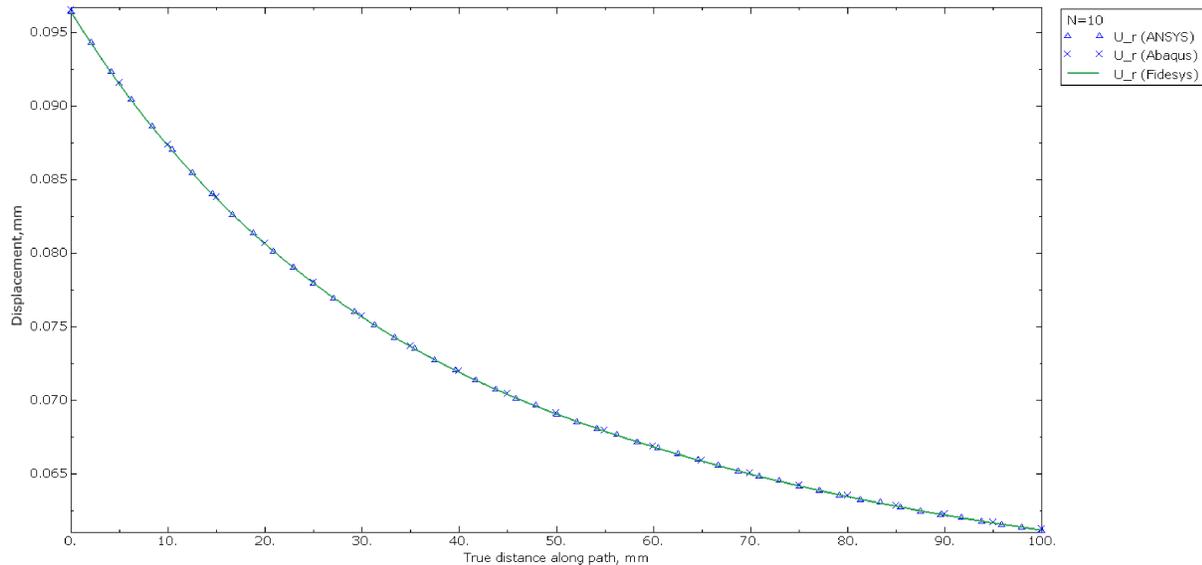


Рис. 4: Распределение радиальных перемещений при $N = 10$

Из сравнения результатов при $N = 10$ (рис. 2,4) с результатами при $N = 30$ (рис. 3,5) следует, что можно сделать вывод о сеточной сходимости реализованного метода.

4.2. Задача об изгибе пластины

Рассмотрим пластину, аналогичную рис. 1. Пусть давление $p_n \in [0, p]$ действует на поверхность $ABCD$ (рис. 6,б). Граничными условиями являются $u_x = 0, u_z = 0$ вдоль DC и $u_y = 0, u_z = 0$ вдоль AB . Решение получено для сетки, у которой вдоль ребер AB и DC имеется N элементов, вдоль дуг AD и BC — $2N$ элементов, при $N = 10, 30$. Количество гауссовых точек по толщине аналогично предыдущему примеру принимаем равным 5.

