ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-138-146

О приведённых алгебраических иррациональностях[1]

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В 2013–2015 гг. было показано, что для любой чисто-вещественной алгебраической иррациональности α, начиная с некоторого места, все остаточные дроби в разложении α в цепную дробь будут приведёнными алгебраическими иррациональностями.

В работе построены примеры чисто-вещественных алгебраических иррациональностей α, для которых это номер остаточной дроби может быть сколь угодно большим.

Ключевые слова: чисто-вещественная алгебраическая иррациональность, приведённая алгебраическая иррациональность.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
Добровольский, Н.Н., Добровольский, Н.М. О приведённых алгебраических иррациональностях // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 138–146.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 4.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-138-146

On the number of points of an incomplete lattice in rectangular regions[2]

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ соглашение №073-03-2023-303/2 от 14.02.23 г. тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике»

[2]The study was carried out within the framework of state task No. 073-03-2022-117/7 on the topic "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

Abstract

In 2013–2015 it was shown that for any purely real algebraic irrationality α, starting from some place, all residual fractions in the expansion of α into a continued fraction will appear to be the reduced algebraic irrationalities.

We construct the examples of purely real algebraic irrationalities α for which this number of the residual fraction is arbitrarily large.

Keywords: purely real algebraic irrationality, reduced algebraic irrationality.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
Dobrovol'skii, N.N.,Dobrovol'skii, N.M. 2024, "On reduced algebraic irrationalities" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 138–146.

1. Введение

В работе [3] было дано определение приведённой алгебраической иррациональности и доказана следующая теорема:

Определение 1. *Пусть*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathbb{Z}[x],\quad a_n>0$$

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$-1<\alpha^{(n)}<\ldots<\alpha^{(2)}<0,\quad \alpha^{(1)}>1,$$

тогда алгебраическое число $\alpha=\alpha^{(1)}$ *называется приведенной алгебраической иррациональностью степени* n.

Теорема 1. *Для произвольной чисто-вещественной алгебраической иррациональности* α *степени* n *все её остаточные дроби* α_m*, начиная с некоторого номера* m_0+1*, являются приведенными алгебраическими иррациональностями степени* n.

Возникает естественный вопрос о величине m_0. Цель данной работы — дать ответ о возможной величине m_0.

2. Необходимые факты и сведения

Приведём необходимые обозначения, факты и сведения из работы [7].

Пусть Λ — произвольная решетка с базисом $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_s$ в $\mathbb{R}^s$. Через $P(\Lambda)$ будем обозначать множество

$$P(\Lambda)=\left\{\vec{x}=\frac{1}{n}\vec{y}\,\middle|\,\vec{y}\in\Lambda,n\in\mathbb{N}\right\}$$

— рациональное $s-$мерное векторное пространство над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Множество* $P(\Lambda)$ *всюду плотно в* $\mathbb{R}^s$.

Доказательство. См. [7]. □.

Пусть $s > 1$ и F_s — чисто вещественное алгебраическое поле степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Таким образом, имеется s изоморфных вещественных полей $F_s = F_s^{(1)} = \mathbb{Q}(\theta^{(1)}),\ldots,F_s^{(s)} = \mathbb{Q}(\theta^{(s)})$, где примитивные элементы $\theta^{(1)},\ldots,\theta^{(s)}$ — алгебраические сопряженные числа.

Рассмотрим s изоморфных колец целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{F_s^{(1)}}, \ldots, \mathbb{Z}_{F_s^{(s)}}$ и максимальную решетку, повторяющуюся умножением,

$$\Lambda\left(F_s\right) = \left\{ \left(\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}\right) \middle| \, \Theta^{(j)} \in \mathbb{Z}_{F_s^{(j)}} \left(j = 1, \ldots, s\right) \right\}.^3$$

Таким образом, согласно теореме 2 рациональное векторное пространство $P\left(\Lambda\left(F_s\right)\right)$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ будет всюду плотно в $\mathbb{R}^s$. Отсюда, пользуясь достаточным условием подходящей дроби[4], можно доказать следующую теорему о сопряженных числах с заданной системой подходящих дробей.

