

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 539.3, 531.6, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196

Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов

Л. А. Кабанова, А. В. Романов

Кабанова Любовь Александровна — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).*e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru***Романов Александр Вячеславович** — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).*e-mail: aleksandr.romanov@math.msu.ru***Аннотация**

Цель данной статьи – сопоставление приближенных решений одной квазистатической задачи теории упругости для слоистого материала. Рассматриваются приближенные решения, построенные по методу структурных функций В. И. Горбачева с вариацией конкретных параметров метода, а также приближенные решения, построенные методом конечных элементов. В качестве тестовой выбрана задача о нагружении трехслойной прямоугольной пластины, слои которой ортотропны в осях координат, параллельных сторонам пластины; боковые грани пластины закреплены так, что на каждой из граней возможны только перемещения в направлении, нормальном к этой грани. В статье приводится процедура построения приближенных решений указанной задачи при помощи метода структурных функций. Данный метод для указанной задачи состоит в вычислении перемещений в неоднородной пластине как частичной суммы ряда по производным решения так называемой сопутствующей задачи – иначе говоря, по перемещениям в однородной пластине аналогичной геометрии, закрепленной и нагруженной так же, как неоднородная пластина. Коэффициенты этой частичной суммы называются структурными функциями, а порядок производных в слагаемых, входящих в частичную сумму, называют порядком метода структурных функций. В статье приведены приближенные решения указанной задачи, построенные методом структурных функций первого и второго порядка, а также предложен новый вариант выбора упругих свойств сопутствующего тела. Для двух тестовых пластин – симметричной и не симметричной относительно срединной плоскости – проведено численное сравнение приближений, построенных по методу структурных функций, конечноэлементных приближений, основанных на использовании восьмиузловых и двадцатиузловых конечных элементов, и решения по методу N. J. Ragano. Показано, что даже для пластин с большим отношением толщины к длине ($1/4$) метод структурных функций дает удовлетворительное приближение, а повышение порядка метода повышает качество приближения.

Ключевые слова: метод структурных функций, многослойная пластина.*Библиография:* 40 названий.**Для цитирования:**

Кабанова, Л.А., Романов, А. В. Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 175–196.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 539.3, 531.6, 519.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196

Comparison of approximate solutions to the quasi-static plate loading problem, obtained by the structural functions method and the finite element method

L. A. Kabanova, A. V. Romanov

Kabanova Liubov Aleksandrovna — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: liubov.kabanova@math.msu.ru***Romanov Aleksandr Viacheslavovich** — Lomonosov Moscow State University (Moscow).*e-mail: aleksandr.romanov@math.msu.ru***Abstract**

This paper is aimed on comparison of two types of quasistatic linear elasticity problem approximate solutions. The problem of a multilayered composite rectangular plate bending is considered; the layers of the plate are supposed to be orthotropic, and orthotropy axes are supposed to be parallel to the sides of the plate; the edges of the plate are simply supported. The structural functions method is the main method considered in this paper: this method is in computing the displacements in the abovementioned inhomogeneous plate as a weighted sum of spatial derivatives of the displacements in a homogeneous plate of the same geometry under the same to the inhomogeneous one loadings – that homogeneous plate is called a concomitant one. The coefficients of that weighted sum are named structural functions. In this paper, we pass through all the necessary steps of the structural functions method and derive the formulae for the structural functions of the first and the second order. Also, we present an approach to the choice of the concomitant body elastic characteristics, and compare it with one of the previous approaches. Approximate solutions of the above-stated problem via the structural functions method of first and second order are numerically compared with the finite element method solutions (based on the 8-knot and 20-knot elements), and with well-known N. J. Pagano solution to the same problem in a three-dimensional statement.

Keywords: structural functions method, multilayered plate.

Bibliography: 40 titles.

For citation:

Kabanova, L.A., Romanov, A.V. 2024, “Comparison of approximate solutions to the quasi-static plate loading problem, obtained by the structural functions method and the finite element method”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 175–196.

1. Введение

Данная статья посвящена сопоставлению приближений решения трехмерной задачи о нагружении линейно-упругой прямоугольной пластины, составленной из ортотропных слоёв, свободно опертой по контуру, под действием нормальной нагрузки, распределённой на верхней лицевой плоскости: построенных по методу структурных функций; в конечноэлементной постановке; и с известным аналитическим решением той же задачи.

Метод структурных функций – способ построения приближенного решения квазистатической задачи теории упругости, исходно построенный в работах В. И. Горбачева [1], как вариант

реализации построенного им же метода интегральной формулы [2], [3]. Оба упомянутых метода представляют собой техники отыскания решения квазистатической задачи теории упругости для неоднородного тела, задействующие решение задачи теории упругости для однородного тела; предполагается, что оба тела имеют одинаковую геометрию, закрепления, и одинаково нагружены. Метод интегральной формулы позволяет получить точное аналитическое решение задачи о нагружении неоднородного тела, однако для его получения используется соотношение, связывающее решения описанных задач, и задействующее при этом компоненты тензора Грина [4] для неоднородного тела, непосредственное вычисление которых может представлять сложность, поэтому в более поздних работах был предложен метод построения приближений решения задачи о нагружении неоднородного тела, названный методом структурных функций. Построения для квазистатической задачи о нагружении линейно-упругого тела были обобщены на случай динамической задачи линейной теории упругости [5], одномерных и трехмерных задач термоупругости [6], [7], моментной теории упругости [8]; были построены интегральные формулы и вариации метода структурных функций для приближенных постановок задач в теории стержней [9], [10] и в теории пластин [11], для ряда задач математической физики [12]-[13]; показаны возможности метода структурных функций и для вычисления эффективных свойств композиционного материала [14], [15], [16]. Однако перечень конкретных постановок задач, решенных при помощи метода структурных функций, ожидает расширения: отметим в первую очередь работы [17] и [18]; кроме того, требуют дальнейшего исследования вопросы выбора упругих свойств задействуемого в построении приближенного решения однородного тела, выбора порядка метода структурных функций, верификации результатов применения метода структурных функций на наборе задач, аналитическое (или конечноэлементное) решение которых известно. Данная работа продолжает публикации [19]-[20], посвященные тестированию приближений решения задачи о нагружении свободно опертой по контуру пластины, полученных при помощи метода структурных функций. В публикациях [19]-[21] построены и сопоставлены с известным решением описанной задачи в трехмерной постановке приближения решения описанной задачи при помощи метода структурных функций первого и второго порядка, основанного на приближенных решениях сопутствующей задачи (см. ниже) с упругими свойствами, совпадающими с осредненными по Фойгту и по Рейссу свойствами рассматриваемой неоднородной пластины. В [20] приведены альтернативные варианты выбора упругих свойств сопутствующего тела, однако, оптимальность одного или другого выбора не утверждалась. Необходимо отметить, что метод интегральной формулы, давший начало методу структурных функций, родственен методу малого геометрического параметра (построенному в работах [22]-[23] и широко развитому с тех пор для различных постановок, например, [24]-[25]) для периодически неоднородного тела – последнее родство позволяет предложить альтернативный способ выбора упругих свойств сопутствующего тела, который приведен в статье [5] для случая второй краевой задачи и – с некоторыми изменениями – тестируется в данной статье. Кроме того, в данной работе приводится сопоставление приближений решения описанной задачи, построенных при помощи метода структурных функций, с вариационным решением аналогичной задачи методом конечных элементов в трехмерной постановке.

Описанную выше задачу наряду с трехмерной постановкой можно рассматривать также в приближенных постановках различных теорий пластин. Выбор задачи о нагружении свободно опертой по контуру пластинки в качестве тестовой обоснован большим количеством работ, рассматривающих вопросы тестирования качества приближенных решений задачи теории пластин: в силу удобства построения аналитических решений данной задачи в приближенных постановках и наличия известного высокоточного решения [26], именно такая задача часто используется для аттестации построенных приближенных моделей пластин и иных приближений решения трехмерной задачи теории упругости. Речь идет как о численном сопоставлении новых приближений, предлагаемых авторами данных работ, с известным (например, можно отметить работы [27, 28, 29]), так и об анализе способности предлагаемых приближе-

ний моделировать важные качественные свойства компонент напряженно-деформированного состояния пластины (отметим в первую очередь работы [30], [31]). В работе [31] приведены критерии качества, при помощи которых можно оценивать достоинства и недостатки приближенных моделей слоистых пластин, а также представлен способ классификации вышеупомянутых моделей, впоследствии развитый и углубленный в работе [30]: согласно ему, модели слоистых пластин предлагается подразделить на *ESL* (equivalent single layer) – те, которые предполагают замену неоднородного материала пластины однородным с осредненными в некотором смысле упругими свойствами (к таковому можно отнести, в первую очередь, теории, основанные на классических гипотезах сопротивления материалов); *LW* (layer-wise) – они предполагают решение – численное или приближенное аналитическое – индивидуальных задач теории упругости внутри каждого слоя; и *ESL-ZZ* – модели, которые представляют собой модификацию моделей первого типа путем внесения кусочно-непрерывных (и непрерывных внутри каждого отдельного слоя) функций в приближения для компонент напряженно-деформированного состояния, что позволяет учитывать необходимые качественные эффекты без столь существенного повышения вычислительной сложности, как в послойных моделях. Поскольку решение задачи, построенное по методу структурных функций, является также приближенным (по своей структуре оно близко к решениям, которые позволяют построить модели типа *ESL-ZZ*), вопрос его соответствия упомянутым критериям качества ставился одним из авторов данной работы ранее, в [19]–[21], и его анализ позволил заключить целесообразность дальнейшего изучения свойств приближения решения данной задачи, построенного по методу структурных функций.