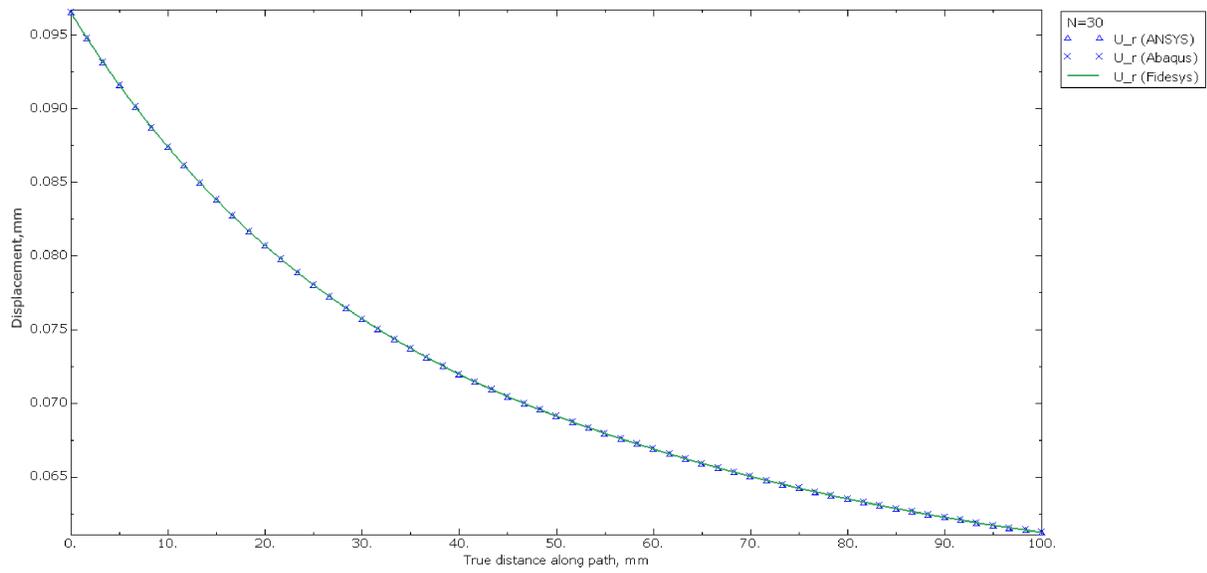


Рис. 5: Распределение радиальных перемещений при $N = 30$

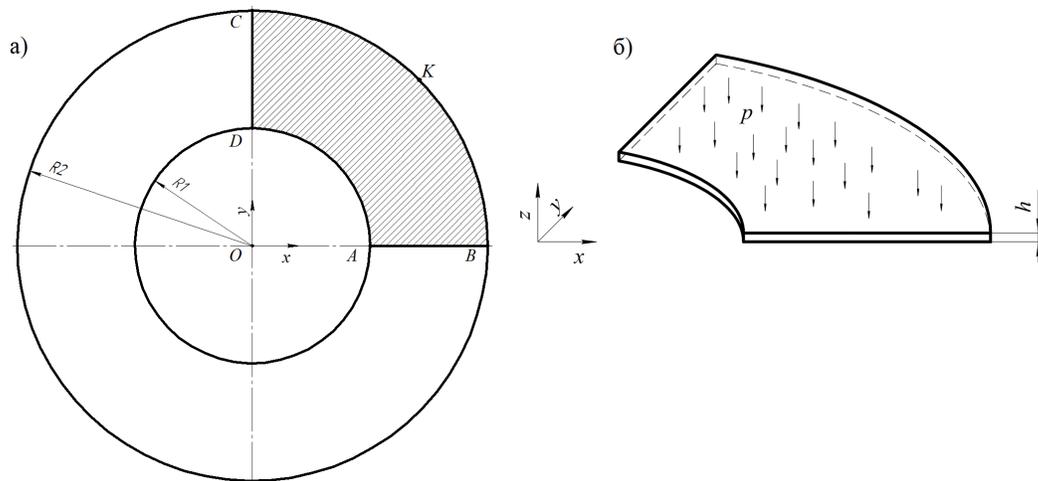
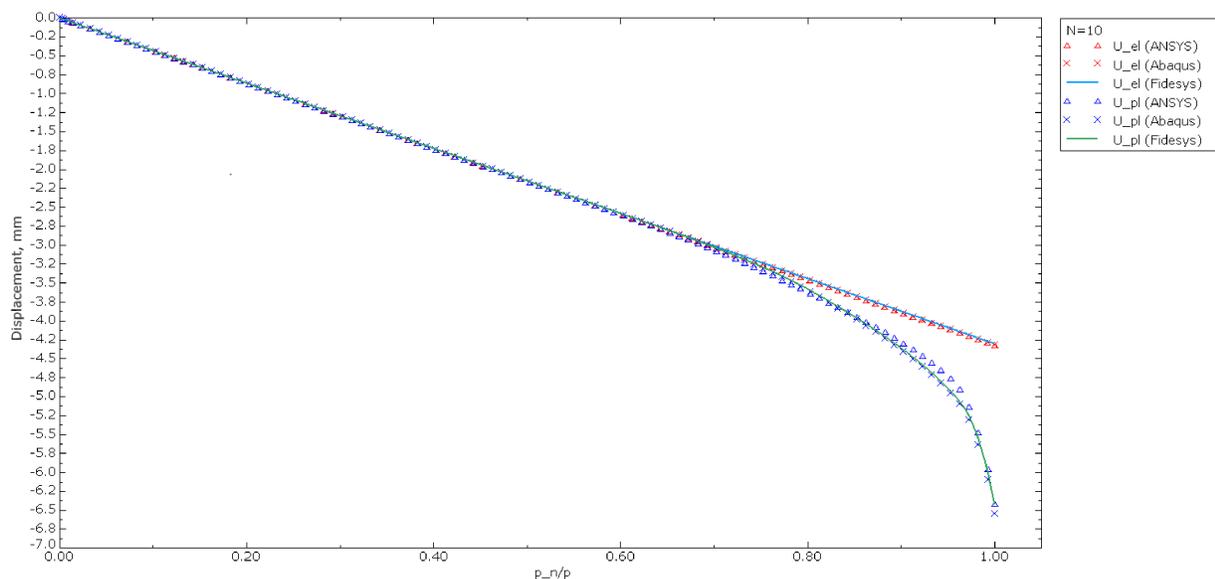
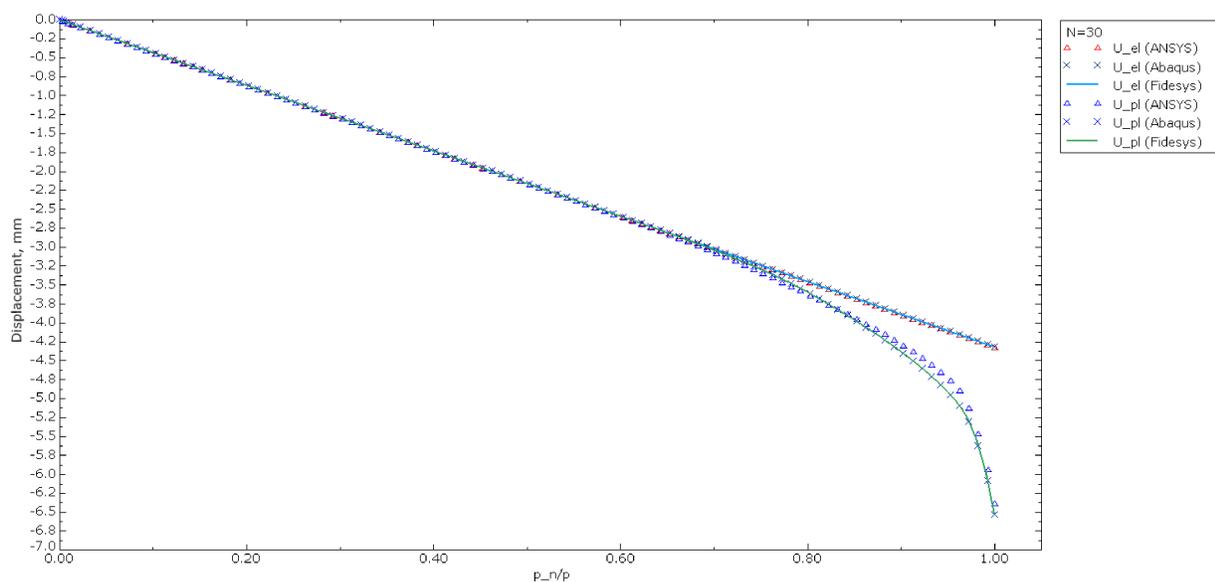


