

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-197-212

Определение законов неоднородности заполнителя сэндвич-панели с минимальной звукопроницаемостью

Н. В. Ларин, Л. А. Толоконников

Ларин Николай Владимирович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: larinaelen@mail.ru

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

Рассматриваются прямая и обратная задачи о прохождении звука через трехслойную сэндвич-панель с упругими однородными наружными слоями и заполнителем в виде упругого непрерывно-неоднородного по толщине слоя. Полагается, что панель находится в идеальной сжимаемой жидкости, а падающая на нее волна является плоской и гармонической.

В прямой задаче при известном законе неоднородности заполнителя определяются волновые поля в сэндвич-панели и граничащих с ней полупространствах. Потенциалы скоростей отраженной от сэндвич-панели и прошедшей через нее звуковых волн, а также потенциалы смещений упругих волн, возбужденных в наружных слоях панели, находятся в виде разложений по декартовым базисным решениям уравнения Гельмгольца. Для определения поля смещений в заполнителе получена краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Численно исследовано влияние неоднородности заполнителя на прохождение звука через сэндвич-панель.

В обратной задаче определяются законы неоднородности заполнителя, обеспечивающие минимальную звукопроницаемость сэндвич-панели. На основе решения прямой задачи построен функционал, определенный на классе линейных функций, описывающих механические параметры заполнителя и выражающий осредненный коэффициент звукопроницаемости сэндвич-панели в заданном диапазоне частот. Минимизация функционала осуществляется с помощью алгоритма, основанного на комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска.

Ключевые слова: прямая и обратная задачи, отражение и прохождение звука, плоская гармоническая звуковая волна, сэндвич-панель, неоднородный упругий заполнитель.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

Ларин, Н. В., Толоконников, Л. А. Определение законов неоднородности заполнителя сэндвич-панели с минимальной звукопроницаемостью // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 197–212.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-197-212

Determination of the inhomogeneity laws for the sandwich panel core with minimal sound permeability

N. V. Larin, L. A. Tolokonnikov

Larin Nikolai Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

e-mail: larinaelen@mail.ru

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

The direct and inverse problems of sound transmission through a three-layer sandwich panel with elastic homogeneous outer layers and a core in the form of an elastic continuously inhomogeneous layer thickness are considered. It is assumed that the panel is in an ideal compressible liquid, and the wave incident on it is plane and harmonic.

In the direct problem, with the well-known law of inhomogeneity of the core, wave fields in the sandwich panel and the half-spaces bordering it are determined. The velocity potentials of the sound waves reflected from the sandwich panel and transmission through it, as well as the displacement potentials of elastic waves excited in the outer layers of the panel, are in the form of decompositions according to Cartesian basic solutions of the Helmholtz equation. To determine the displacement field in the core, a boundary value problem for a system of linear ordinary differential equations of the second order is obtained. The influence of the inhomogeneity of the core on the transmission of sound through the sandwich panel is numerically investigated.

In the inverse problem, the laws of inhomogeneity of the core are determined, ensuring minimal sound permeability of the sandwich panel. Based on the solution of the direct problem, a functional is constructed, defined on a class of linear functions describing the mechanical parameters of the core and expressing the average sound permeability coefficient of the sandwich panel in a given frequency range. The minimization of the functionality is carried out using an algorithm based on a combination of random search and coordinate descent methods.

Keywords: direct and inverse problems, reflection and transmission of sound, plane harmonic sound wave, sandwich panel, inhomogeneous elastic core.

Bibliography: 28 titles.

For citation:

Larin, N. V., Tolokonnikov, L. A. 2024, "Determination of the inhomogeneity laws for the sandwich panel core with minimal sound permeability", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 197–212.

1. Введение

Сэндвич-панели широко используются в различных отраслях, включая судостроение, аэрокосмическую отрасль, транспорт, строительную промышленность. Одним из элементов в сэндвич-панелях, обладающим широким диапазоном механических свойств, является средний слой - наполнитель, который существенно влияет на свойства панели, в том числе на ее звукопроницаемость.

Теоретическим и экспериментальным исследованиям прохождения звука через сэндвич-конструкции посвящены ряд работ отечественных и зарубежных авторов, например [1–17].

В прямых задачах математического моделирования взаимодействия плоской гармонической звуковой волны с непрерывно-неоднородным по толщине изотропным упругим плоским слоем последний рассматривался как самостоятельное тело [18, 19] и как покрытие [20, 21]. В настоящей работе такой слой выступает в качестве заполнителя сэндвич-панели. Если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров этого заполнителя, то можно добиться требуемых акустических свойств сэндвич-панели. Таким образом, возникает необходимость в решении обратной задачи.

В большинстве известных работ по определению параметров, характеризующих неоднородность упругой среды, поиск решения осуществлялся с использованием некоторой дополнительной информации, получаемой, например, при проведении серии экспериментов. В [22] для решения обратной дифракционной задачи об определении линейных законов неоднородности плоского упругого слоя, обеспечивающих минимальную интенсивность звукоотражения, предложен подход, использующий исключительно решение прямой задачи и не требующий экспериментальных замеров акустических откликов. С применением этого подхода, в [23] осуществлено моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами.

В [24] показано, что непрерывно-неоднородный по толщине слой можно моделировать системой слоев из однородных упругих материалов с разными физико-механическими характеристиками.

В данной работе находятся решения прямой и обратной задач об отражении и преломлении плоской звуковой волны трехслойной сэндвич-панелью.

2. Прямая задача

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную сэндвич-панель, граничащую с полупространствами «1» и «2», заполненными одинаковыми идеальными жидкостями, имеющими плотность ρ_f и скорость звука c (рис. 1). Номера наружных слоев панели соответствуют номерам граничащих с ними полупространств. Система прямоугольных координат (x, y, z) выбрана таким образом, что плоскость xy совпадает с серединной плоскостью сэндвич-панели, а ось z направлена вглубь полупространства «2». Наружные однородные изотропные упругие слои сэндвич-панели имеют толщину h . Материал этих слоев характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными Ламе λ_0, μ_0 . Заполнитель сэндвич-панели - неоднородный изотропный упругий слой толщиной $2H$. Плотность $\rho = \rho(z)$ материала неоднородного слоя описывается непрерывной функцией, а модули упругости $\lambda = \lambda(z), \mu = \mu(z)$ – дифференцируемыми функциями координаты z .