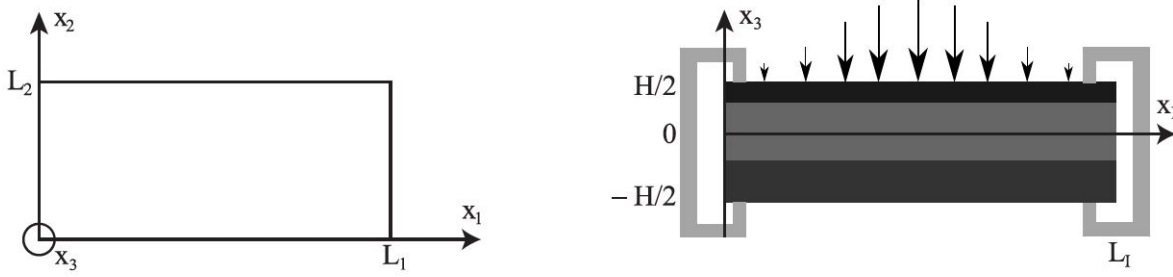
В данной работе принята тензорная нотация: большие латинские индексы принимают значения в диапазоне $I = 1..2$, малые – $i = 1..3$, по повторяющимся латинским индексам предполагается суммирование, по повторяющимся греческим индексам суммирование отсутствует; $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача о нагружении слоистой по толщине линейно-упругой прямоугольной пластины, составленной из ортотропных слоёв, нагруженной на верхней лицевой плоскости тестовой гармонической нагрузкой типа $q_0 \sin(\pi x_1 / L_1) \sin(\pi x_2 / L_2)$, $q_0 = const$, и свободной от нагрузок на нижней лицевой плоскости. На контуре пластины реализовано свободное опирание в постановке, математически совпадающей с приведённой в работе [26]: ребра пластины закреплены так, что на поверхности грани возможно перемещение только в продольном направлении, нормальном к плоскости этой грани; такое закрепление, например, может быть реализовано хватами типа «ухо-вилка». Математическая постановка описанной задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} &= 0, \\ x_3 = -H/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, -H/2) &= 0, \\ x_3 = H/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, H/2) &= 0, \sigma_{33}(x_1, x_2, H/2) = q_0 \sin \lambda x_1 \sin \mu x_2, \lambda = \pi/L_1, \mu = \pi/L_2 \\ x_1 = 0, L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) &= 0, u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ x_2 = 0, L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) &= 0, u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

линейные размеры пластины – L_1, L_2, H , $\vec{u}$ – вектор перемещений, $\sigma_{ij}(\vec{x})$ и $\varepsilon_{ij}(\vec{x})$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в пластине, $C_{ijkl}(x_3)$ – компоненты тензора модулей упругости. Начало координат расположено в срединной плоскости пластины (см. рисунок 1). Слои пластины предполагаются ортотропными в выбранных осях декартовых прямоугольных координат; компоненты тензора модулей упругости – кусочно-постоянные функции поперечной координаты x_3 , причём $C_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0$.

Рис. 1: Схема пластины: вид сверху, вид сбоку в плоскости Ox_1x_3 .

3. Решение задачи (1) при помощи метода структурных функций

Процедура построения приближения решения задачи (1) при помощи метода структурных функций состоит из двух этапов: из решения вспомогательной задачи о нагружении однородной пластины и из вычисления структурных функций. Ниже приведены только основные шаги и соотношения метода, детальный вывод всех соотношений и аналитические основы метода структурных функций освещены в работах [1], [17]. Следуя общему подходу метода структурных функций [1] и др., приближение решения задачи (1), называемой **исходной**, будем строить в виде частичной суммы ряда

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikl i_1 \dots i_q}(\vec{x}) v_{k, l i_1 \dots i_q}(\vec{x}), \quad (2)$$

связывающего перемещения в исходном теле с перемещениями $v_k(\vec{x})$ и производными перемещений $v_{k, l i_1 \dots i_q}(\vec{x})$ в так называемом **сопутствующем** теле (в рассматриваемом случае – пластине тех же геометрических размеров $L_1 \times L_2 \times H$ с теми же граничными условиями, что и в исходной задаче (1), но изготовленной из однородного материала). Коэффициенты ряда (2) $N_{ikl i_1 \dots i_q}(\vec{x})$ – симметричные относительно перестановки индексов kl и перестановок внутри мультииндекса $i_1 \dots i_q$ – называют структурными функциями.

В данной работе приводится построение приближений решения задачи (1) при помощи метода структурных функций первого и второго порядка: в представлении (2) рассматриваются частичные суммы ряда по производным решения сопутствующей задачи, соответствующие методу структурных функций первого,

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(\vec{x}) v_{k, l}(\vec{x}), \quad (3)$$

и второго порядка,

$$u_i(\vec{x}) = v_i(\vec{x}) + N_{ikl}(\vec{x}) v_{k, l}(\vec{x}) + N_{ikl i_1}(\vec{x}) v_{k, l i_1}(\vec{x}). \quad (4)$$

Для построения приближений решения задачи (1) в форме (3) и (4) приведем постановку и приближенное решение сопутствующей задачи, а также основные шаги вычисления структурных функций первого и второго порядка.

3.1. Постановка и решение сопутствующей задачи

Математическая постановка задачи, которая является сопутствующей для (1), имеет вид

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}) &= 0, \\ x_3 = -H/2 : s_{i3}(x_1, x_2, -H/2) &= 0, \\ x_3 = H/2 : s_{i3}(x_1, x_2, H/2) &= 0, s_{33}(x_1, x_2, H/2) = q_0 \sin \lambda x_1 \sin \mu x_2, \\ x_1 = 0, L_1 : v_2(\cdot, x_2, x_3) &= 0, v_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, s_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0, \\ x_2 = 0, L_2 : v_1(x_1, \cdot, x_3) &= 0, v_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, s_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

здесь и далее $\vec{v}(\vec{x})$ – вектор перемещений; $s_{ij}(\vec{x})$ и $e_{ij}(\vec{x})$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в сопутствующей пластине, C_{ijkl}^0 – компоненты тензора упругих модулей сопутствующего тела, они не зависят от координат. Общие построения метода допускают выбор произвольных термодинамически допустимых упругих свойств сопутствующего тела, однако мы сразу зафиксируем для материала сопутствующей пластины предположение ортотропии в используемых осях координат, которое аналогично неоднородному случаю влечёт $C_{\alpha\alpha\alpha\beta}^0 = 0$, $C_{\alpha\alpha\beta\gamma}^0 = 0$.

Существует многообразие подходов к построению приближений решения задачи о нагружении однородной пластины вида (5), небольшая часть которых упомянута во Введении. В настоящей работе используется приближенное решение сопутствующей задачи, построенное по методу Пагано, исходно предложенному в работе N. J. Pagano [26]. Данный метод предполагает приближение решения задачи (5) функциями вида

$$\begin{aligned} v_1(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^3 (F^{[j]} \cosh(m^{[j]} x_3) + G^{[j]} \sinh(m^{[j]} x_3)) * \cos(\lambda x_1) \sin(\mu x_2), \\ v_2(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^3 L^{[j]} (F^{[j]} \cosh(m^{[j]} x_3) + G^{[j]} \sinh(m^{[j]} x_3)) * \sin(\lambda x_1) \cos(\mu x_2), \\ v_3(\vec{x}) &= \sum_{j=1}^3 (G^{[j]} \cosh(m^{[j]} x_3) + F^{[j]} \sinh(m^{[j]} x_3)) * \sin(\lambda x_1) \sin(\mu x_2), \end{aligned} \quad (6)$$

здесь $F_i^{[j]}, G_i^{[j]}, L_i^{[j]}$ – наборы констант, вычисляемых по упругим свойствам сопутствующей пластины и вторичным величинам от размеров пластины в плане λ, μ . Конкретные выражения для констант в данной работе опущены и совпадают с вычислениями, приведёнными в [26].