Теорема 3. *Пусть $\frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_s}{Q_s}$ — произвольная система несократимых дробей, тогда найдется алгебраическое число α из чисто вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ такое, что для любого $j = 1, \ldots, s$ дробь $\frac{P_j}{Q_j}$ будет подходящей дробью к алгебраически сопряженому числу $\alpha^{(j)} \in F_s^{(j)}$.*

Доказательство. Положим $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant s} \frac{1}{2Q_j^2}$, тогда по теореме 2 найдется алгебраическое число $\alpha \in F_s$ такое, что для точки $\left(\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}\right) \in P\left(\Lambda\left(F_s\right)\right)$ будут выполняться неравенства

$$\left|\alpha^{(j)} - \frac{P_j}{Q_j}\right| < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2Q_j^2} \quad (j = 1, \ldots, s),$$

что доказывает утверждение теоремы в силу указанного выше достаточного условия подходящей дроби. □

Теперь приведём необходимые обозначения, факты и сведения из работы [3].

Лемма 1. *Для произвольной приведенной алгебраической иррациональности α степени n её остаточная дробь α_1 также является приведенной алгебраической иррациональностью степени n, удовлетворяющей неприводимому многочлену*

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_{n,1} > 0,$$

где

$$a_{k,1} = \frac{b_k}{d}, \quad d = (b_0, \ldots, b_n), \quad b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q_0^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Доказательство. См. [3]. □

Для полноты изложения приведём доказательство следующей леммы, которое фактически было опущено в работе [3].

Лемма 2. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0$$

[3]Здесь и далее через $\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}$ обозначаются алгебраически сопряженные числа.

[4]См. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. стр. 43, теорема 19.

— произвольный целочисленный неприводимый многочлен, у которого все корни $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *— различные вещественные числа, удовлетворяющие условию*

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)},$$

и для целого q *справедливы неравенства*

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} < q & \text{при } k \geqslant k_0, \\ q < \alpha^{(k)} < q+1 & \text{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ \alpha^{(k)} > q+1 & \text{при } k_1 > k \geqslant 1, \end{cases}$$

тогда многочлен

$$g(x) = -f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

имеет корни $\beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *удовлетворяющие неравенствам*

$$\begin{cases} \beta^{(k)} < 0 & \text{при } k \geqslant k_0, \\ 1 < \beta^{(k)} & \text{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ 0 < \beta^{(k)} < 1 & \text{при } k_1 > k \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$g(x) = -f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

Так как $\alpha^{(k)} = q + \frac{1}{\beta^{(k)}}$, то $g\left(\beta^{(k)}\right) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Справедливы равенства

$$f\left(q + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}(qx+1)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \sum_{m=0}^{k} C_k^m q^m x^m =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{m=n-k}^{n} C_k^{m+k-n} q^{m+k-n} x^m = \sum_{k=0}^{n} x^k \sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q^{m+k-n},$$

поэтому

$$b_k = -\sum_{m=n-k}^{n} a_m C_m^{m+k-n} q^{m+k-n}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

и $b_n = -f(q)$. Так как $q < \alpha$, $f(\alpha) = 0$, $a_n > 0$ и α — единственный положительный корень многочлена $f(x)$, то $f(q_0) < 0$ и, следовательно, $b_n > 0$.

Поэтому, разделив многочлен $g(x)$ на наибольший общий делитель его коэффициентов, получим неприводимый многочлен $f_1(x)$.

Далее заметим, что корням $\alpha^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $f(x)$ соответствуют корни $\beta^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ многочлена $g(x)$, которые связаны равенствами

$$\alpha^{(k)} = q + \frac{1}{\beta^{(k)}}, \quad \beta^{(k)} = \frac{1}{\alpha^{(k)} - q} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} \beta^{(k)} < 0 & \text{при } k \geqslant k_0, \\ 1 < \beta^{(k)} & \text{при } k_0 > k \geqslant k_1, \\ 0 < \beta^{(k)} < 1 & \text{при } k_1 > k \geqslant 1. \end{cases}$$

Лемма полностью доказана. □

Доказательство теоремы 1. Действительно, пусть $\alpha = \alpha^{(j)}$ и

$$\alpha^{(n)} < \ldots < \alpha^{(2)} < \alpha^{(1)}$$

— вещественные корни целочисленного неприводимого многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x], \quad a_n > 0.$$

Пусть $q_0 = [\alpha]$, $k_{0,0} = k_0$ и $k_{1,0} = k_1$ определены как и в лемме 2 при $q = q_0$, тогда $k_{0,0} > j \geqslant k_{1,0}$ и многочлен

$$f_1(x) = -f\left(q_0 + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_1^{(n)} < \ldots < \alpha_1^{(2)} < \alpha_1^{(1)},$$

среди которых $n+1-k_{0,0}$ отрицательных корней, $k_{1,0}-1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,0}-k_{1,0}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_1 = \alpha_1^{(j_1)}$ и $k_{0,0} - k_{1,0} \geqslant j_1 \geqslant 1$.