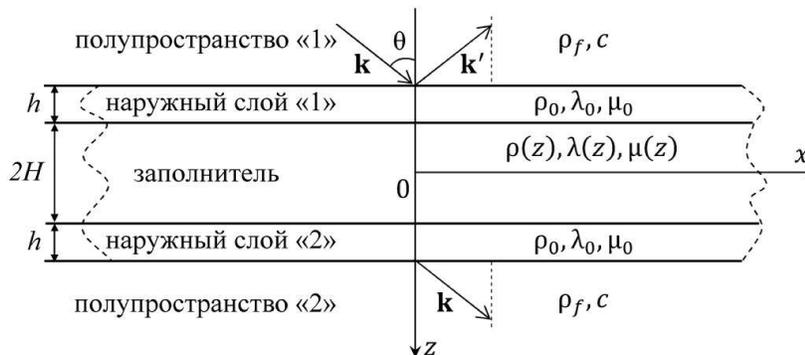


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть из полупространства «1» на сэндвич-панель падает плоская гармоническая звуковая волна с амплитудой A_0 , круговой частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , который лежит в плоскости xz и составляет угол θ с нормалью к поверхности панели. Потенциал скорости такой волны имеет вид

$$\Psi_0 = A_0 \exp [i (k_x x + k_z (z + H + h) - \omega t)],$$

где $k_x = k \sin \theta$, $k_z = k \cos \theta$ – проекции вектора \mathbf{k} на оси координат; $k = \omega/c$ – волновое число; t – время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускаем.

Определим отраженную от сэндвич-панели и прошедшую через нее звуковые волны, а также найдем волновые поля в сэндвич-панели.

Волновые поля в жидкостях. Поскольку волновой вектор падающей волны лежит в плоскости xz и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты y , а неоднородность материала заполнителя проявляется лишь по оси z , то от координаты y не должны зависеть ни отраженное в полупространство «1», ни прошедшее в полупространство «2», ни возбужденные в упругой сэндвич-панели поля. Кроме того, в сэндвич-панели отсутствует смещение частиц упругой среды вдоль оси y .

Акустические поля в полупространствах «1» и «2» описываются решениями уравнений Гельмгольца [25]

$$\Delta \Psi_j + k^2 \Psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

где Ψ_1, Ψ_2 – потенциалы скоростей отраженной от сэндвич-панели и прошедшей через нее звуковых волн соответственно; $\Psi_0 + \Psi_1$ – потенциал скорости полного акустического поля в полупространстве «1».

Заметим, что волновой вектор отраженной звуковой волны $\mathbf{k}' = (k_x, -k_z)$, а волновой вектор прошедшей звуковой волны в силу идентичности жидкостей в полупространствах «1» и «2» и с учетом закона Снеллиуса [1] равен волновому вектору падающего поля \mathbf{k} .

Скорости частиц жидкостей в полупространствах «1» и «2» определяются по формулам

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad}(\Psi_0 + \Psi_1), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad}\Psi_2.$$

Решения уравнений (1) будем искать в виде

$$\Psi_1 = A_1 \exp [i (k_x x - k_z (z + H + h))], \quad \Psi_2 = A_2 \exp [i (k_x x + k_z (z - H - h))], \quad (2)$$

где A_1, A_2 – коэффициенты отражения и прохождения соответственно.

Волновые поля в наружных слоях панели. Векторы смещения частиц в однородных наружных слоях «1» и «2» сэндвич-панели представим, соответственно, в виде

$$\mathbf{u}^{(j)} = \text{grad}\Psi^{(j)} + \text{rot}\Phi^{(j)}, \quad j = 1, 2,$$

где скалярные потенциалы $\Psi^{(j)}$ и векторные потенциалы $\Phi^{(j)}$ являются решениями уравнений Гельмгольца [26]

$$\Delta \Psi^{(j)} + k_l^2 \Psi^{(j)} = 0, \quad \Delta \Phi^{(j)} + k_\tau^2 \Phi^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $k_l = \omega/c_l$, $k_\tau = \omega/c_\tau$; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$, $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ – скорости распространения продольных и поперечных упругих волн соответственно.

Так как рассматриваемая задача двумерная, то $\Phi^{(j)} = \Phi^{(j)}(x, z) \mathbf{e}_y$ ($j = 1, 2$), где \mathbf{e}_y – орт оси y . Тогда векторные уравнения (3) сводятся к скалярным уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \Phi^{(j)} + k_\tau^2 \Phi^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Решения скалярных уравнений (3), (4) будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(1)} &= B_1^{(1)} \exp [i (k_{lx} x + k_{lz} (z + H + h))] + B_2^{(1)} \exp [i (k_{lx} x - k_{lz} (z + H + h))], \\
 \Psi^{(2)} &= B_1^{(2)} \exp [i (k_{lx} x + k_{lz} (z - H - h))] + B_2^{(2)} \exp [i (k_{lx} x - k_{lz} (z - H - h))], \\
 \Phi^{(1)} &= C_1^{(1)} \exp [i (k_{\tau x} x + k_{\tau z} (z + H + h))] + C_2^{(1)} \exp [i (k_{\tau x} x - k_{\tau z} (z + H + h))], \\
 \Phi^{(2)} &= C_1^{(2)} \exp [i (k_{\tau x} x + k_{\tau z} (z - H - h))] + C_2^{(2)} \exp [i (k_{\tau x} x - k_{\tau z} (z - H - h))],
 \end{aligned} \tag{5}$$

где k_{lx} , k_{lz} и $k_{\tau x}$, $k_{\tau z}$ - проекции волновых векторов продольных \mathbf{k}_l и поперечных \mathbf{k}_τ упругих волн на координатные оси x и z соответственно, причем $k_{lx}^2 + k_{lz}^2 = k_l^2$, $k_{\tau x}^2 + k_{\tau z}^2 = k_\tau^2$. Согласно закону Снеллиуса $k_{lx} = k_{\tau x} = k_x$.