3.2. Вычисление структурных функций первого порядка

В исходных работах [1], [17] и др., посвященных методу структурных функций, представлены два подхода к вычислению структурных функций неоднородного тела: по определению, структурные функции можно вычислить, как взвешенные моменты тензора Грина неоднородного тела, но для упрощения практических вычислений построен и альтернативный способ – структурные функции $N_{ikl_1 \dots l_q}(\vec{x})$ можно найти, как решение рекуррентной по q системы уравнений в частных производных. Последняя получена из достаточного условия совпадения правых частей уравнений равновесия и граничных условий в исходной (1) и сопутствующей (5) задачах:

$$[C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} = C_{ijkl}^0 v_{k,lj}(\vec{x}), \quad (7)$$

$$x_3 = \pm H/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2, \pm H/2) = s_{i3}(x_1, x_2, \pm H/2), \quad (8)$$

$$x_1 = 0, L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) = v_2(\cdot, x_2, x_3), u_3(\cdot, x_2, x_3) = v_3(\cdot, x_2, x_3), \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = s_{11}(\cdot, x_2, x_3), \quad (9)$$

$$x_2 = 0, L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) = v_1(x_1, \cdot, x_3), u_3(x_1, \cdot, x_3) = v_3(x_1, \cdot, x_3), \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = s_{22}(x_1, \cdot, x_3).$$

Подставим приближенное представление перемещений в исходном теле (3) в равенства (7), (8) и запишем достаточные условия выполнения этих равенств – условия совпадения коэффициентов при производных $v_{m,n}$ одного порядка в правой и левой части полученных соотношений. Таким образом из уравнения (7) можно получить уравнение для структурных функций первого порядка (10), в случае слоистого материала данное уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка; из совпадения граничных условий исходной и сопутствующей задачи (8) – граничные условия для N_{kmn} -функций на верхней и нижней лицевых поверхностях (11), (12):

$$[C_{i3mn}(x_3) + C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3} = 0, \quad (10)$$

$$(C_{i3mn}(\pm H/2) + C_{i3k3}(\pm H/2)N_{kmn,3}(\pm H/2)) = C_{i3mn}^0, \quad (11)$$

$$C_{i3kl}(\pm H/2)N_{kmn}(\pm H/2) = 0. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае слоистого материала функции $N_{klm}(\vec{x}) = N_{klm}(x_3)$. Подставляя представление (3) в условия совпадения перемещений и осевых напряжений на гранях пластины (9), учитывая вид решения сопутствующей задачи (6), получаем, что

$$N_{213}(x_3) = 0, N_{212}(x_3) = 0, N_{312}(x_3) = 0, N_{313}(x_3) = 0, N_{123}(x_3) = 0, N_{112}(x_3) = 0, N_{323}(x_3) = 0, \\ N_{111}(x_3) = 0, N_{122}(x_3) = 0, N_{133}(x_3) = 0, N_{211}(x_3) = 0, N_{222}(x_3) = 0, N_{233}(x_3) = 0.$$

От нуля отличны 5 структурных функций, которые удовлетворяют уравнениям (10). Последние можно явно проинтегрировать, учитывая граничные условия (11),

$$N_{3\alpha\alpha}(x_3) = \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} dy + k_{3\alpha\alpha}, \quad N_{\alpha\alpha 3}(x_3) = \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(y)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(y)} dy + k_{\alpha\alpha 3}, \quad (13)$$

здесь k_{ijk} – константы интегрирования, а греческие индексы обозначают совпадающие значения индексов, по которым не производится суммирование. Из условия (12) на нижней лицевой поверхности, $C_{i3kl} N_{ikl}(-H/2) = 0$, следует $k_{ikl} = 0$, а на верхней лицевой поверхности условие $C_{i3kl}(H/2)N_{kmn}(H/2) = 0$ можно удовлетворить только выбором свойств сопутствующего тела. В силу найденного вида структурных функций (13), граничное условие (12) на верхней лицевой поверхности выполнено, если

$$C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = 1/\langle 1/C_{\alpha 3\alpha 3} \rangle, \quad C_{33\alpha\alpha}^0 = \langle C_{33\alpha\alpha}/C_{3333} \rangle / \langle 1/C_{3333} \rangle. \quad (14)$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено осреднение по толщине, $\langle f \rangle = \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} f(x_3) dx_3$.

Из общих соотношений метода не следуют какие-либо требования к выбору остальных компонент тензора модулей упругости сопутствующего тела C_{IJKL}^0 . В работе [20] приведены приближения решения задачи (1), основанные на выборе свойств сопутствующего тела типа $C_{IJKL}^0 = \langle C_{IJKL} \rangle$ и $C_{IJKL}^0 = 1/\langle 1/C_{IJKL} \rangle$, однако оптимальность этого выбора не

утверждается. В работе [5] и ряде других работ В. И. Горбачева предложено выбирать свойства сопутствующего тела из соотношения

$$C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} + C_{ijmn}N_{mkl,n} \rangle \quad (15)$$

– как было отмечено во Введении, данный способ выбора упругих свойств сопутствующего тела обоснован, в частности, из соображений родства методов интегральной формулы и малого геометрического параметра. Для компонент тензора модулей упругости сопутствующего тела $C_{\alpha 3 \alpha 3}^0$ и $C_{33 \alpha \alpha}^0$ соотношение (15) удовлетворяется тождественно в силу вида структурных функций (13), а для оставшихся компонент тензора модулей упругости сопутствующего тела оно может служить критерием выбора. В настоящей работе мы совместим данный выбор свойств сопутствующего тела с формулами (14): компоненты $C_{\alpha 3 \alpha 3}^0$ и $C_{33 \alpha \alpha}^0$ выберем в соответствии с формулами (14), а C_{IJKL}^0 – по формулам (15), что в силу вида структурных функций (13) влечёт

$$C_{1111}^0 = \frac{(\langle C_{1133}/C_{3333} \rangle)^2}{\langle 1/C_{3333} \rangle} - \langle C_{1133}^2/C_{3333} \rangle + \langle C_{1111} \rangle, \quad (16)$$

$$C_{2222}^0 = \frac{(\langle C_{2233}/C_{3333} \rangle)^2}{\langle 1/C_{3333} \rangle} - \langle C_{2233}^2/C_{3333} \rangle + \langle C_{2222} \rangle,$$

$$C_{1122}^0 = \frac{\langle C_{1133}/C_{3333} \rangle \langle C_{2233}/C_{3333} \rangle}{\langle 1/C_{3333} \rangle} - \langle C_{1133}C_{2233}/C_{3333} \rangle + \langle C_{1122} \rangle, C_{1212}^0 = \langle C_{1212} \rangle.$$

В численную реализацию метода добавлена проверка положительной определенности построенного описанным образом тензора C_{ijkl}^0 .

3.3. Вид приближения решения задачи (1) по методу структурных функций первого порядка

Учитывая в соотношении (3) данные о структурных функциях, которые обращаются в ноль, получаем, что приближение решения задачи (1) по методу структурных функций первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} u_1(\vec{x}) &= v_1(\vec{x}) + N_{113}(x_3)[v_{1,3}(\vec{x}) + v_{3,1}(\vec{x})], \\ u_2(\vec{x}) &= v_2(\vec{x}) + N_{223}(x_3)[v_{2,3}(\vec{x}) + v_{3,2}(\vec{x})], \\ u_3(\vec{x}) &= v_3(\vec{x}) + N_{311}(x_3)v_{1,1}(\vec{x}) + N_{322}(x_3)v_{2,2}(\vec{x}) + N_{333}(x_3)v_{3,3}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (17)$$

упругие свойства сопутствующей пластины выбраны в соответствии с формулами (14), (16); решение сопутствующей задачи построено по методу Пагано (6), а структурные функции, отличные от нуля, имеют вид (13).

3.4. Вычисление структурных функций второго порядка

Построим приближение решения исходной задачи при помощи метода структурных функций второго порядка. Для этого сделаем аналогичные предыдущим разделам шаги по вычислению структурных функций и выбору упругих свойств сопутствующего тела, взяв за основу вид приближения перемещений в исходном теле (4). Из соображений совпадения правых частей уравнений равновесия с учётом того, что упругие свойства исходной пластины зависят только от поперечной координаты, следуют обыкновенные дифференциальные уравнения для структурных функций

$$[C_{i3mn}(x_3) + C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3)]_{,3} = 0 \quad (18)$$

$$[C_{i3m3}(x_3)N_{mkl,1,3}(x_3) + C_{i3mi_1}(x_3)N_{mkl}(x_3)]_{,3} = C_{ii_1kl}^0 - [C_{ii_1m3}(x_3)N_{mkl,3}(x_3) + C_{ii_1kl}(x_3)], \quad (19)$$

из совпадения граничных условий на верхней и нижней лицевой поверхности – граничные условия для N -функций,

$$\begin{aligned} C_{i3mn}(\pm H/2) + C_{i3k3}(\pm H/2)N_{kmn,3}(\pm H/2) &= C_{i3mn}^0, \\ N_{1\alpha\alpha 1,3}(\pm H/2) &= N_{2\alpha\alpha 2,3}(\pm H/2) = N_{3\alpha\alpha 3,3}(\pm H/2) = -N_{3\alpha\alpha}(\pm H/2), \quad \alpha = 1..3 \\ N_{\beta\beta 33,3}(\pm H/2) &= -N_{\beta\beta 33}(\pm H/2), \quad \beta = 1..2, \quad N_{1122,3}(\pm H/2) = 0, \quad N_{2211,3}(\pm H/2) = 0, \\ C_{33\gamma\gamma}(\pm H/2)N_{\gamma\gamma 3}(\pm H/2) &= -C_{3333}(\pm H/2)N_{33\gamma\gamma,3}(\pm H/2), \quad \gamma = 1..2, \\ C_{i3mn}(\pm H/2)N_{mkli_1}(\pm H/2) &= 0, \end{aligned}$$

