ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-154-157

Об одном вопросе о множестве рациональных чисел, определяемых частными двух подмножеств

Ю. Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (г. Москва).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В настоящей статье мы задаемся целью вывести количественную версию одной задачи о размере множества дробей A/A в случае, когда A — заданное конечное множество натуральных чисел лежащее в интервале $[1, n]$, имеющее положительную асимптотическую плотность $\alpha > 0$ при $n \to \infty$.

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Штейников, Ю.Н. Об одном вопросе о множестве рациональных чисел определяемых частными двух подмножеств // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 154–157.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 4.

UDC 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-154-157

About one question about the set of rational numbers determined by the quotients of two subsets

Yu. N. Shteinikov

Shteinikov Yurii Nikolaevich — Scientific Research Institute of System Analysis (Moscow).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

In this paper, we aim to derive a quantitative version of a problem on the size of a set of fractions A/A, in the case where A is a given finite set of natural numbers lying in the interval $[1, n]$, having positive asymptotic density $\alpha > 0$ as $n \to \infty$.

Keywords: integer numbers, density, product.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Shteinikov, Yu.N. 2024, “About one question about the set of rational numbers determined by the quotients of two subsets” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 154–157.

1. Введение

В работе Х.Силлеруело с соавторами [1] был поставлен следующий вопрос:

Пусть $A \subseteq \{1, ..., n\}$ *и* $|A/A| \sim |A|^2, n \to \infty$. *Следует ли отсюда, что* $|A| = o(n), n \to \infty$?

В данной статье мы приводим положительный ответ и приводим количественную версию соответствующего утверждения. В следующем разделе мы проводим соответствующее доказательство и вычисление оценок.

2. Доказательство

Достаточно доказать справедливость следующего эквивалентного утверждения.

Предложение 1.

Предположим $\delta > 0$ *и* $|A| = \alpha n, \alpha \geq \delta$, *тогда*

$$|A/A| \leq (1 - c(\delta))|A|^2, n \to \infty,$$

где $c(.) > 0-$ *некоторая положительная функция.*

Также нужно дать явную оценку на функцию $c()$ и этого будет достаточно для завершения доказательства. Доказательство.

Всюду через p будем обозначать простое число. Зададим P как минимальное вещественное, что выполнено

$$\prod_{p \leq P} (1 - \frac{1}{p}) \leq \alpha/3.$$

Теперь разложим каждое натуральное на гладкую и негладкую части, а именно $a = bd$, согласно условиям:

1) $p|b \Longrightarrow p \leq P$,

2) $p|d \Longrightarrow p > P$.

Стандартным образом вводим $P^+(n)$ и $P^-(n)$, которые обозначают максимальный и минимальный простые делители n. И пусть

$$B = \{n \in \mathbb{N} : P^+(n) \leq P\}, D = \{n \in \mathbb{N} : P^-(n) > P\}.$$

Из оценок на решето и принципа включений-исключений и большого n, мы получаем

$$|D \bigcap [1, n]| \leq \frac{\alpha}{2} n.$$

Поскольку

$$\sum_{b \in B} \frac{1}{b} < \infty,$$

то такое $M = M(\delta)$, и

$$\sum_{b \in B, b > M} \frac{1}{b} \leq \frac{\alpha}{3}.$$

Введем по определению

$$A' = \{a \in A : a = bd, b > M\}.$$

Благодаря несложным выкладкам получаем $|A'| \leq \frac{\alpha}{3} n$.

Пусть по определению $A'' = A \setminus A'$.

Поскольку

1) $|A''| > \frac{2}{3} \alpha n$;

2)$|D \bigcap [1, n]| \leq \frac{\alpha}{2} n$;

3) размер набора из b таких что $b \in B, b < M$ конечен.