Волновое поле в заполнителе. Распространение малых возмущений в неоднородном упругом заполнителе описывается общими уравнениями движения сплошной среды [26]. С учетом временной зависимости $\exp(-i\omega t)$ и в предположении отсутствия массовых сил эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_x, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho \omega^2 u_z, \tag{6}$$

где компоненты тензора напряжений σ_{xx} , σ_{xz} , σ_{zz} связаны с компонентами вектора смещения u_x , u_z законом Гука [26]

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{7}$$

Величины u_x , u_z будем искать с учетом закона Снеллиуса в виде

$$u_x(x, z) = U_1(z) \exp(ik_x x), \quad u_z(x, z) = U_2(z) \exp(ik_x x). \tag{8}$$

Подставляя выражения (7), (8) в уравнения (6), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_1(z)$, $U_2(z)$:

$$A\mathbf{U}'' + B\mathbf{U}' + C\mathbf{U} = 0, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T, \quad A = \text{diag} \{a_{11}, a_{22}\}, \quad B = (b_{rs})_{2 \times 2}, \quad C = (c_{rs})_{2 \times 2}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \mu, \quad a_{22} = \lambda + 2\mu, \quad b_{11} = \mu', \quad b_{12} = b_{21} = ik_x (\lambda + \mu), \quad b_{22} = \lambda' + 2\mu', \\
 c_{11} &= \rho \omega^2 - k_x^2 (\lambda + 2\mu), \quad c_{12} = ik_x \mu', \quad c_{21} = ik_x \lambda', \quad c_{22} = \rho \omega^2 - k_x^2 \mu.
 \end{aligned}$$

Штрихом обозначена производная по z .

Граничные условия. Коэффициенты A_j , $B_1^{(j)}$, $B_2^{(j)}$, $C_1^{(j)}$, $C_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$) в выражениях (2), (5) определяются из граничных условий.

На поверхностях сэндвич-панели, соприкасающихся с жидкостями, граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц упругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие отсутствия касательных напряжений:

$$z = (-1)^j (H + h) : \quad -i\omega u_z^{(j)} = v_{jn}, \quad \sigma_{zz}^{(j)} = -p_j, \quad \sigma_{xz}^{(j)} = 0; \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

На поверхностях, разделяющих наружные слои и заполнитель, должны быть непрерывны компоненты вектора смещения частиц упругих сред, касательные и нормальные напряжения:

$$z = (-1)^j H : u_x^{(j)} = u_x, \quad u_z^{(j)} = u_z, \quad \sigma_{xz}^{(j)} = \sigma_{xz}, \quad \sigma_{zz}^{(j)} = \sigma_{zz}; \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Нормальные скорости частиц жидкостей ϑ_{1n} , ϑ_{2n} и акустические давления p_1 , p_2 определяются из выражений

$$\vartheta_{1n} = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_1)}{\partial z}, \quad \vartheta_{2n} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z}, \quad p_1 = i\omega\rho_f(\Psi_0 + \Psi_1), \quad p_2 = i\omega\rho_f\Psi_2.$$

В наружных слоях сэндвич-панели касательные $\sigma_{xz}^{(j)}$ и нормальные $\sigma_{zz}^{(j)}$ напряжения связаны с компонентами $u_x^{(j)}$, $u_z^{(j)}$ векторов смещения $\mathbf{u}^{(j)}$ законом Гука (7), где функции λ , μ следует заменить константами λ_0 , μ_0 соответственно. Кроме того, поскольку

$$u_x^{(j)} = \frac{\partial\Psi^{(j)}}{\partial x} - \frac{\partial\Phi^{(j)}}{\partial z}, \quad u_z^{(j)} = \frac{\partial\Psi^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial\Phi^{(j)}}{\partial x}; \quad j = 1, 2,$$

то

$$\sigma_{xz}^{(j)} = \mu_0 \left(2 \frac{\partial^2\Psi^{(j)}}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\Phi^{(j)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi^{(j)}}{\partial z^2} \right),$$

$$\sigma_{zz}^{(j)} = -2\mu_0 \frac{\partial^2\Psi^{(j)}}{\partial x^2} - k_l^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) \Psi^{(j)} + 2\mu_0 \frac{\partial^2\Phi^{(j)}}{\partial x\partial z}; \quad j = 1, 2.$$

Краевые условия для системы уравнений (9). Введем векторы коэффициентов

$$\mathbf{K}^{(j)} = \left(B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, C_1^{(j)}, C_2^{(j)} \right)^T, \quad j = 1, 2.$$

Из граничных условий (10) при $j = 1$ получаем выражение для коэффициента отражения

$$A_1 = A_0 + \mathbf{a}\mathbf{K}^{(1)}, \quad \mathbf{a} = \frac{i\omega}{k_z} (k_{lz}, -k_{lz}, k_x, k_x) \quad (12)$$

и два уравнения с неизвестным $\mathbf{K}^{(1)}$. Присоединяя к этим уравнениям два уравнения, вытекающие из первых двух граничных условий (11) при $j = 1$ (вектор $\mathbf{K}^{(1)}$ внутри однородного наружного слоя сэндвич-панели не меняется), получим следующую систему уравнений:

$$A^{(1)}\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{b} \Big|_{z=-H}, \quad (13)$$

где

$$\mathbf{b} = (U_1, U_2, \gamma, 0)^T, \quad A^{(1)} = \left(a_{mn}^{(1)} \right)_{4 \times 4}.$$