а из совпадения граничных условий на боковых гранях – тождественное равенство нулю следующих структурных функций:

$$\begin{aligned} N_{213}(x_3) &= 0, N_{212}(x_3) = 0, N_{312}(x_3) = 0, N_{313}(x_3) = 0, N_{123}(x_3) = 0, N_{112}(x_3) = 0, N_{323}(x_3) = 0, \\ N_{111}(x_3) &= 0, N_{122}(x_3) = 0, N_{133}(x_3) = 0, N_{211}(x_3) = 0, N_{222}(x_3) = 0, N_{233}(x_3) = 0, \\ N_{\alpha\alpha\alpha\beta}(x_3) &= 0, N_{\alpha\alpha\beta\gamma}(x_3) = 0, N_{\alpha\beta\gamma\alpha}(x_3) = 0, N_{\beta\alpha\alpha\gamma}(x_3) = 0, N_{\beta\gamma\alpha\alpha}(x_3) = 0. \end{aligned}$$

В результате интегрирования уравнений (18) получаем, что вид структурных функций первого порядка совпадает с найденным в соответствующем разделе видом (13), а структурные функции второго порядка вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} N_{\beta\alpha\alpha\beta}(x_3) &= - \int_{-H/2}^{x_3} \left[\int_{-H/2}^y (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(z))/C_{3333}(z) dz + k_{3\alpha\alpha} \right] dy + k_{\alpha\beta\beta\alpha}, \\ N_{\alpha\alpha 33}(x_3) &= - \int_{-H/2}^{x_3} \left[\int_{-H/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(z))/C_{\alpha 3\alpha 3}(z) dz + k_{\alpha\alpha 3} \right] dy + k_{\alpha\alpha 33}, \\ N_{33\alpha\alpha}(x_3) &= - \int_{-H/2}^{x_3} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} \left[\int_{-H/2}^y (C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(z))/C_{\alpha 3\alpha 3}(z) dz + k_{\alpha\alpha 3} \right] dy + k_{33\alpha\alpha}, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь k_{ijk} и k_{ijkl} – константы интегрирования. Аналогично случаю первого порядка, заключительное условие набора (3.4) $C_{ijmn}(\pm H/2)N_{mkli_1}(\pm H/2) = 0$ на нижней лицевой плоскости удовлетворяется выбором $k_{ijkl} = 0$, на верхней лицевой плоскости для исходной пластины с асимметричными относительно $x_3 = 0$ упругими свойствами удовлетворяется выбором

$$\begin{aligned} C_{\alpha 3\alpha 3}^0 &= \frac{\langle C_{33\alpha\alpha} * y / C_{3333} \rangle}{\left\langle \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} \left[\int_{-H/2}^y \frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} dz - \frac{1}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \int_{-H/2}^{\xi} \frac{1}{C_{\alpha 3\alpha 3}(\zeta)} d\zeta d\xi \right] \right\rangle}, \\ C_{33\alpha\alpha}^0 &= \frac{\langle C_{33\alpha\alpha} / C_{3333} \rangle}{\langle 1 / C_{3333} \rangle}, \quad k_{\alpha\alpha 3} = - \left\langle \int_{-H/2}^y \frac{C_{\alpha 3\alpha 3}^0 - C_{\alpha 3\alpha 3}(z)}{C_{\alpha 3\alpha 3}(z)} dz \right\rangle, \\ k_{3\alpha\alpha} &= - \left\langle \int_{-H/2}^y \frac{C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}(z)}{C_{33\alpha\alpha}(z)} dz \right\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

для исходной пластины с симметричными относительно $x_3 = 0$ упругими свойствами условие $C_{ijmn}(H/2)N_{mkli_1}(H/2) = 0$ выполняется автоматически; в данной статье этому случаю соответствует выбор $C_{\alpha 3\alpha 3}^0 = \langle C_{\alpha 3\alpha 3} \rangle$. Остальные компоненты тензора упругих модулей выберем так же, как и в предыдущем случае – в соответствии с соотношением (15), и, соответственно, (16).

3.5. Вид приближения решения задачи (1) по методу структурных функций второго порядка

Подставляя в форму приближения перемещений в исходной пластине по методу структурных функций второго порядка (4) данные об отличных от нуля структурных функциях и форме решения сопутствующей задачи, получаем соотношения, задающие приближение решения исходной задачи:

$$\begin{aligned}
 u_1(\vec{x}) &= v_1(\vec{x}) + N_{113}(x_3)(v_{1,3}(\vec{x}) + v_{3,1}(\vec{x})) + N_{1331}(x_3)v_{3,31}(\vec{x}) + \\
 &N_{1111}(x_3)v_{1,11}(\vec{x}) + N_{1221}(x_3)v_{2,21}(\vec{x}) + N_{1133}(x_3)(v_{1,33}(\vec{x}) + v_{3,31}(\vec{x})), \\
 u_2(\vec{x}) &= v_2(\vec{x}) + N_{223}(x_3)(v_{2,3}(\vec{x}) + v_{3,2}(\vec{x})) + N_{2332}(x_3)v_{3,32}(\vec{x}) + \\
 &N_{2112}(x_3)v_{1,12}(\vec{x}) + N_{2222}(x_3)v_{2,22}(\vec{x}) + N_{2233}(x_3)(v_{2,33}(\vec{x}) + v_{3,32}(\vec{x})), \\
 u_3(\vec{x}) &= v_3(\vec{x}) + N_{311}(x_3)v_{1,1}(\vec{x}) + N_{322}(x_3)v_{2,2}(\vec{x}) + N_{333}(x_3)v_{3,3}(\vec{x}) + \\
 &N_{3113}(x_3)v_{1,13}(\vec{x}) + N_{3223}(x_3)v_{2,23}(\vec{x}) + N_{3333}(x_3)v_{3,33}(\vec{x}) + \\
 &N_{3311}(x_3)(v_{1,13}(\vec{x}) + v_{3,11}(\vec{x})) + N_{3322}(x_3)(v_{2,23}(\vec{x}) + v_{3,22}(\vec{x})).
 \end{aligned} \tag{22}$$

4. Решение задачи (1) методом Ритца (метод конечных элементов)

Построенные приближения решения задачи (1) методом структурных функций первого (17) и второго (22) порядка сравним с вариационным решением аналогичной задачи методом конечных элементов в трехмерной постановке. Сформулируем вариационный принцип Лагранжа и применим метод Ритца, разложив искомые перемещения в ряд по базисным кусочно-полиномиальным функциям лагранжева и серендипова семейства. При таком разложении условие стационарности дискретного лагранжиана позволяет привести краевую задачу (1) к тензорно-блочной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой численно.

Задачу локального минимума функционала Лагранжа L классической теории упругости [32, 33, 4, 34] можно сформулировать, как частный случай микрополярной теории упругости [35, 36, 37, 38], удержав действительную и допустимую кинематическую систему векторов микроповоротов

$$\vec{u}: L(\vec{u}) \leq L(\vec{w}), \quad L(\vec{w}) = \frac{1}{2} a(\vec{w}, \vec{w}) - l(\vec{w}), \quad \forall \vec{w}: \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0, \tag{23}$$

и записать условие стационарности в следующем виде

$$DL(\vec{u}, \vec{w}) = 0, \tag{24}$$

где $\vec{u}$ — действительная кинематическая система векторов перемещений; $\vec{w}$ — кинематически допустимая система векторов, т. е. возможные перемещения из того же пространства, что $\vec{u}$; D — дифференциал Гато. При формулировке вариационного принципа Лагранжа потребуем выполнение соотношений Коши при заданных кинематических граничных условиях на поверхности Σ_1 (в случае задачи (1) это — грани пластины), [32]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \vec{u}|_{\Sigma_1} = 0, \tag{25}$$

тогда условия стационарности функционала Лагранжа (24) эквивалентны уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на поверхности Σ_2 [32], которые в случае задачи (1) имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \tag{26}$$

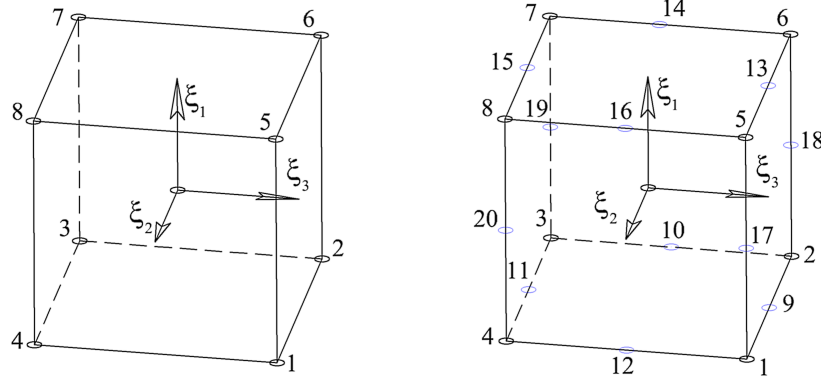


Рис. 2: Нумерация узлов и ориентация локальных осей области натуральных координат для 8- и 20-узлового конечного элемента.