Рис. 6: Задача с изгибом пластинки: а) Описание задачи ($R_1 = 100$ мм, $R_2 = 200$ мм, $h = 5$ мм, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 100$ МПа); б) Давление на поверхности $p = 65 \cdot 10^{-3}$ МПа

Сравним модуль вектора перемещений на кривой $y = x$ в точке K (рис. 6,а) в САЕ-системах Fidesys, ANSYS и Abaqus.

Рис. 7: Перемещения u в точке K при $N = 10$ Рис. 8: Перемещения u в точке K при $N = 30$

На рис. 7–8 приведены данные как для упругого, так и упруго-пластических случаев. Из них следует, что упруго-пластическое решение значительно отличается от упругого. Можно видеть, что упруго-пластическое решение в САЕ ANSYS и Abaqus качественно отличается, а при сгущении сетки разница не нивелируется. В свою очередь, упруго-пластическое решение в САЕ Fidesys сходится к результатам Abaqus уже при $N = 30$. При сравнении было использовано одинаковое количество подшагов.

5. Заключение

Рассмотрена математическая модель упруго-пластических оболочек с критерием пластичности Губера–Мизеса. Описаны особенности работы с моделью в рамках метода конечных эле-

ментов. Проведено первоначальное тестирование реализованных алгоритмов. В качестве задач для тестирования использовался аналог задачи Ламе для пластинки в плоско-напряженном состоянии, а также задача об изгибе кольцевой пластинки под действием нарастающего давления. Проведенные исследования показали, что сеточно сошедшиеся результаты САЕ Fidesys, описывающие напряженно-деформированное состояние пластинок, согласуются в пределах инженерной точности с соответствующими результатами в других САЕ пакетах.