Здесь

$$\gamma = -2i\omega\rho_f A_0,$$

$$a_{1s}^{(1)} = ik_x \alpha_s, \quad a_{1,s+2}^{(1)} = (-1)^s ik_{\tau z} \beta_s, \quad a_{2s}^{(1)} = (-1)^{s+1} ik_{lz} \alpha_s, \quad a_{2,s+2}^{(1)} = ik_x \beta_s,$$

$$a_{3s}^{(1)} = 2k_x^2 \mu_0 - k_l^2 (\lambda_0 + 2\mu_0) + (-1)^s \rho_f \omega^2 \frac{k_{lz}}{k_z},$$

$$a_{3,s+2}^{(1)} = (-1)^s 2k_x k_{\tau z} \mu_0 - \rho_f \omega^2 \frac{k_x}{k_z}; \quad s = 1, 2,$$

$$a_{41}^{(1)} = -a_{42}^{(1)} = -2k_x k_{lz} \mu_0, \quad a_{43}^{(1)} = a_{44}^{(1)} = (k_{\tau z}^2 - k_x^2) \mu_0,$$

$$\alpha_s = \exp \left[(-1)^{s+1} ik_{lz} h \right], \quad \beta_s = \exp \left[(-1)^{s+1} ik_{\tau z} h \right]; \quad s = 1, 2.$$

Из системы уравнений (13) находим:

$$\mathbf{K}^{(1)} = A^{(1)-1} \mathbf{b} \Big|_{z=-H}.$$

Последнее выражение может быть записано в виде

$$\mathbf{K}^{(1)} = B^{(1)} \mathbf{U} \Big|_{z=-H} + \gamma \mathbf{c}, \quad (14)$$

где матрица $B^{(1)}$ состоит из первых двух столбцов матрицы четвертого порядка $A^{(1)-1}$, а вектор \mathbf{c} – третий столбец этой матрицы.

Из оставшихся двух граничных условий (11) при $j = 1$, выражающих непрерывность напряжений, находим:

$$\left(A \mathbf{U}' + D \mathbf{U} \right) \Big|_{z=-H} = C^{(1)} \mathbf{K}^{(1)}, \quad (15)$$

где

$$D = \text{diag} \{d_{12}, d_{21}\}, \quad C^{(1)} = \left(c_{rn}^{(1)} \right)_{2 \times 4}.$$

Здесь

$$d_{12} = ik_x \mu, \quad d_{21} = ik_x \lambda, \quad c_{1s}^{(1)} = (-1)^s 2k_x k_{lz} \mu_0 \alpha_s, \quad c_{1,s+2}^{(1)} = (k_{\tau z}^2 - k_x^2) \mu_0 \beta_s,$$

$$c_{2s}^{(1)} = (2k_x^2 \mu_0 - k_l^2 (\lambda_0 + 2\mu_0)) \alpha_s, \quad c_{2,s+2}^{(1)} = (-1)^s 2k_x k_{\tau z} \mu_0 \beta_s; \quad s = 1, 2.$$

Подставляя выражение (14) в соотношение (15), получим краевые условия для системы дифференциальных уравнений (9) на границе $z = -H$:

$$\left(A \mathbf{U}' + D^{(1)} \mathbf{U} \right) \Big|_{z=-H} = \gamma C^{(1)} \mathbf{c}, \quad (16)$$

где $D^{(1)} = D - C^{(1)} B^{(1)}$.

Аналогичным образом из граничных условий (10), (11), записанных при $j = 2$, находим выражения для коэффициента прохождения A_2 , вектора $\mathbf{K}^{(2)}$ и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (9) на границе $z = H$:

$$A_2 = -\mathbf{a} \mathbf{K}^{(2)}, \quad (17)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = B^{(2)} \mathbf{U} \Big|_{z=H}, \quad (18)$$

$$\left(A \mathbf{U}' + D^{(2)} \mathbf{U} \right) \Big|_{z=H} = 0. \quad (19)$$

В выражении (18) матрица $B^{(2)}$ состоит из первых двух столбцов матрицы четвертого порядка $A^{(2)-1}$, где элементы матрицы $A^{(2)}$ могут быть получены из элементов матрицы $A^{(1)}$. Для этого достаточно в элементах первых двух строк последней матрицы заменить h на $-h$, в третьей строке этой матрицы произвести замены

$$a_{31}^{(1)} = a_{32}^{(1)}, \quad a_{32}^{(1)} = a_{31}^{(1)}, \quad a_{33}^{(1)} = -a_{34}^{(1)}, \quad a_{34}^{(1)} = -a_{33}^{(1)},$$

а четвертую строку оставить без изменений.

В выражении (19) матрица $D^{(2)} = D - C^{(2)} B^{(2)}$, где элементы матрицы $C^{(2)}$ могут быть получены из соответствующих элементов матрицы $C^{(1)}$ путем замены в последних h на $-h$.

Из выражений (12), (14), (17), (18) следует, что волновые поля в наружных слоях сэндвич-панели и граничащих с ней жидкостях могут быть определены лишь после нахождения поля смещений в заполнителе. Для чего необходимо решить краевую задачу (9), (16), (19). При проведении указанных ниже расчетов решение этой краевой задачи было найдено методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических B -сплайнов [27].

Результаты расчетов. На основе полученного решения задачи проведены расчеты коэффициента звукопроницаемости, равного отношению интенсивностей прошедшей через сэндвич-панель и падающей на нее звуковых волн:

$$I = \left| \frac{A_2}{A_0} \right|^2.$$

Величина I рассчитывалась для четырех панелей, различающихся между собой механическими свойствами заполнителя. Рассматривались сэндвич-панели, находящиеся в воде ($\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c = 1485 \text{ м/с}$) под воздействием звуковой волны с единичной амплитудой ($A_0 = 1 \text{ м}^2/\text{с}$) и имеющие наружные слои толщиной $h = 0.025 \text{ м}$ из алюминия ($\rho_0 = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$) и заполнитель толщиной $2H = 0.2 \text{ м}$. При расчетах один из заполнителей полагался однородным с плотностью $\rho^0 = 1070 \text{ кг/м}^3$ и упругими постоянными Ламе $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ (поливинилбутираль), другой - неоднородным по плотности:

$$\rho(z) = \rho^0 f(z), \quad \lambda(z) = \lambda^0, \quad \mu(z) = \mu^0, \quad (20)$$

третий - неоднородным по первому параметру Ламе:

$$\rho(z) = \rho^0, \quad \lambda(z) = f(z) \lambda^0, \quad \mu(z) = \mu^0, \quad (21)$$