где Σ — полная поверхность пластины ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$); $\vec{S}$ — поверхностные силы, соответствующие граничным условиям задачи (1). Так как рассматриваемый класс задач связан с обратимыми термодинамическими процессами, то в силу симметрии функционала a из условий стационарности (24) следуют интегральные тождества

$$a(\vec{u}, \vec{w}) = l(\vec{w}), \quad a(\vec{u}, \vec{w}) = \int_V \sigma_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{ij}(\vec{w}) dV, \quad l(\vec{w}) = \int_{\Sigma_2} S_i w_i d\Sigma, \quad (27)$$

где V — объем тела; $a(\vec{u}, \vec{w})$ — есть энергия упругих деформаций, если приняты тождества $\vec{w} \equiv \vec{u}$, при этом $l(\vec{w})$ является работой внешних сил на соответствующих перемещениях. В соотношениях, приведённых выше, учтено, что в задаче (1) отсутствуют массовые силы.

Важно отметить, что из условия существования оператора (потенциала) деформаций справедливы формулы Грина [32, 34]:

$$\dot{W}(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (28)$$

где C_{ijkl} — тензор модулей упругости исходного тела. Для нахождения локального минимума функционала Лагранжа (23) воспользуемся методом Ритца и разложим решение исходной задачи по базису кусочно-полиномиальных функций так, чтобы их линейная комбинация представляла стационарный минимум функционалу [39, 40, 35, 33]:

$$G \supset G^N, \quad \vec{w}^N \in G^N, \quad \{\vec{w}\}^N = \sum_{p=1}^N N_p \widehat{\{\vec{w}\}}^p \equiv N_p \widehat{\{\vec{w}\}}^p, \quad (29)$$

где G^N — конечномерное пространство базисных функций размерности N ; $p = \overline{1, N}$ — узлы конечных элементов — подчиняются правилу суммирования Эйнштейна (далее знак суммы опущен); $\{\vec{w}\}^N$ — аппроксимированная векторная функция; $\widehat{\{\vec{w}\}}^p$ — вектор искомой кинематической величины в p -м узле; N_p — функции формы 8-узлового или 20-узлового конечного элемента серендипова семейства (serendipity — «интуитивная прозорливость») [40, 35] (см. рис. 2). Для 8-узлового конечного элемента базисные функции имеют вид [40, 35]

$$\xi_p^1 = \pm 1, \quad \xi_p^2 = \pm 1, \quad \xi_p^3 = \pm 1, \quad N_p(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad (30)$$

где $p = \{1, 2, \dots, 8\}$ — узлы конечного элемента в локальной нумерации; ξ_p^i — i -я координата p -го узла; $\xi^i \in [-1; 1]$ — произвольная точка области базисной функции или области натуральных

координат. Функции формы 20-узлового КЭ для вершинных и промежуточных узлов имеют вид [40, 35]:

$$\begin{aligned}
 N_p &= \frac{1}{8} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3) (\xi_p^1 \xi^1 + \xi_p^2 \xi^2 + \xi_p^3 \xi^3 - 2), \quad p = \{1, 2, \dots, 8\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 - \xi^{1(2)}) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^1 = 0, \quad p = \{17, 18, 19, 20\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 - \xi^{2(2)}) (1 + \xi_p^3 \xi^3), \quad \xi_p^2 = 0, \quad p = \{9, 11, 13, 15\}, \\
 N_p &= \frac{1}{4} (1 + \xi_p^1 \xi^1) (1 + \xi_p^2 \xi^2) (1 - \xi^{3(2)}), \quad \xi_p^3 = 0, \quad p = \{10, 12, 14, 16\},
 \end{aligned} \tag{31}$$

где $\xi^{i(2)}$ — возведение в степень 2 компоненты ξ^i .

Выполнив дискретизацию лагранжиана (23) по пространственным координатам (29) получим систему линейных алгебраических уравнений в тензорно-блочном виде

$$DL(\widehat{\vec{w}}) = 0, \quad \mathbb{K}_{pq}^{lj} \widehat{w}_l^p = \mathbb{F}_q^j, \tag{32}$$

где $\mathbb{K}_{pq}^{lj}$ — компоненты тензорно-блочной матрицы жесткости для локальной области элемента примут вид [35, 36, 37, 38]

$$\mathbb{K}_{pq}^{lj} = \int_{V_e} C_{ijkl} N_{p,s} N_{q,t} B_k^s B_i^t J dV_\xi, \quad \mathbb{F}_q^j = \int_{\Sigma_2} S^j N_q J_\Sigma d\Sigma_\xi, \tag{33}$$

где V_ξ, Σ_ξ — объем и поверхность тела в области мастера-элемента соответственно; B, J, J_Σ — функция обратной матрицы Якоби, объёмного и поверхностного якобиана [35].

Используя вышеизложенный вариационный принцип Лагранжа и метод Ритца (23) – (33), реализована собственная программа в стеке CUDA C, C++ с применением технологии параллельных вычислений на графических видеокартах GPGPU. Апробация численного решения выполнялась сравнением результатов собственной программы с пакетом ABAQUS.

Рассмотрим модель квадратного в плане и неоднородного по высоте призматического тела, аппроксимированного восьмиузловыми и квадратичными двадцатиузловыми конечными элементами серендипова семейства, см. рис. 3. Несмотря на ресурсоемкость, двадцатиузловые элементы высокого порядка обладают лучшей аппроксимацией не только для искомого поля перемещений, но и для тензорных полей деформаций и напряжений в произвольной области кусочно-полиномиальной функции (в частности, в узлах модели), т.к. отпадает необходимость использовать теорию согласованных результатов для нахождения узловых напряжений. Общее количество 8-узловых или двадцатиузловых элементов модели 60 000. По толщине призматический элемент является трехслойным, каждый из слоёв является ортотропным (рис. 3, и совпадает с границей конечных элементов). Материальные параметры и размеры каждого слоя тестовых пластин представлены в таблице 5.1, 5.2. Статические и кинематические граничные условия на боковой и лицевых поверхностях представлены соотношениями (1).

В разделе ниже производится сопоставление приближений решения задачи (1), построенных при помощи метода структурных функций с описанной в данном разделе конечноэлементным решением.

5. Сопоставление решений

Для сопоставления приближений решения задачи (1), описанных в разделах 3.3, 3.5 и 4 соответствующие приближения вычислены в случае нагружения двух тестовых пластин: симметричной относительно срединной плоскости и лишенной данной симметрии. Вычисление

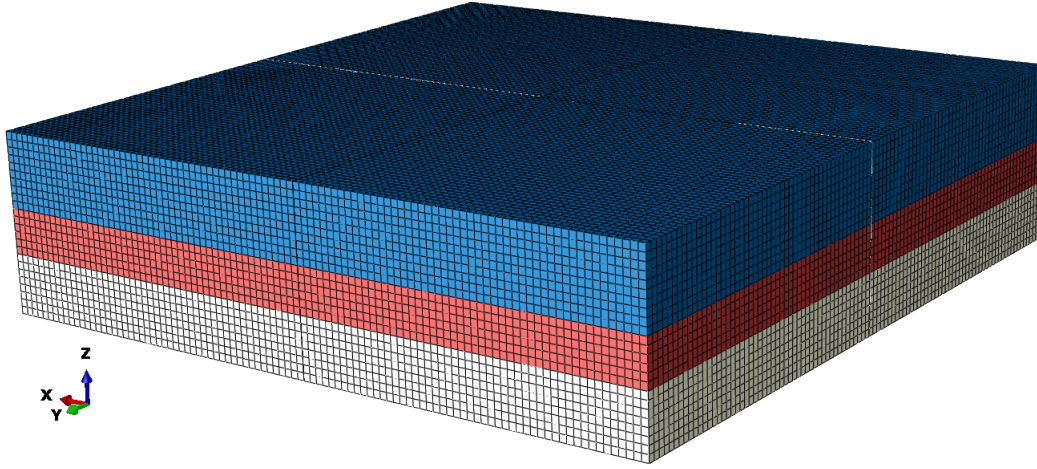


Рис. 3: Трехмерная модель квадратного в плане и неоднородного по высоте призматического тела, аппроксимированного восьми- и двадцатиузловыми конечными элементами серендипова семейства

приближений, построенных по методу структурных функций, выполнялось на языке Python, численное решение вариационной постановки методом конечных элементов – в среде ABAQUS. В силу тригонометрического вида распределенной на верхней лицевой поверхности нагрузки q_3^+ (1) и тригонометрического вида решения сопутствующей задачи (6) мы приводим только графики зависимости компонент вектора перемещений и тензора напряжений исходной пластины от поперечной координаты в сечениях, соответствующих максимальным значениям этих величин по x_1, x_2 . Графики построены для нормализованных компонент напряженно-деформированного состояния,

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(0, L_2/2, x_3) &= 100H^3 * E_T * u_1(0, L_2/2, x_3)/q_0L_1^4 \\ \hat{\sigma}_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3) &= H\sigma_{11}(L_1/2, L_2/2, x_3)/q_0L_1^2, \\ \hat{\sigma}_{13}(0, L_2/2, x_3) &= H\sigma_{13}(0, L_2/2, x_3)/q_0L_1^2, \\ \hat{\sigma}_{33}(0, L_2/2, x_3) &= H\sigma_{33}(0, L_2/2, x_3)/q_0L_1^2.\end{aligned}\quad (34)$$

5.1. Случай асимметричной пластины

В качестве первого примера приведем результат вычисления приближений компонент напряженно-деформированного состояния асимметричной пластины, упругие свойства которой приведены в Таблице 1:

Таблица 1: технические постоянные модельной пластины №1, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$.