Результаты могут быть обобщены на случай конечных деформаций и их перераспределения в упруго-пластических телах с использованием математических моделей, разработанных в [30, 31, 32], и численных методов, развитых в [30, 33, 34].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Fox D. D. The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition. Elsevier, 2014. P. 624. ISBN: 9781856176347
2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
3. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Ч. 2. Л.: Изд-во Ленингр ун-та, 1964. 395 с.
5. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с. ISBN: 5-7325-0127-4
6. Simo J. C., Kennedy J. G. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V. Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992. Vol. 96, №2. P. 133–171. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90129-8)
7. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.: ОГИЗ, 1948. 376 с.
8. Shapiro G.S. On yield surfaces for ideally plastic shells // Problems of Continuum Mechanics. 1961. Vol. 10. P. 414-418. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2442-0_5
9. Lubliner J. Plasticity theory. London: Pearson Education, Inc, 2006. P. 528.
10. Neto E. A. de S., Peric D., Owen D. R. J. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. Wiley, 2008. P. 816. ISBN: 978-0-470-69463-3
11. Dequiedt J.L., Bolis C., Dambakizi F. Tresca criterion for plasticity and viscoplasticity: Application to localization in biaxial loading conditions // EPJ Web of Conferences. 2012. Vol. 26. 04002. <https://doi.org/10.1051/epjconf/20122604002>
12. Montag U., Krätzig W. B., Soric J. Increasing solution stability for finite-element modeling of elasto-plastic shell response // Advances in Engineering Software. 1999. Vol. 30, №9-11. P. 607–619. [https://doi.org/10.1016/s0965-9978\(98\)00104-5](https://doi.org/10.1016/s0965-9978(98)00104-5)
13. Kutlu A., Meschke G., Omurtag M.H. A new mixed finite-element approach for the elastoplastic analysis of Mindlin plates // J Eng Math 99. 2016. P. 137–155. <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9825-7>
14. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.

15. Luo X., Yau S. S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. Vol. 58, №10. P. 2563 – 2578. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.0962>
16. Sussman T., Bathe K. J. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis // *Comput. and Struct.* 1987. Vol. 26, №1-2. P. 357–409. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90265-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90265-3)
17. Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В. Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера. М.: ЛЕНАНД, 2015. 408 с. ISBN: 9785971025252
18. Vershinin A. V., Levin V. A., Zingerman K. M., Sboychakov A. M., Yakovlev M. Y. Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for // *Advances in Engineering Software*. 2015. Vol. 86. P. 80-84. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.04.007>
19. Левин В. А., Вершинин А. В. Нелинейная вычислительная механика прочности. Том 2. Численные методы. Параллельные вычисления на ЭВМ. Под общ. ред. В. А. Левина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. 544 с. ISBN: 9785922116329
20. Petrovskiy K.A., Vershinin A.V., Levin V.A. Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2016. Vol. 158. P. 012077. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012077>
21. Левин В. А., Вершинин А. В., Мишин И. А., Сбойчаков А. М., Петровский К. А. Распространение упругих волн в нелинейно-упругих средах с начальными деформациями. Компьютерное моделирование с использованием программного комплекса прочностного инженерного анализа FIDESYS // *Технологии сейсморазведки*. 2012. №4. С. 29-32.
22. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 421 с.
23. Маркин А. А., Христич Д.В. Нелинейная теория упругости: учеб. пособие: 2-е изд. Тула: Изд-во Тул. Гос. ун-та, 2007. 92 с. ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00
24. Bathe K.-J., Iosilevich A., Chapelle D. An evaluation of the MITC shell elements // *Computers & Structures*. 2000. Vol. 75, №1. P. 1–30. [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(99\)00214-x](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(99)00214-x)
25. Rezaiee-Pajand M., Ramezani M. An evaluation of MITC and ANS elements in the nonlinear analysis of shell structures // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021. P. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1934917>
26. Lee P.-S., Bathe K.-J. The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending // *Advances in Engineering Software*. 2010. Vol. 41, №5. P. 712–728. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2009.12.011>
27. Bucalem M. L., Bathe K.-J. Higher-order MITC general shell elements // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1993. Vol. 36, №21. P. 3729–3754. <https://doi.org/10.1002/nme.1620362109>
28. Serpieri R., Sessa S., Rosati L. A MITC-based procedure for the numerical integration of a continuum elastic-plastic theory of through-the-thickness-jacketed shell structures // *Composite Structures*. 2018. Vol. 191. P. 209–220. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.031>