а четвертый - неоднородным по первому и второму параметрам Ламе:

$$\rho(z) = \rho^0, \quad \lambda(z) = f(z) \lambda^0, \quad \mu(z) = f(z) \mu^0, \quad (22)$$

где

$$f(z) = 0.75 - 0.25z/H, \quad -H \leq z \leq H.$$

На рис. 2 показана зависимость коэффициента звукопроницаемости от волнового размера сэндвич-панели $\varpi = 2k(H + h)$, рассчитанная в интервале $0 < \varpi \leq 30$ при падении волны по нормали к поверхности панели ($\theta = 0^\circ$). Из рисунка следует, что из-за влияния неоднородности заполнителя происходит смещение резонансных частот сэндвич-панели и это может привести к существенному изменению значений функции I . Кроме того, различие на рисунке кривых 1, 2, 3, 4 указывает на возможность изменения звукопроницаемости сэндвич-панели за счет изменения по линейному закону каждого из материальных параметров заполнителя ρ , λ , μ .

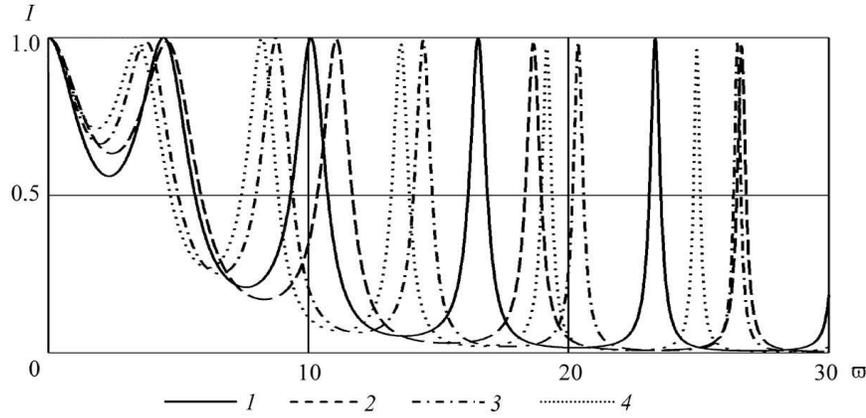


Рис. 2: Зависимость коэффициента звукопроницаемости от волнового размера сэндвич-панели с заполнителем из разных материалов: 1 – однородный материал, 2 – материал неоднородный по плотности, 3 – материал неоднородный по первому параметру Ламе, 4 – материал неоднородный по первому и второму параметрам Ламе

Расчеты показали, что если линейные функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, определенные на отрезке $[-H, H]$, одновременно заменить на симметричные им относительно прямой $z = 0$ функции, то значение коэффициента звукопроницаемости не меняется. Например, если в законах неоднородности (20) - (22) сделать замену $f(z) = 0.75 + 0.25z/H$, то вновь построенные частотные зависимости величины I совпадают с соответствующими кривыми на рис. 2. Это означает, что при материальных параметрах заполнителя, симметрично распределенных по его толщине относительно серединной плоскости рассматриваемой сэндвич-панели, последняя неразличима по прошедшему акустическому полю.

3. Обратная задача

На основе решения прямой задачи найдем законы неоднородности материала заполнителя, обеспечивающие наименьшую звукопроницаемость сэндвич-панели в заданном диапазоне частот при фиксированном угле падения звуковой волны θ , равном θ_* . При этом частотный диапазон будем определять интервалом изменения волнового размера сэндвич-панели, то есть $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$.

Для решения обратной задачи воспользуемся подходом, предложенным в [22].

Будем считать, что функции $\rho(z)$, $\lambda(z)$, $\mu(z)$, определенные на отрезке $[-H, H]$, описываются многочленами первой степени с независимой переменной z , то есть будем рассматривать линейные законы неоднородности материала заполнителя:

$$\rho(z) = \rho^0 \bar{\rho}(z), \quad \lambda(z) = \lambda^0 \bar{\lambda}(z), \quad \mu(z) = \mu^0 \bar{\mu}(z) \quad (23)$$

где

$$\bar{\rho}(z) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}z, \quad \bar{\lambda}(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}z, \quad \bar{\mu}(z) = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}z, \quad (24)$$

ρ^0, λ^0, μ^0 – характерные величины однородного материала.

Построим функционал

$$F[\rho, \lambda, \mu] = \frac{1}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} I d\varpi, \quad (25)$$

определенный на классе линейных функций (23) и выражающий осредненное значение коэффициента звукопроницаемости в заданном диапазоне частот.

Для функционала (25) найдем значения коэффициентов функций (24), при которых он достигает минимального значения. Для этого введем ограничения

$$C_{1\rho} \leq \bar{\rho}(z) \leq C_{2\rho}, \quad C_{1\lambda} \leq \bar{\lambda}(z) \leq C_{2\lambda}, \quad C_{1\mu} \leq \bar{\mu}(z) \leq C_{2\mu}, \quad (26)$$

где $C_{j\rho}, C_{j\lambda}, C_{j\mu}$ ($j = 1, 2$) – некоторые положительные константы. Каждое из неравенств (26) вида $C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(z) \leq C_{2\eta}$, где $\eta = \{\rho, \lambda, \mu\}$, задает бесконечное множество линейных функций, графики которых, построенные в прямоугольной системе координат с осью абсцисс z и осью ординат f , в интервале $-H \leq z \leq H$ не выходят за пределы прямоугольной области

$$\Omega_\eta = \{(z, f) : -H \leq z \leq H, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\},$$

показанной на рис. 3,а.