Пусть уже определен целочисленный многочлен $f_m(x)$ для остаточной дроби $\alpha_m = \alpha_m^{(j_m)}$, тогда, полагая $q = q_m = [\alpha_m]$, $k_{0,m} = k_0$ и $k_{1,m} = k_1$ определены как и в лемме 2, тогда $k_{0,m} > j_m \geqslant k_{1,m}$ и многочлен

$$f_{m+1}(x) = -f_m\left(q_m + \frac{1}{x}\right) \cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,m+1} x^k$$

имеет корни

$$\alpha_{m+1}^{(n)} < \ldots < \alpha_{m+1}^{(2)} < \alpha_{m+1}^{(1)},$$

среди которых $n + 1 - k_{0,m}$ отрицательных корней, $k_{1,m} - 1$ положительных, меньше 1 и $k_{0,m} - k_{1,m}$ положительных корней больше 1.

Заметим, что остаточная дробь $\alpha_{m+1} = \alpha_{m+1}^{(j_{m+1})}$ и $k_{0,m} - k_{1,m} \geqslant j_{m+1} \geqslant 1$.

Из доказательства леммы 2 следует, что $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_m \geqslant \ldots$; $k_{0,1} \geqslant k_{0,2} = = k_{0,1} - k_{1,0} + 1 \geqslant \ldots \geqslant k_{0,m} = k_{0,m-1} - k_{1,m-1} + 1 \geqslant \ldots$.

Величины $k_{0,m}$, $k_{1,m}$ имеют простой смысл — числа $\alpha_m^{(\nu)}$ при $k_{0,m} > \nu \geqslant k_{1,m}$ являются $m-$ыми остаточными дробями для чисел $\alpha^{(\nu+j-j_m)}$. Так как из однозначности разложения числа в цепную дробь следует, что найдется m_0 такое, что неполные частные q_k при $0 \leqslant k < m_0 - 1$ одинаковые для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, $k_2 \geqslant j \geqslant k_3$ и неполное частное q_{m_0-1} для числа $\alpha = \alpha^{(j)}$ отлично от соответствующих неполных частных для чисел $\alpha^{(\nu)}$ при $k_2 \geqslant \nu \geqslant k_3$, то $k_{0,m_0-1} = k_{1,m_0-1} + 1$, $k_{0,m_0} = 2$, $k_{1,m_0} = 1$. Отсюда следует, что $\alpha_{m_0+1} = \alpha_{m_0+1}^{(1)}$ является приведенной алгебраической иррациональностью. □

3. Пример чисто-вещественного алгебраического числа с большим номером первой остаточной дроби, которая является приведённой алгебраической рациональностью

Теперь перейдём к построению примера чисто-вещественного алгебраического числа α степени $s > 1$, для которого остаточная дробь α_m будет приведённой алгебраической рациональностью для всех $m > m_0$, где m_0 произвольное большое натуральное число.

Будем использовать, как обычно, скобки Эйлера $[q_1,\dots,q_n]_{(n)}$, которые задаются рекуррентно:

$$[\,]_{(-1)}=0,\quad [\,]_{(0)}=1, [q_1,\dots,q_n]_{(n)}=q_n[q_1,\dots,q_{n-1}]_{(n-1)}+[q_1,\dots,q_{n-2}]_{(n-2)}\quad (n\geqslant 1).$$

Как хорошо известно, конечная цепная дробь выражается через скобки Эйлера:

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}=\frac{[q_0,\dots,q_n]_{(n+1)}}{[q_1,\dots,q_n]_{(n)}}.$$

Для определенности будем считать m_0 нечетным натуральным числом и пусть $q>1$ — произвольное натуральное число. Рассмотрим две несократимые дроби:

$$\frac{P}{Q}=\frac{[q,\dots,q]_{(m_0+1)}}{[q,\dots,q]_{(m_0)}},\quad \frac{P'}{Q'}=\frac{[q,\dots,q,q+1]_{(m_0+1)}}{[q,\dots,q,q+1]_{(m_0)}}.$$

Так как m_0 нечетное натуральное число, то справедливы неравенства $q+1>\frac{P}{Q}>\frac{P'}{Q'}>q$.