29. Bathe K.-J., Brezzi F., Marini L. D. The MITC9 shell element in plate bending: mathematical analysis of a simplified case // *Computational Mechanics*. 2011. Vol. 47, №6. P. 617–626. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0565-2>
30. Moulas E. , Podladchikov Y. , Zingerman K. , Vershinin A. , Levin V. Large-strain Elastic and Elasto-Plastic Formulations for Host-Inclusion Systems and Their Applications in Thermobarometry and Geodynamics // *American Journal of Science*. 2023. Vol. 323. P. 1–23. <https://doi.org/10.2475/001c.68195>
31. Levin V.A., Podladchikov Y.Y., Zingerman K.M. An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2021. Vol. 90. 104345. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>.
32. Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008. Vol. 24, №12. P. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>
33. Levin V. A., Vershinin A. V. Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2008. Vol. 24, №12. P. 2229-2239. <https://doi.org/10.1002/cnm.1092>
34. Konovalov D., Vershinin A., Zingerman K., Levin V. The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes // *Modeling and Simulation in Engineering*. 2017, art. id. 1797561. <https://doi.org/10.1155/2017/1797561>

REFERENCES

1. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. & Fox, D. D.. 2014, “The finite element method for solid and structural mechanics. 7-th edition”, *Elsevier*, pp. 624. ISBN: 9781856176347
2. Sedov, L. I. 1970, “Mechanics of Continuous Medium”, *Nauka, Moscow*, Vol. 2, pp. 568.
3. Lurie, A. I. 1980, “Nonlinear theory of elasticity”, *Nauka, Moscow*, pp. 512.
4. Chernykh, K.F. 1964, “Linear theory of shells”, *University Press, Leningrad, Part 2*, pp. 395.
5. Novozhilov, V. V., Chernykh, K. F. & Mikhailovsky, E. I. 1991, “Linear theory of thin shells”, *Polytechnic, Leningrad*, pp. 656. ISBN: 5-7325-0127-4
6. Simo, J. C. & Kennedy, J. G. 1992, “On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V. Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 96, no. 2, pp. 133–171. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(92\)90129-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(92)90129-8)
7. Ilyushin, A. A. 1948, “Plasticity. Part 1: Elastic-plastic deformations”, *OGIZ, Moscow*, pp. 376.
8. Shapiro, G.S. 1961, “On yield surfaces for ideally plastic shells”, *Problems of Continuum Mechanics*, vol. 10, pp. 414-418. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2442-0_5
9. Lubliner, J. 2006, “Plasticity theory”, *Pearson Education, Inc, London*, pp. 528.