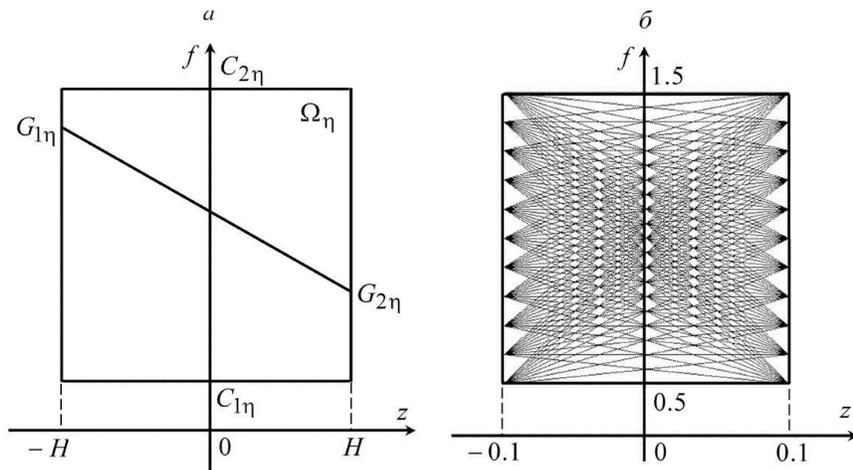


Рис. 3: Область Ω_η (а) и допустимые функции $\bar{\rho}(z), \bar{\lambda}(z), \bar{\mu}(z)$ (б)

В области Ω_η каждую прямую (24) определим двумя точками $G_{1\eta}(-H, f_{1\eta}), G_{2\eta}(H, f_{2\eta})$, где ординаты точек $f_{1\eta}$ и $f_{2\eta}$ принадлежат отрезку $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ (рис. 3,а). Подстановкой координат этих точек в каждое из выражений (24), находим

$$\eta^{(0)} = \frac{f_{1\eta} + f_{2\eta}}{2}, \quad \eta^{(1)} = \frac{f_{2\eta} - f_{1\eta}}{2H}. \quad (27)$$

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ значения для ординат $f_{1\eta}, f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (27) значения коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$, получим линейные законы неоднородности материала заполнителя.

Нахождение значений неизвестных коэффициентов функций (24), удовлетворяющих условиям (26) и минимизирующих функцию шести переменных

$$F(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)}) \rightarrow \min \quad (28)$$

осуществим с помощью следующего алгоритма.

Для ординаты $f_{j\eta}$ точки $G_{j\eta}$ ($j = 1, 2$) на отрезке $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ введем равномерную сетку

$$f_{j\eta}^{(l_{j\eta})} = C_{1\eta} + l_{j\eta} h_{j\eta}, \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

где $l_{j\eta} = 0, 1, \dots, n_{j\eta}$ – номер узла сетки; $h_{j\eta} = (C_{2\eta} - C_{1\eta}) / n_{j\eta}$ – шаг сетки, $n_{j\eta}$ – количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$. Таким образом, построены двумерные сетки в каждой из трех областей Ω , соответствующих неравенствам (26). На этих сетках с

использованием соотношений (27) рассчитываются наборы значений коэффициентов функций (24).

Нахождение оптимального набора коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$ осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции (28). Эта вычислительная процедура построена на основе комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска [28] и включает два этапа. При этом в качестве шести искомым координат выступают не сами коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$, а соответствующие им наборы величин $f_{1\eta}, f_{2\eta}$, присутствующих в выражениях (27).

На первом этапе случайным образом выбирается начальная точка \mathbf{f} – совокупность шести значений $f_{1\eta}, f_{2\eta}$ из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной многомерной сетке:

$$\mathbf{f} = (f_{1\rho}, f_{2\rho}, f_{1\lambda}, f_{2\lambda}, f_{1\mu}, f_{2\mu}).$$

На втором этапе в случайном порядке выбирается одна из координат и выполняется поиск минимума функции F при изменении значений этой координаты во всех возможных узлах с номерами $l_{j\eta}$. При этом значения пяти других координат не меняются. Процедура случайного выбора координат повторяется до тех пор, пока не будет осуществлен поиск по всем координатам. По окончании второго этапа получаем значение локального минимума функции F и соответствующий набор координат \mathbf{f} , по которому с помощью формул (27) вычисляются искомые коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$.

Локальный минимум функции F и соответствующий ему набор материальных параметров зависят и от выбора начальной точки, и от порядка перебора координат при покоординатном спуске. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз. В качестве конечного решения выбирается набор коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}$, обеспечивающий наименьшее значение F среди локальных решений. Получаемое таким образом оптимальное решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки $h_{j\eta}$ и числа M .

Были рассчитаны зависимости (23), обеспечивающие наименьшую звукопроницаемость сэндвич-панели в интервале $0 < \varpi \leq 5$ (область низких и средних частот) при нормальном падении ($\theta_* = 0^\circ$) звуковой волны на панель. При этом величины $A_0, \rho_f, c, h, H, \rho_0, \lambda_0, \mu_0, \rho^0, \lambda^0, \mu^0$ принимали те же значения, что и для расчетов выше.

При расчетах полагали, что $C_{1\rho} = C_{1\lambda} = C_{1\mu} = 0.5, C_{2\rho} = C_{2\lambda} = C_{2\mu} = 1.5$ и в полученных областях $\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \Omega_\mu$ строились одинаковые сетки (29), такие что $h_{j\rho} = h_{j\lambda} = h_{j\mu} = 0.1$ ($j = 1, 2$). Рассчитанные на этих сетках допустимые функции для механических параметров материала заполнителя показаны на рис. 3,б. Из этих параметров при $M = 300$ выбирались те, для которых значение F минимально.

Были найдены два оптимальных набора коэффициентов

$$\left(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \mu^{(0)}, \mu^{(1)} \right) = (0.8, \pm 3, 1.5, 0, 1.45, \pm 0.5),$$

различающихся знаком при коэффициентах с индексом 1. При этом минимальное значение $F = 0.605$. То есть для приведенного варианта расчета получены два оптимальных решения обратной задачи:

$$\rho(z) = 1070 \cdot (0.8 \pm 3z), \quad \lambda(z) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot 1.5, \quad \mu(z) = 9.8 \cdot 10^8 \cdot (1.45 \pm 0.5z). \quad (30)$$

В законах неоднородности (30) материальные параметры заполнителя симметрично распределены относительно срединной плоскости панели.