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2
$[-H/6, H/12]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[H/12, H/2]$	70	1	1	0.25	0.25/70	0.25/70	0.5	0.5	0.2

На рисунках 4 и 5 приведены графики нормализованных в соответствии с соотношениями (34) приближений компонент напряженно-деформированного состояния пластины №1, вычисленными по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующей

щего тела (14), (16) (штрихпунктирные кривые), по методу структурных функций II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела (21) (пунктирные кривые), по методу конечных элементов с элементами типа C3D8 (треугольные точки) и типа C3D20 (квадратные точки). Для сравнения приведены также результаты решения задачи (1) по методу структурных функций первого порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ ([19], прерывистые кривые) и по методу Пагано (сплошные кривые).

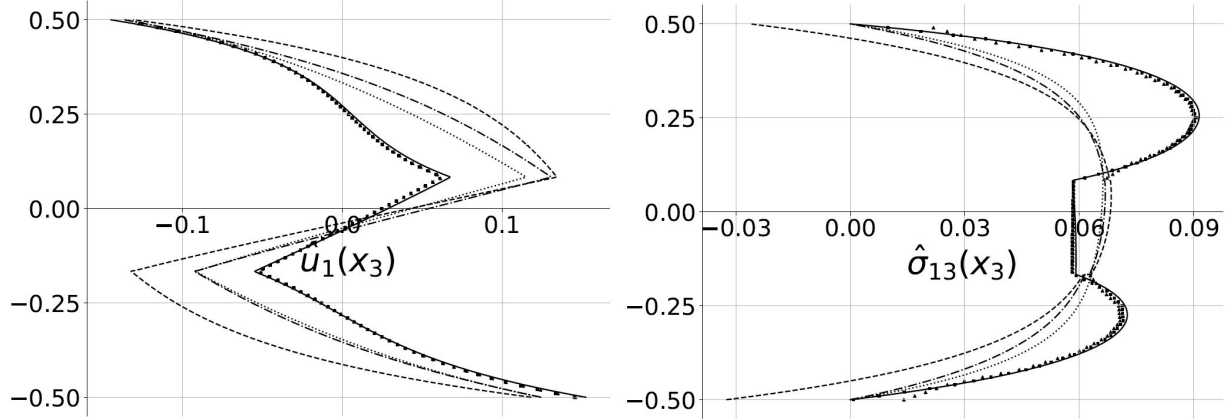


Рис. 4: Результаты визуализации приближений нормализованного продольного перемещения $\hat{u}_1$ и напряжения $\hat{\sigma}_{13}$ в сечении $(0, L_2/2, x_3)$ Пластины №1, вычисленных по методу структурных функций I и II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела, изложенным в статье (штрихпунктирные и пунктирные кривые соответственно); по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ (прерывистые кривые); по методу конечных элементов с использованием аппроксимации элементами лагранжева типа C3D8 (треугольные точки) и элементами квадратичного типа C3D20 (квадратные точки), с равномерным распределением 24 элементов по толщине; по методу Пагано (сплошные линии).

5.2. Случай симметричной пластины

Поскольку реализация метода структурных функций второго порядка, описанная в данной статье, различается для симметричной и асимметричной по толщине пластины, приведём результаты визуализации приближений также для случая симметричной по толщине пластины, упругие свойства которой приведены в Таблице 2.

Таблица 2: Технические постоянные модельной пластины №2, соотношение линейных размеров пластины – $H/L_1 = H/L_2 = 1/4$, нагружение $q_3^+ = q_0 \sin \lambda_m x_1 \sin \mu_n x_2$, $q_I^+ \equiv 0$, $q_i^- \equiv 0$

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
$[-H/2, -H/6]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5
$[-H/6, H/6]$	30	1	1	0.25	0.25/30	0.25/30	0.5	0.5	0.2
$[H/6, H/2]$	1	30	1	0.25/30	0.25	0.25/30	0.5	0.2	0.5

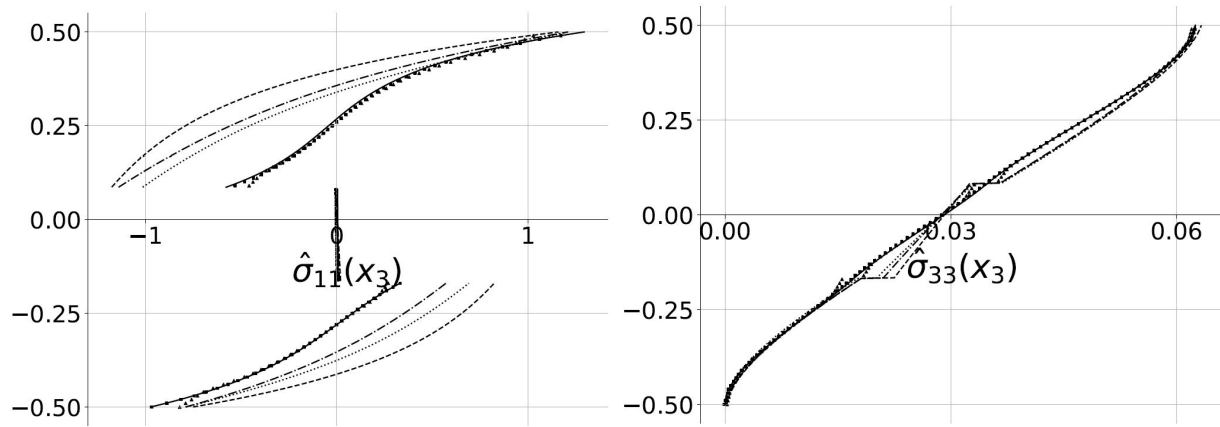


Рис. 5: Результаты визуализации приближений нормализованного продольного $\hat{\sigma}_{11}$ и поперечного напряжения $\hat{\sigma}_{33}$ в сечении $(L_1/2, L_2/2, x_3)$ Пластины №1, вычисленных по методу структурных функций I и II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела, изложенным в статье (штрихпунктирные и пунктирные кривые соответственно); по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ (прерывистые кривые); по методу конечных элементов с использованием аппроксимации элементами лагранжева типа C3D8 (треугольные точки) и элементами квадратичного типа C3D20 (квадратные точки), с равномерным распределением 24 элементов по толщине; по методу Пагано (сплошные линии).

Анализируя результат сопоставлений, приведённых в разделах 5.1-5.2, можно подтвердить предположение о том, что предложенный в данной работе способ выбора упругих свойств сопутствующего тела имеет преимущество перед выбором в качестве последних осредненных по Фойгту упругих свойств исходного тела: предложенный способ гарантирует выполнение граничных условия на верхней и нижней лицевой плоскости. Повышение порядка метода структурных функций позволяет улучшить приближение, однако улучшение это не столь велико относительно ошибки приближения первого порядка. В дальнейших работах планируется построение приближения третьего порядка: согласно общим закономерностям теории пластин, наиболее рационально рассматривать приближения, в которых зависимость перемещений от толщины моделируется степенными функциями нечётного порядка, а этот порядок в приближениях по методу структурных функций совпадает с порядком метода структурных функций.

На паре рисунков 6 приведены результаты визуализации нормализованных в соответствии с соотношениями (34) приближений компонент напряженно-деформированного состояния пластины №2, вычисленными по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела (14), (16) (штрихпунктирные кривые), по методу структурных функций II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела (21) (пунктирные кривые), по методу конечных элементов с элементами типа C3D20 (квадратные точки). Для сравнения приведены также результаты решения задачи (1) по методу структурных функций первого порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ ([19], прерывистые кривые) и по методу Пагано (сплошные кривые).