Из принципа включений-исключений следует, что найдется пара $(b_1 \neq b_2)$ $b_1, b_2 < M, b_1, b_2 \in \in B$ и подмножество $D' \subseteq D$ с $|D'| \gg_\delta n$ что для произвольного $d \in D'$ выполнено

$$b_1 d, b_2 d \in A''. \tag{1}$$

Действительно , пусть при $b \in B$ подмножество D_b определяется как $D_b = \{d : d \in D, bd \in \in A''\}$. Так как

$$|\bigcup_{b \in B, b \le M} D_b| \le \frac{\alpha}{2} n,$$

поэтому по указанному принципу включений исключений

$$\sum_{b \in B, b \le M} |D_b| - \sum_{b \neq b'; b, b' \in B; b, b' \le M} |D_b \cap D_{b'}| \le \frac{\alpha}{2} n.$$

Поскольку $\sum_{b \in B, b \le M} |D_b| = |A''| \ge \frac{2\alpha}{3} n$, и значит

$$\sum_{b \neq b'; b, b' \in B; b, b' \le M} |D_b \cap D_{b'}| \gg_\delta n.$$

Остается заметить, что число слагаемых в последней сумме есть $O(C_\delta)$ и применить принцип Дирихле.

Поэтому если

$$A_1 = \{b_1 d, d \in D'\}; A_2 = \{b_2 d, d \in D'\},$$

Ранее было показано, что

$$|A_1|, |A_2| \gg_\delta n.$$

Но как легко видеть

$$A_1/A_1 = A_2/A_2 = D'/D',$$

поэтому имеется понижение на общий размер множества A/A. В заключение отметим, что все функции допускают явные оценки, поэтому можно вывести отсюда и эффективную версию предложения 1. $\square$

3. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [2], [3], [4], [5], [6], [7] и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований, проект FNEF-2024-0001.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Силлеруело, Х, Рамана, Д.С., Рамаре, О. Частные и произведения подмножеств нулевой плотности множества натуральных чисел // Труды МИАН.- 2017.- Т.296.- С. 58–71 .

2. Штейников, Ю.Н. Множества с экстремальным свойством произведения и его вариации // Матем. заметки.- 2023.- 114:6.- С. 922–930.

3. Erdős, Paul. An asymptotic inequality in the theory of numbers // Vestnik Leningrad. Univ.- 15:13.- pp. 41–49.

4. Ford, Kevin . The distribution of integers with a divisor in a given interval // Annals of Mathematics. Second Series.- 168: 2.- pp. 367–433.

5. Hall, R.R., Tenenbaum G. Divisors // Cambridge Tracts Math..- 1988.- 90.- Cambridge Univ. Press, Cambridge.

6. Shteinikov, Yu., On the product sets of rational numbers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.- 2017.- Vol. 296.- Issue 1.- pp. 243–250.

7. Cilleruelo, J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory.- 2016.- Vol. 12.- N. 05.- pp. 1415–1420.

REFERENCES

1. Cilleruelo, J., Ramana, D.S., Ramare, O. "Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, no. 1, pp. 52–64.

2. Shteinikov, Yu.N. 2023, "Sets with Extremal Product Property and Its Variations", *Mathematical Notes*, vol. 114, no. 6, pp. 1357-–1364.

3. Erdős, Paul. "An asymptotic inequality in the theory of numbers",, *Vestnik Leningrad. Univ.* vol.15, no. 13, pp. 41—49.

4. Ford K. "The distribution of integers with a divisor in a given interval",, *Annals of Mathematics. Second Series.* vol.168, no. 2, pp. 367-–433.

5. Hall R.R., Tenenbaum G. 1988, "Divisors", *Cambridge Tracts Math.,* 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

6. Shteinikov Yu. 2017, "On the product sets of rational numbers", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* vol. 296, no. 1, pp. 243–250.

7. Cilleruelo J. 2016, "A note on product sets of rationals",, *International Journal of Number Theory*, Vol. 12, no. 05, pp. 1415–1420.

Получено: 09.07.2024
Принято в печать: 24.12.2024