Для сравнения, в интервале $0 < \varpi \leq 5$ были рассчитаны осредненные значения функций, изображенных на рис. 2. Установлено, что заполнители с законами неоднородности (20) - (22) увеличивают на 4-5% значение величины $F = 0.767$, рассчитанное для сэндвич-панели с однородным заполнителем. Неоднородные заполнители с оптимальными механическими параметрами (30) позволяют уменьшить это значение на 21%, что отражает рис. 4.

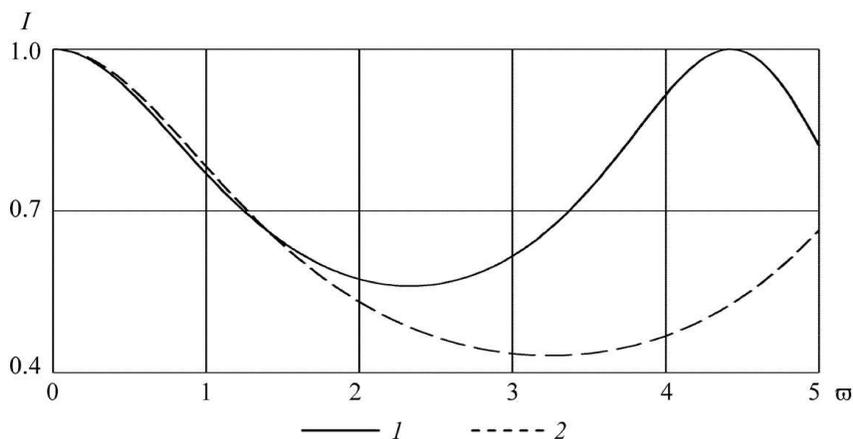


Рис. 4: Зависимость коэффициента звукопроницаемости от волнового размера сэндвич-панели с заполнителем из разных материалов: 1 – однородный материал, 2 – материал с оптимальными плотностью и модулями упругости

4. Заключение

В двумерной постановке решена прямая задача о взаимодействии плоской гармонической звуковой волны с погруженной в идеальную жидкость трехслойной сэндвич-панелью с упругими однородными наружными слоями и непрерывно-неоднородным по толщине упругим заполнителем. Аналитически описаны волновые поля в жидкости и наружных слоях сэндвич-панели. Для определения поля смещений в заполнителе построена краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассчитаны зависимости коэффициента звукопроницаемости сэндвич-панели от частоты звуковой волны. Показано существенное влияние неоднородности заполнителя сэндвич-панели на ее звукопроницаемость. На основе решения прямой задачи построено решение обратной задачи, в которой определяются линейные законы неоднородности заполнителя, обеспечивающие минимальную звукопроницаемость сэндвич-панели в заданном диапазоне частот. Проведенный вычислительный эксперимент показал возможность значительного снижения звукопроницаемости сэндвич-панели за счет непрерывно-неоднородного заполнителя с оптимальными линейными законами неоднородности.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах // М.: Наука, 1973. 344 с.
2. Smolenski C. P., Krokosky E. M. Dilational-mode sound transmission in sandwich panels // J. Acoust. Soc. Amer. 1973. Vol. 54. No. 6. P. 1449 – 1457.
3. Dym C. L., Lang M. A., Transmission of sound through sandwich panels // J. Acoust. Soc. Amer. 1974. Vol. 56. No. 5. P. 1523 – 1532.

4. Бешенков С. Н., Голоскоков Е. Г., Ольшанский В. П. Исследование звукоизоляционных свойств трехслойных конструкций // Акуст. журн. 1974. Т. 20. № 2. С. 184 – 189.
5. Dym C. L., Lang M. A. Transmission loss of damped asymmetric sandwich panels with orthotropic cores // J. Sound and Vibr. 1983. Vol. 88. No. 3. P. 299 – 319.
6. Wang T., Sokolinsky V. S., Rajaram S., Nutt S. R. Assessment of sandwich models for the prediction of sound transmission loss in unidirectional sandwich panels // J. Appl. Acoust. 2005. Vol. 66. No. 3. P. 245 – 262.
7. Assaf S., Guerich M. Numerical prediction of noise transmission loss through visco-elastically damped sandwich plates // J. of Sandwich Structures and Materials. 2008. Vol. 10. No. 5. P. 359 – 384.
8. Hasheminejad S. M., Shabanimotlagh M. Sound insulation characteristics of functionally graded panels // Acta Acustica united with Acustica. 2008. Vol. 94. No. 2. P. 290 – 300.
9. Wang T., Li S., Nutt S. R. Optimal design of acoustical sandwich panels with a genetic algorithm // J. Appl. Acoust. 2009. Vol. 70. No. 3. P. 416 – 425.
10. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Тарлаковский Д. В. Влияние формы набегающей волны на звукоизоляционные свойства прямоугольной пластины сложной структуры // Труды МАИ. 2015. № 82. С. 1 – 20.
11. Гребнев П. А. Теоретические и экспериментальные исследования звукоизоляции бескаркасных ограждающих конструкций из сэндвич-панелей // Вестник ТГАСУ. 2015. № 2. С. 109 – 118.
12. Шамаев А. С., Шумилова В. В. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 10 – 20.
13. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Тарлаковский Д. В. Исследование звукоизоляционных свойств трехслойной пластины при воздействии плоской волны // Изв. вузов. Машиностроение. 2016. № 1. С. 27 – 34.
14. Xiaomei Xu, Yiping Jiang, Heow-pueh Lee, Ning Chen. Sound insulation performance optimization of lightweight sandwich panels // J. of vibroengineering. 2016. Vol. 18. No. 4. P. 2574 – 2586.
15. Бобылев В. Н., Тишков В. А., Гребнев П. А., Монич Д. В. Инженерный метод расчета звукоизоляции сэндвич-панелей с учетом двойственной природы прохождения звука // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 134 – 138.
16. Болнокин В. Е., Сторожев В. И., Минь Хай Зыонг. Модель плоского многослойного гидроакустического экрана с анизотропными функционально-градиентными компонентами // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 1. С. 21 – 27.
17. Hasheminejad S. M., Jamalpoor A. Sound transmission control through a hybrid smart double sandwich plate structure // J. of Sandwich Structures and Materials. 2021. Vol. 23. No. 6. P. 2443 – 2483.
18. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 212 – 218.