10. Neto, E. A. de S., Peric, D. & Owen D. R. J. 2008, "Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications", *Wiley*, pp. 816. ISBN: 978-0-470-69463-3
11. Dequiedt, J.L., Bolis, C. & Dambakizi, F. 2012, "Tresca criterion for plasticity and viscoplasticity: Application to localization in biaxial loading conditions", *EPJ Web of Conferences*, vol. 26, 04002. <https://doi.org/10.1051/epjconf/20122604002>
12. Montag, U., Krätzig, W. B. & Soric, J. 1999, "Increasing solution stability for finite-element modeling of elasto-plastic shell response", *Advances in Engineering Software*, vol. 30, no. 9-11, pp. 607–619. [https://doi.org/10.1016/s0965-9978\(98\)00104-5](https://doi.org/10.1016/s0965-9978(98)00104-5)
13. Kutlu, A., Meschke, G. & Omurtag, M. H. 2016, "A new mixed finite-element approach for the elastoplastic analysis of Mindlin plates", *J Eng Math* 99, pp. 137–155. <https://doi.org/10.1007/s10665-015-9825-7>
14. Strang, G. & Fix, J. 1977, "Theory of Finite Element Method", *Mir, Moscow*, pp. 349.
15. Luo, X. & Yau, S. S.-T. 2013, "Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 10, pp. 2563 – 2578. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1208.0962>
16. Sussman, T. & Bathe, K. J. 1987, "A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis", *Comput. & Struct*, vol. 26, no. 1-2, pp. 357–409. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90265-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90265-3)
17. Morozov, E. M., Levin, V. A. & Vershinin, A. V. 2015, "Strength Analysis: Fidesys in the Hands of an Engineer", *LENAND, Moscow*, pp. 408. ISBN: 9785971025252
18. Vershinin, A. V., Levin, V. A., Zingerman, K. M., Sboychakov, A. M. & Yakovlev, M. Y. 2015, "Software for estimation of second order effective material properties of porous samples with geometrical and physical nonlinearity accounted for", *Advances in Engineering Software*, vol. 86, pp. 80-84. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2015.04.007>
19. Levin, V. A. & Vershinin, A. V. 2015, "Nonlinear Computational Mechanics of Strength", *Numerical Methods. Parallel Computing on Computers, PHYSMATLIT, Moscow* Vol. 2, pp. 544. ISBN: 9785922116329
20. Petrovskiy, K.A., Vershinin, A.V. & Levin, V.A. 2016, "Application of spectral elements method to calculation of stress-strain state of anisotropic laminated shells", *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, vol. 158, pp. 012077. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012077>
21. Levin, V. A., Vershinin, A. V., Mishin, I. A., Sboychakov, A. M. & Petrovsky, K. A. 2012, "Propagation of elastic waves in nonlinear-elastic media with initial deformations. Computer modeling using FIDESYS software package of strength engineering analysis", *Seismic Technologies*, no. 4, pp. 29-32.
22. Kachanov, L. M. 1969, "Fundamentals of Plasticity Theory", *Nauka, Moscow*, pp. 421.
23. Markin, A. A. & Khristich, D. V. 2007, "Nonlinear Theory of Elasticity", *Tula State University Press, Tula, 2 ed.*, pp. 92. ISBN: 5-7679-1118-9: 4500.00
24. Bathe, K.-J., Iosilevich, A. & Chapelle, D. 2000, "An evaluation of the MITC shell elements", *Computers & Structures*, vol. 75, no. 1, pp. 1–30. [https://doi.org/10.1016/s0045-7949\(99\)00214-x](https://doi.org/10.1016/s0045-7949(99)00214-x)

25. Rezaiee-Pajand, M. & Ramezani, M. 2021, “An evaluation of MITC and ANS elements in the nonlinear analysis of shell structures”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1934917>
26. Lee, P.-S. & Bathe, K.-J. 2010, “The quadratic MITC plate and MITC shell elements in plate bending”, *Advances in Engineering Software*, vol. 41, no. 5, pp. 712–728. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2009.12.011>
27. Bucalem, M. L. & Bathe, K. -J. 1993, “Higher-order MITC general shell elements”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 21, pp. 3729–3754. <https://doi.org/10.1002/nme.1620362109>
28. Serpieri, R., Sessa, S. & Rosati, L. 2018, “A MITC-based procedure for the numerical integration of a continuum elastic-plastic theory of through-the-thickness-jacketed shell structures”, *Composite Structures*, vol. 191, pp. 209–220. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.031>
29. Bathe, K. -J., Brezzi, F. & Marini, L. D. 2011, “The MITC9 shell element in plate bending: mathematical analysis of a simplified case”, *Computational Mechanics*, vol. 47, no. 6, pp. 617–626. <https://doi.org/10.1007/s00466-010-0565-2>
30. Moulas, E. , Podladchikov, Y. , Zingerman, K., Vershinin, A. & Levin, V. 2023, “Large-strain Elastic and Elasto-Plastic Formulations for Host-Inclusion Systems and Their Applications in Thermobarometry and Geodynamics”, *American Journal of Science*, vol. 323, pp. 1–23. <https://doi.org/10.2475/001c.68195>
31. Levin, V. A., Podladchikov, Y. Y. & Zingerman K. M. 2021, “An exact solution to the Lamé problem for a hollow sphere for new types of nonlinear elastic materials in the case of large deformations”, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 90, 104345. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104345>.
32. Levin, V. A. & Zingerman, K. M. 2008, “A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no. 12, pp. 2240-2251. <https://doi.org/10.1002/cnm.1080>
33. Levin, V. A. & Vershinin, A. V. 2008, “Non-stationary plane problem of the successive origination of stress concentrators in a loaded body. Finite deformations and their superposition”, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no. 12, pp. 2229-2239. <https://doi.org/10.1002/cnm.1092>
34. Konovalov, D., Vershinin, A., Zingerman, K. & Levin, V. 2017, “The implementation of spectral element method in a CAE system for the solution of elasticity problems on hybrid curvilinear meshes”, *Modeling and Simulation in Engineering*, art. id. 1797561. <https://doi.org/10.1155/2017/1797561>

Получено: 17.04.2024

Принято в печать: 24.12.2024