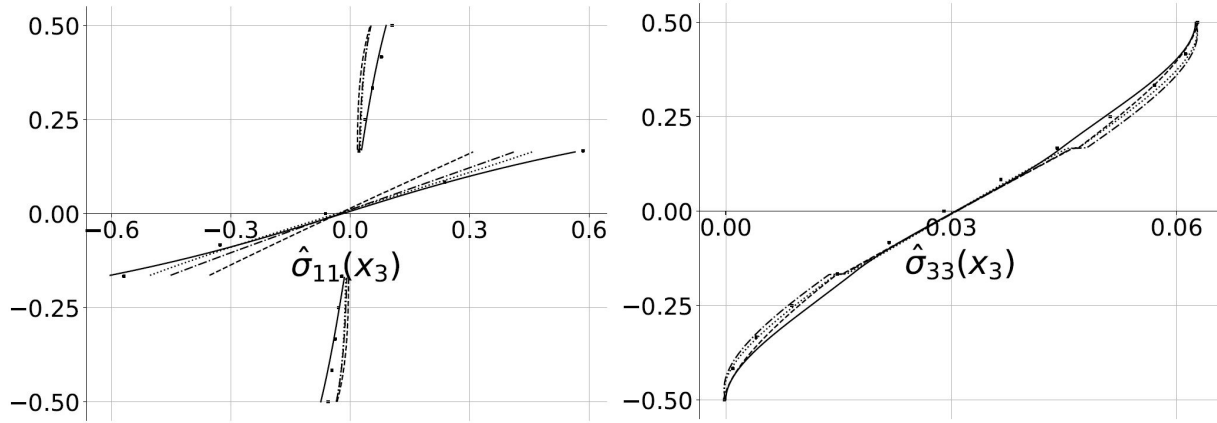


Рис. 6: Результаты визуализации приближений нормализованного продольного $\hat{\sigma}_{11}$ и поперечного напряжения $\hat{\sigma}_{33}$ в сечении $(L_1/2, L_2/2, x_3)$ Пластины №2, вычисленных по методу структурных функций I и II порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела, изложенным в статье (штрихпунктирные и пунктирные кривые соответственно); по методу структурных функций I порядка с выбором упругих свойств сопутствующего тела $C_{ijkl}^0 = \langle C_{ijkl} \rangle$ (прерывистые кривые); по методу конечных элементов с использованием аппроксимации элементами квадратичного типа C3D20 (квадратные точки), с равномерным распределением 4 элементов по толщине; по методу Пагано (сплошные линии).

6. Заключение

Данная работа посвящена изучению приближений решения квазистатической задачи теории упругости в трехмерной постановке для неоднородного тела, полученных при помощи метода структурных функций. На примере задачи о нагружении слоистой по толщине, свободно опертой по контуру прямоугольной пластины приведены основные вехи построения приближений решения такой задачи по методу структурных функций первого и второго порядка. Метод предполагает представление решения задачи теории упругости для неоднородного тела в виде ряда по пространственным производным перемещений во вспомогательном – сопутствующем – теле, которое имеет такую же геометрию, подвержено тем же закреплениям и нагрузкам, что и исходное неоднородное тело. Из общих построений метода структурных функций не следуют никакие ограничения на упругие свойства сопутствующего тела (кроме общего термодинамического требования положительной определенности тензора упругих модулей сопутствующего тела); в данной работе построен способ выбора части компонент тензора модулей упругости сопутствующего тела из соображений согласованности с граничными условиями задач и доопределения оставшихся компонент из соображений согласованности с предыдущими результатами, полученными исследователями для случая второй специально-краевой задачи.

Построенные приближения решения описанной задачи численно сопоставлены между собой; с приближением по методу структурных функций, действующим другой способ выбора упругих свойств сопутствующего тела (в виде осредненных по Фойгту свойств исходного тела); с известным аналитическим решением задачи и вариационным решением задачи методом конечных элементов с аппроксимацией функции перемещения по базису кусочно-полиномиальных функций лагранжева 8-узлового (C3D8) и серендипова 20-узлового (C3D20) элемента. В ходе сопоставления результатов решений подтверждено преимущество выбора свойств сопутствующего тела, сформулированного в данной статье (однако дальнейшее построение критериев этого выбора остается открытым вопросом). Отметим, что приближения поперечных напряжений, построенные по методу структурных функций и первого, и второ-

го порядка, удовлетворяют граничным условиям на лицевых плоскостях пластины, однако являются разрывными функциями поперечной координаты, при этом данный разрыв менее выражен для приближения по методу структурных функций второго порядка, что позволяет констатировать целесообразность дальнейшего исследования свойств приближений, получаемых методом более высокого порядка. Сравнение решений рассмотренной задачи, полученных методом структурных функций, с аналитическим и численным решением методом конечных элементов позволяет сделать вывод о физичности (корректности) предложенного подхода метода структурных функций, как способа построения приближённого решения статической (квазистатической) задачи МДТТ, основанного на реализации метода интегральной формулы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбачев В. И. О представлении решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2000. – №. 6. – С. 68-71.
2. Горбачев В. И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных сред // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1991. – Т. 2. – №. 2. – С. 61-76.
3. Горбачев В. И. Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2009. – №. 6. – С. 52-56.
4. Новацкий В. Теория упругости. – 1975.
5. Горбачев В. И. Динамические задачи механики композитов // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2011. – Т. 75. – №. 1. – С. 117-122.
6. Горбачев В. И. О распространении тепла в неоднородном стержне с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2017. – №. 2. – С. 48-54.
7. Горбачев В. И. Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т. 78. – №. 2. – С. 277-299.
8. Горбачев В. И., Емельянов А. Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2014. – №. 1. – С. 95-107.
9. Горбачев В. И., Москаленко О. Б. Устойчивость стержней с переменной жесткостью при сжатии распределенной нагрузкой // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2012. – №. 1. – С. 41-47.
10. Горбачев В. И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов // Вестник Московского государственного технического университета им. НЭ Баумана. Серия «Естественные науки». – 2016. – №. 6 (69). – С. 56-72.
11. Горбачев В. И. Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22. – №. 4. – С. 585-601.

12. Gorbachev V. I. About a Problem of Sturm–Liuvill // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Т. 42. – С. 1829-1836.
13. Gorbachev V. I. About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Т. 40. – С. 969-980.
14. Горбачев В. И. Эффективные определяющие соотношения неупругих композитов // Чебышевский сборник. – 2022. – Т. 23. – №. 3 (84). – С. 194-206.
15. Горбачев В. И. Об эффективных коэффициентах упругости неоднородного тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2018. – №. 4. – С. 115-126.
16. Соляев Ю. О., Горбачев В. И. Сопоставление методов Мори-Танака и Горбачева-Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т. 25. – №. 1. – С. 57-75.
17. Горбачев В. И. Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в механике неоднородных тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №. 3. – С. 114-121.
18. Горбачев В. И., Гулин В. В. Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине, анизотропной полосы // Композиты и наноструктуры. – 2021. – Т. 13, № 3-4. – С. 120–126.
19. Kabanova L. A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Т. 43. – №. 7. – С. 1866-1877.
20. Кабанова Л. А. Метод структурных функций в решении задачи об изгибе линейно-упругой ортотропной свободно опертой на контуре пластины // XIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. – 2023. – С. 885-888.
21. Кабанова Л. А. Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сборник. – 2022. – Т. 23. – №. 4 (85). – С. 211-232.
22. Бахвалов Н. С. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами // Доклады Академии наук. – Российская академия наук, 1975. – Т. 221. – №. 3. – С. 516-519.
23. Бахвалов НС П. Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – 1984.
24. Победря Б. Е., Омаров С. Е. Определяющие соотношения моментной теории упругости // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №. 3. – С. 56-58.
25. Власов А. Н. Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т. 27. – №. 3. – С. 309-322.
26. Pagano N. J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // Journal of composite materials. – 1970. – Т. 4. – №. 1. – С. 20-34.

27. Lezgy-Nazargah M., Salahshuran S. A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate //Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2018. – Т. 18. – №. 3. – С. 818-832.
28. Allam M. N. M., Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. Bending response of inhomogeneous fiber-reinforced viscoelastic sandwich plates //Acta Mechanica. – 2010. – Т. 209. – С. 231-248.
29. Zenkour A. M., El-Mekawy H. F. Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores //Journal of Vibroengineering. – 2014. – Т. 16. – №. 7. – С. 3260-3272.
30. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking //Archives of Computational Methods in Engineering. – 2003. – Т. 10. – С. 215-296.
31. Carrera E. An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates //Composite structures. – 2000. – Т. 50. – №. 2. – С. 183-198.
32. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности //М.: изд-во МГУ. – 1995. – Т. 366. – С. 25.
33. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: Пер. с англ. – мир, 1980.
34. Никабадзе М. У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел //М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ. – 2014.
35. Романов А. В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае трансверсально-изотропной среды //Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2022. – №. 4. – С. 35-39.
36. Романов А. В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости в случае ортотропной среды // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2023. – № 1. – С. 68–72.
37. Романов А. В. О вариационном принципе Лагранжа микрополярной теории упругости при неизотермических процессах //Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2023. – №. 4. – С. 64-68.
38. Романов А. В. Применение метода редуцированного и селективного интегрирования в задачах микрополярной теории упругости //Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2024. – №. 1. – С. 65-69.
39. Победря Б. Е., Георгиевский Д. В. Лекции по теории упругости. – 1999.
40. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: its basis and fundamentals. – Elsevier, 2005.