19. Huang C., Nutt S. An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials // *J. Sound and Vibr.* 2011. Vol. 330. No 6. P. 1153 – 1165.
20. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // *Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки.* 2015. Вып. 3. С. 219 – 226.
21. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // *Чебышевский сб.* 2019. Т. 20. Вып. 2. С. 289 – 302.
22. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // *Акуст. журн.* 2015. Т. 61. № 5. С. 552 – 558.
23. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // *Прикл. математика и механика.* 2016. Т. 80. № 4. С. 480 – 488.
24. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // *Прикл. механика и техн. физика.* 2017. Т. 58. № 1. С. 108 – 116.
25. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики // *Л.: Судостроение, 1972.* 352 с.
26. Новацкий В. Теория упругости // *М.: Мир, 1975.* 872 с.
27. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций // *М.: Наука, 1980.* 352 с.
28. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач // *М.: Наука, 1988.* 552 с.

REFERENCES

1. Brekhovckikh, L. M. 1973, “Waves in Layered Media”, *Nauka, Moscow*, 344 p., [in Russian].
2. Smolenski, C. P., Krokosky, E. M. 1973, “Dilational-mode sound transmission in sandwich panels”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 54, no. 6, pp. 1449 – 1457.
3. Dym, C. L., Lang, M. A. 1974, “Transmission of sound through sandwich panels”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 56, no. 5, pp. 1523 – 1532.
4. Beshenkov S. N., Goloskokov E. G., Olshyanskiy V. P. 1974, “Study of soundproofing properties of three-layer structures”, *Akust. Zh.*, vol. 20. no. 2., pp. 184 – 189, [in Russian].
5. Dym, C. L., Lang, M. A. 1983, “Transmission loss of damped asymmetric sandwich panels with orthotropic cores”, *J. Sound and Vibr.*, vol. 88, no. 3, pp. 299 – 319.
6. Wang, T., Sokolinsky, V. S., Rajaram, S., Nutt, S. R. 2005, “Assessment of sandwich models for the prediction of sound transmission loss in unidirectional sandwich panels”, *J. Appl. Acoust.*, vol. 66, no. 3, pp. 245 – 262.
7. Assaf, S., Guerich, M. 2008, “Numerical prediction of noise transmission loss through visco-elastically damped sandwich plates”, *J. of Sandwich Structures and Materials*, vol. 10, no. 5, pp. 359 – 384.

8. Hasheminejad, S. M., Shabanimotlagh, M. 2008, "Sound insulation characteristics of functionally graded panels", *Acta Acustica united with Acustica*, vol. 94, no. 2, pp. 290 – 300.
9. Wang, T., Li, S., Nutt, S. R. 2009, "Optimal design of acoustical sandwich panels with a genetic algorithm", *J. Appl. Acoust.*, vol. 70, no. 3, pp. 416 – 425.
10. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Tarlakovskiy D. V. 2015, "The influence of the shape of the incident wave on the soundproofing properties of a rectangular plate of complex structure", *Proceedings of MAI*, no. 82., pp. 1 – 20, [in Russian].
11. Grebnev P. A., 2015, "Theoretical and experimental studies of sound insulation of frameless enclosing structures made of sandwich panels", *Bulletin of TSUACE*, no. 2., pp. 109 – 118, [in Russian].
12. Shamayev A. S., Shumilova V. V., 2015, "Passage of a plane sound wave through a layered composite with components made of elastic and viscoelastic materials", *Akust. Zh.*, vol. 61., no. 1, pp. 10 – 20, [in Russian].
13. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Tarlakovskiy D. V., 2016, "Study of soundproofing properties of three-layer plate under the influence of plane wave", *News of universities. Mechanical engineering*, no. 1., pp. 27 – 34, [in Russian].
14. Xiaomei Xu, Yiping Jiang, Heow-pueh Lee, Ning Chen. 2016, "Sound insulation performance optimization of lightweight sandwich panels", *J. of vibroengineering*, vol. 18, no. 4, pp. 2574 – 2586.
15. Bobilyov V. N., Tishkov V. A., Grebnev P. A., Monich D. V. 2016, "Engineering method for calculating sound insulation of sandwich panels taking into account the dual nature of sound transmission", *Academia. Architecture and construction*, no. 1, pp. 134 – 138, [in Russian].
16. Bolnokin V. E., Storighev V. I., Min Hay Ziong. 2016, "Model of a flat multilayer hydroacoustic screen with anisotropic functional-gradient components", *VSU Bulletin. Series: System analysis and information technologies*, no. 1., pp. 21 - 27, [in Russian].
17. Hasheminejad, S. M., Jamalpoor, A. 2021, "Sound transmission control through a hybrid smart double sandwich plate structure", *J. of Sandwich Structures and Materials*, vol. 23, no. 6, pp. 2443 – 2483.
18. Prikhod'ko, V. Yu., Tyutekin, V. V. 1986, "Calculation of the reflection coefficient of sound wave from solid inhomogeneously layered media", *Akust. Zh.*, vol. 32, no. 2, pp. 212 – 218, [in Russian].
19. Huang, C., Nutt, S. 2011, "An analytical study of sound transmission through unbounded panels of functionally graded materials", *J. Sound and Vibr.*, vol. 330, no. 6, pp. 1153 – 1165.
20. Tolokonnikov, L. A., Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 219 – 226, [in Russian].
21. Tolokonnikov, L. A., Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 311 – 324, [in Russian].
22. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no. 5, pp. 504 – 510.

23. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A., Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no. 4, pp. 339 – 344.
24. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no. 1, pp. 95 – 102.
25. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p., [in Russian].
26. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprzystosci", *Mir, Moscow*, 872 p., [in Russian].
27. Zav'ialov, Yu. S., Kvasov, B. I., Miroschnichenko V. L. 1980, "Spline Function Methods", *Nauka, Moscow*, 352 p., [in Russian].
28. Vasil'ev, F. P. 1988, "Numerical Methods for Solving Extreme Problems", *Nauka, Moscow*, 552 p., [in Russian].

Получено: 06.06.2024

Принято в печать: 24.12.2024