Положим в теореме 3 $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{P}{Q}$, $\frac{P_2}{Q_2}=\ldots=\frac{P_s}{Q_s}=\frac{P'}{Q'}$. Тогда по теореме 3 найдётся алгебраическое число α из чисто вещественного алгебраического поля F_s степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ такое, что дробь $\frac{P}{Q}$ будет подходящей дробью к числу $\alpha=\alpha^{(1)}$, а дробь $\frac{P'}{Q'}$ — к алгебраически сопряжённым числам $\alpha^{(2)},\dots,\alpha^{(s)}$.

Рассмотрим цепные дроби для алгебраически сопряженных чисел $\alpha=\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\dots,\alpha^{(s)}$:

$$\alpha=\alpha^{(1)}=q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q_1^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}},$$

$$\alpha^{(j)}=q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q+1+\cfrac{1}{q_1^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}},\quad (j=2,\dots,s).$$

Будем через $\alpha_m=\alpha_m^{(1)}$ обозначать m-ную остаточную дробь к числу α, а через $\alpha_m^{(j)}$ $(j=2,\dots,s)$ её алгебраически сопряженные числа.

Нетрудно видеть, что в силу леммы 2 справедливы равенства:

$$\alpha_{m_0}=\alpha_{m_0}^{(1)}=q+\cfrac{1}{q_1^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots}}}},$$

$$\alpha_{m_0}^{(j)}=q+1+\cfrac{1}{q_1^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots}}}},\quad (j=2,\ldots,s).$$

Снова применяя лемму 2, получим

$$\alpha_{m_0+1}=\alpha_{m_0+1}^{(1)}=q_1^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(1)}+\cfrac{1}{\ddots}}},$$

$$\alpha_{m_0+1}^{(j)}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{q_1^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k^{(j)}+\cfrac{1}{\ddots}}}}},\quad (j=2,\ldots,s).$$

Таким образом, имеем:

$$\alpha_{m_0+1}>q_1^{(1)},\quad 0<\alpha_{m_0+1}^{(j)}<1,\quad (j=2,\ldots,s).$$

Отсюда, снова по лемме 2, получим при $q_1^{(1)}>1$

$$\alpha_{m_0+2}>q_2^{(1)}\geqslant 1,\quad -1<\alpha_{m_0+2}^{(j)}=\frac{1}{\alpha_{m_0+1}-q_1^{(1)}}<0,\quad (j=2,\ldots,s).$$

и при $q_1^{(1)}=1$

$$\alpha_{m_0+2}>q_2^{(1)}\geqslant 1,\quad \alpha_{m_0+2}^{(j)}=\frac{1}{\alpha_{m_0+1}-1}<-1,\quad (j=2,\ldots,s).$$

В этом последнем случае уже для следующей остаточной дроби имеем:

$$\alpha_{m_0+3}>q_3^{(1)}\geqslant 1,\quad -1<\alpha_{m_0+3}^{(j)}=\frac{1}{\alpha_{m_0+2}-q_2^{(1)}}<0,\quad (j=2,\ldots,s).$$

Подводя итог, делаем заключение, что либо остаточная дробь α_{m_0+2}, либо α_{m_0+3} являются приведенной иррациональностью. А следовательно, это утверждение выполняется для любого $m\geqslant m_0+3$.

Замечание 1. *Построенный пример с помощью леммы 2 легко обобщить на более общий случай.*

Во-первых, заметим, что если выполнены неравенства $-1 < \alpha_m^{(j)} < 0$*, то для любого* $n > m$ *будет выполнено* $-1 < \alpha_n^{(j)} < 0$.

Во-вторых, если выполнено неравенство $\alpha_m^{(j)} > \alpha_1^{(j)}$*, то для любого* $n > m+2$ *будет выполнено* $-1 < \alpha_n^{(j)} < 0$*. В-третьих, если выполнено неравенство* $\alpha_m^{(j)} < \alpha_1^{(j)}$*, то для любого* $n > m+1$ *будет выполнено* $-1 < \alpha_n^{(j)} < 0$.