REFERENCES

1. Gorbachev, V.I. 2000, “O predstavlenii reshenij linejnyh differencial’nyh uravnenij s peremennymi koefficientami”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika.*, no 6, pp. 68–71.

2. Gorbachev, V.I. 1991, “Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevykh zadach teorii uprugosti neodnorodnykh sred”, *Vychislitel'naya mekhanika deformiruemogo tverdogo tela.*, vol. 2, no. 2, pp. 61–76.
3. Gorbachev, V.I. 2009, “Integral'nye formuly v simmetrichnoj i nesimmetrichnoj uprugosti”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika.*, no. 6, pp. 52–56.
4. Nowacki, W. 1975, “Teoria uprugosti.”, *M.: Mir.*
5. Gorbachev, V.I. 2011, “Dinamicheskie zadachi mekhaniki kompozitov”, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya fizicheskaya.*, vol. 75, no. 1, pp. 117–122.
6. Gorbachev, V.I. 2017, “O rasprostranenii tepla v neodnorodnom sterzhne s peremennym poperechnym secheniem”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika.*, no. 2, pp. 48–54.
7. Gorbachev, V.I. 2014. “Integral'nye formuly v svyazannoj zadache termouprugosti neodnorodnogo tela. Primenenie v mekhanike kompozitov”, *Prikladnaya matematika i mekhanika.*, vol. 78, no 2, pp. 277–299.
8. Gorbachev, V.I. Emel'yanov, A., N., 2014. “Osrednenie uravnenij momentnoj teorii uprugosti neodnorodnogo tela”, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.*, no. 1, pp. 95–107.
9. Gorbachev, V.I. Moskalenko, O.B. 2012 “Ustojchivost' sterzhnej s peremennoj zhestkost'yu pri szhatii raspredelennoj nagruzkoy”, *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika.*, no. 1, pp. 41–47.
10. Gorbachev, V.I. 2016, “Inzhenernaya teoriya soprotivleniya neodnorodnykh sterzhnej iz kompozicionnykh materialov”, *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. NE Baumana. Seriya «Estestvennye nauki».*, no. 6 (69), pp. 56–72.
11. Gorbachev, V.I. 2016, “Inzhenernaya teoriya deformirovaniya neodnorodnykh plastin iz kompozicionnykh materialov”, *Mekhanika kompozicionnykh materialov i konstrukcij.*, vol. 22, no. 4, pp. 585–601.
12. Gorbachev, V.I. 2019, “About a Problem of Sturm–Liouville”, *Lobachevskii Journal of Mathematics.*, vol. 42, pp. 1829–1836.
13. Gorbachev, V.I. 2019, “About one approach to a solution of linear differential equations with variable coefficients”, *Lobachevskii Journal of Mathematics.*, vol. 40, pp. 969–980.
14. Gorbachev, V.I. 2022, “Effektivnye opredelyayushchie sootnosheniya neuprugih kompozitov”, *Chebyshevskij sbornik.*, vol. 23, no. 3 (84), pp. 194–206.
15. Gorbachev, V.I. 2018, “Ob effektivnykh koefficientah uprugosti neodnorodnogo tela”, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.*, no. 4, pp. 115–126.
16. Solyaev, Y.O., Gorbachev, V.I. 2019, “Sopostavlenie metodov Mori–Tanaka i Gorbacheva–Pobedri v zadache opredeleniya effektivnykh svoystv kompozitov s p'ezoaktivnymi sfericheskimi vkluchenyami”, *Mekhanika kompozicionnykh materialov i konstrukcij.*, vol. 25, no. 1, pp. 57–75.
17. Gorbachev, V.I. 2020, “Differencial'nye uravneniya s peremennymi koefficientami v mekhanike neodnorodnykh tel”, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela.*, no. 3, pp. 114–121.

18. Gorbachev, V.I., Gulin, V.V. 2021, "Tochnye resheniya nekotoryh zadach teorii uprugosti o ravnovesii neodnorodnoj po shirine, anizotropnoj polosy", *Kompozity i nanostrukтуры.*, vol. 13, no. 3-4, pp. 120–126.
19. Kabanova, L.A. 2022, "The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem", *Lobachevskii Journal of Mathematics.*, vol. 43, no. 7, pp. 1866–1877.
20. Kabanova, L.A. 2023, "Metod strukturnyh funktsij v reshenii zadachi ob izgibe linejno-uprugoj ortotropnoj svobodno opertoj na konture plastiny", *XIII Vserossijskij s"ezd po teoreticheskoy i prikladnoj mekhanike.*, pp. 885–888.
21. Kabanova, L.A. 2022, "Sopostavlenie priblizhenij resheniya zadachi ob izgibe linejno-uprugoj sloistoj plastiny, poluchennyh metodom strukturnyh funktsij", *Chebyshevskij sbornik.*, vol. 23, no. 4 (85), pp. 211–232.
22. Bakhvalov, N.S. 1975, "Osrednenie differentsial'nyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi s bystro oscilliruyushchimi koefitsientami", *Doklady Akademii nauk. – Rossijskaya akademiya nauk*, vol. 221, no. 3. pp. 516–519.
23. Bakhvalov, N.S., Panasenko, G.P. 1984, "Osrednenie processov v periodicheskikh sredah."
24. Pobedrya, B.E., Osmanov, S.E. 2007, "Opredelyayushchie sootnosheniya momentnoj teorii uprugosti", *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika.*, no. 3, pp. 56–58.
25. Vlasov, A.N. 2021, "Svedenie uravneniya teorii uprugosti so sluchajnymi koefitsientami na oblasti s periodicheskoy strukturoj k usrednennomu uravneniyu teorii uprugosti s postoyannymi koefitsientami. effektivnyj tenzor zhestkosti", *Mekhanika kompozitsionnyh materialov i konstrukcij.*, vol. 27, no. 3, pp. 309–322.
26. Pagano, N.J. 1970, "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *Journal of composite materials.*, vol. 4, no. 1, pp. 20–34.
27. Lezgy-Nazargah, M., Salahshuran, S. 2018, "A new mixed-field theory for bending and vibration analysis of multi-layered composite plate", *Archives of Civil and Mechanical Engineering.*, vol. 18, no. 3, pp. 818–832.
28. Allam, M.N.M., Zenkour, A.M., El-Mekawy, H.F. 2010, "Bending response of inhomogeneous fiber-reinforced viscoelastic sandwich plates", *Acta Mechanica.*, vol. 209, pp. 231–248.
29. Zenkour, A.M., El-Mekawy, H.F. 2014, "Bending of inhomogeneous sandwich plates with viscoelastic cores", *Journal of Vibroengineering.*, vol. 16, no. 7, pp. 3260–3272.
30. Carrera, E. 2003, "Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking", *Archives of Computational Methods in Engineering.*, vol. 10, pp. 215–296.
31. Carrera, E. 2000, "An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates", *Composite structures.*, vol. 50, no. 2, pp. 183–198.
32. Pobedrya, B.E. 1995, "Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti: Uch. posobie. 2-e izd.", *M.: Izd-vo MGU.*
33. Ciarlet, P. 1978, "The finite element method for elliptic problems.", *New York. Oxford.*

34. Nikabadze, M.U. 2023, “Razvitie metoda ortogonalnuh polinomov v mehanike micropolyarnuh i klassicheskikh uprugih tonkih tel.” *M.: Izd-vo MGU imeny M. V. Lomonosova*.
35. Romanov, A.V. 2022, “A Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Theory of Elasticity in the Case of Transversely Isotropic Medium.”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, no. 77, pp. 93–98. <https://doi.org/10.3103/S0027133022040045>
36. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange of the Micropolar Elasticity Theory in the Case of Orthotropic Medium.”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, no. 78, pp. 23–28. <https://doi.org/10.3103/S0027133023010041>
37. Romanov, A.V. 2023, “On the Variational Principle of Lagrange in the Micropolar Theory of Elasticity at Nonisothermal Processes.”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, no. 78, pp. 114–118. <https://doi.org/10.3103/S0027133023040052>
38. Romanov, A.V. 2024, “Reduced and selective integration method for micropolar theory of elasticity.”, *Moscow Univ. Mech. Bull.*, no. 79, pp. 65–69. <https://dx.doi.org/10.55959/MSU0579-9368-1-65-1-8>
39. Pobedrya, B.E., Georgievsky, D.V. 2018, “Lekcii po teorii uprugosti”, *M.: Lenland*, pp. 208.
40. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. 2013, “The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed.”, *Oxford: Butterworth-Heinemann*.

Получено: 20.05.2024

Принято в печать: 24.12.2024