Отсюда следует, что если для чисто-вещественной алгебраической иррациональности α *имеется ровно* $k > 1$ *алгебраически сопряженных иррациональностей (считая и* α*), для которых подходящие дроби совпадают до номера* m_0*, то можно гарантировать, что остаточная дробь* α_{m_0+3} *будет приведенной алгебраической иррациональностью.*

Замечание 2. *Если для чисто-вещественной алгебраической иррациональности* α *имеется ровно* $k > 1$ *алгебраически сопряженных иррациональностей (считая и* α*), для которых подходящие дроби совпадают до номера* m_0*, то остаточная дробь* α_{m_0+1} *не является приведённой алгебраической иррациональностью, так как не выполнено условие, что все алгебраическо-сопряженные иррациональности будут лежать на интервале* $(-1; 0)$.

4. Заключение

На наш взгляд перспективно продолжить исследования по классификации чисто-вещественных алгебраических иррациональностей в свете работы [2].

Ю. В. Матиясевич при обсуждении данной тематики обратил наше внимание на необходимость «построить неэффективизирумое чисто диофантово уравнение». Он считает, что «результаты Н.Н.[5] легко могут быть выражены на языке диофантовых уравнений. Если бы с их помощью удалось построить диофантово уравнение с конечным числом решений, но не ограниченных никакой степенью параметра, это было бы замечательно. В качестве кандидата на это можно рассмотреть уравнение, задающее непериодическую часть.» Подробности о проблеме неэффективизируемости см. [4]–[6]. В настоящее время мы не знаем как реализовать его программу исследований.

5. Благодарности

Авторы выражают огромную благодарность академику РАН Юрию Владимировичу Матиясевичу, который поставил перед нами вопросы, ответы на которые мы попытались дать в этой работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский, Н.М., Добровольский, Н.Н. О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 147–182.

2. Добровольский, Н.М., Добровольский, Н.Н., Соболев, Д.К., Соболева, В.Н. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

[5] См. [1].

3. Добровольский, Н.М., Соболев, Д.К., Соболева, В.Н. О матричном разложении приведенной кубической иррациональности // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 34–55.

4. Матиясевич, Ю.В. Существование неэффективизируемых оценок в теории экспоненциально диофантовых уравнений // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 40 (1974). 77–93.

5. Матиясевич, Ю.В. Десятая проблема Гильберта // М.: Наука. Физматлит. 1993.

6. Матиясевич, Ю.В. Что можно и что невозможно делать с диофантовыми проблемами // Труды МИАН. 275 (2011). 128–143.

7. Триколич, Е.В., Юшина, Е.И. Цепные дроби для квадратических иррациональностей из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ // Чебышевский сборник. 2009. Т. 10, вып. 1. С. 77–94.

8. Хинчин, А.Я. Цепные дроби // М.; Л.: Гостехиздат. 1949.

REFERENCES

1. Dobrovol'skii, N.M. & Dobrovol'skii, N.N. 2015, "About minimal polynomial residual fractions for algebraic irrationalities", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 3(55), pp. 147–182. (Russian)

2. Dobrovol'skii, N.M., Dobrovol'skii, N.N., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2017, "Classification of pure-real algebraic irrationalities", *Chebyshevskij sbornik*, vol. 18, no. 2, pp. 98–128.

3. Dobrovol'skii, N.M., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2013, "On a matrix decomposition of the reduced cubic irrational", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, no. 1, pp. 34–55.

4. Matiyasevich, Yu.V. 1974, "Existence of non-effectivizable estimates in the theory of exponentially Diophantine equations", *Zap. scientific. sem. LOMI, 40*, pp. 77–93.

5. Matiyasevich, Yu.V., 1993, "Hilbert's tenth problem", *M.: Science, Fizmatlit.*

6. Matiyasevich, Yu.V., 2011, "What can and cannot be done with Diophantine problems", *Proc. Steklov Inst. Math., 275*, pp. 118–132.

7. Trikolich, E. V. & Yushina, E. I. 2009, "Continued fractions for quadratic irrationalities from the field $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$", *Chebyshevskii Sbornik.*, vol. 10, no. 1(29), pp. 77–94. (Russian)

8. Khinchin A. Y., 1949, "Continued fractions", *M.; L.: Gostekhizdat.*

Получено: 15.05.2024
Принято в печать: 24.12.2024