

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-147-153

Об одном классе периодических элементов гиперэллиптических полей, определяемых многочленами нечетной степени<sup>1</sup>

М. М. Петрунин

**Петрунин Максим Максимович** — кандидат физико-математических наук, Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (Москва).

*e-mail:* [petrushkin@yandex.ru](mailto:petrushkin@yandex.ru)

## Аннотация

В случае произвольной нечетной степени многочлена  $f$  над произвольным полем алгебраических чисел  $K$  был получен класс всегда квазипериодических в  $\mathbb{K}((x))$  элементов  $\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$  для  $v, w, u \in \mathbb{K}[x]$  гиперэллиптического поля  $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$ , задаваемый только соотношениями на многочлены  $u, v, w, f$  и их степени. Этот класс не пуст при наличии в гиперэллиптическом поле хотя бы одного квазипериодического элемента. В классе был выделен подкласс заведомо периодических элементов.

**Ключевые слова:** гиперэллиптическое поле, непрерывные дроби, функциональные непрерывные дроби,  $S$ -единицы, периодичность, квазипериодичность.

**Библиография:** 12 названий.

## Для цитирования:

Петрунин, М. М. Об одном классе периодических элементов гиперэллиптических полей, определяемых многочленами нечетной степени // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 147–153.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 511.6

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-147-153

## On a class of periodic elements in hyperelliptic fields defined by polynomials of odd degree

M. M. Petrunin

**Petrinin Maxim Maximovich** — candidate of physical and mathematical sciences, Scientific Research Institute of System Analysis (Moscow).

*e-mail:* [petruhskin@niisi.ras.ru](mailto:petruhskin@niisi.ras.ru)

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований проект FNEF-2024-0001

### Abstract

For an arbitrary odd-degree polynomial  $f$  over an arbitrary field of algebraic numbers  $\mathbb{K}$ , the class of always quasiperiodic elements in  $\mathbb{K}((x))$  of the form  $\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$ , where  $v, w, u \in \mathbb{K}[x]$ , in the hyperelliptic field  $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$ , has been determined. This class is characterized by certain relationships involving the polynomials  $u, v, w$ , and  $f$ , as well as their degrees. The class is guaranteed to be nonempty if at least one quasiperiodic element exists in the hyperelliptic field. Furthermore, a specific subclass of always periodic elements has been identified within this broader class.

**Keywords:** hyperelliptic field, continued fractions, functional continued fractions,  $S$ -units, periodicity, quasiperiodicity, pseudoperiodicity.

**Bibliography:** 12 titles.

### For citation:

Petrudin, M. M. 2024, "On a class of periodic elements in hyperelliptic fields defined by polynomials of odd degree", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 147–153.

## 1. Введение

Исследование проблемы периодичности функциональных непрерывных дробей в гиперэллиптических полях было начато в работах Абеля [1] и Чебышёва [2]. В XX и XXI веках классические результаты получили современное изложение, и для гиперэллиптических полей, заданных многочленами чётной степени, была развита теория функциональных непрерывных дробей в  $\mathbb{K}((1/x))$  (см. например, [3], [4], [5], [6]). Основы для изучения непрерывных дробей в  $\mathbb{K}((x))$  были заложены в работе [7], в которой впервые глубокие результаты по проблеме периодичности функциональных непрерывных дробей были получены для гиперэллиптических полей, определяемых многочленами нечётной степени. Дальнейшее развитие этот случай получил в [8, 9, 10, 11], где, в частности, были получены результаты, связанные с элементом  $\sqrt{f}$ . В [9] было доказано, что квазипериодичность (то есть периодичность с точностью до константы) элементов вида  $\frac{\sqrt{f}}{dx^s}$ , где  $d$  — делитель  $f$ , влечёт периодичность. В [10] было получено полное описание периодических  $\sqrt{f}$  для кубических многочленов  $f$  над полем рациональных чисел. А в [11] для кубических многочленов  $f$  над полем рациональных чисел было получено полное описание квазипериодических и периодических элементов вида  $v + w\sqrt{f}$ , где  $v, w \in \mathbb{Q}[x]$ . В случае нетривиального знаменателя  $u$  проблема описания элементов  $\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$  остается открытой даже для кубических многочленов  $f$  над полем рациональных чисел. В связи с этим В. П. Платоновым был поставлен вопрос об описании классов периодических и квазипериодических элементов более общего вида. Для произвольного поля алгебраических чисел  $\mathbb{K}$  и многочлена  $f \in \mathbb{K}[x]$  степени  $2g + 1$  при наличии квазипериодических в  $\mathbb{K}((x))$  элементов в гиперэллиптическом поле  $L = \mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$  периодичны элементы  $\sqrt{f}/x^g, \sqrt{f}/x^{g+1}$  (см. например, [10]). Оказывается, существует класс всегда квазипериодических элементов, содержащий  $\sqrt{f}/x^g, \sqrt{f}/x^{g+1}$ . В настоящей работе для поля  $L$ , содержащего хотя бы один квазипериодический элемент, был получен такой класс квазипериодических элементов  $\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$ , задаваемый только соотношениями на многочлены  $u, v, w, f$  и их степени. Более того, в этом классе был выделен подкласс периодических элементов и построен пример квазипериодического, но не периодического элемента выделенного класса. В случае  $\mathbb{K}((1/x))$  для  $\deg f = 2g + 2$  квазипериодичность подобного класса элементов была получена в работе [12] с рассмотрением последовательности дивизоров нулей и полюсов полных частных разложения в непрерывную дробь квадратичной иррациональности. Нами получено альтернативное компактное доказательство аналогичного результата для  $\mathbb{K}((x))$ , а также впервые выделен подкласс периодических элементов.

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $f \in \mathbb{K}[x]$  — бесквадратный многочлен степени  $2g + 1$ . Если в поле  $L = \mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$ , есть квазипериодические в  $\mathbb{K}((x))$  элементы, то квазипериодичны элементы  $\alpha$ , представимые в виде несократимой дроби  $\alpha = \frac{v+x^i\sqrt{f}}{x^j r}$ ,  $r|v^2 - x^{2i}f$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\deg v \leq \sigma + i$ ,  $\deg r = \sigma + i - j$ ,  $j - i \leq \sigma$ , где  $\sigma = g$  или  $\sigma = g + 1$ . Более того, если  $v = 0$ ,  $x \nmid r$  и  $\deg r \neq \sigma$ , или  $r \in \mathbb{K}$  или  $x^{t+j}r = v^2 - x^{2i}f$ , то такие элементы периодичны. В последнем случае  $t = i + g$  или  $t = i + g + 1$ , и или  $i = 0$  или  $j = 0$ .

Отметим, что если элементы этого класса содержат в разложении многочлена  $v^2 - x^{2i}f$  множители отличные от  $r$  или степени  $x$ , то они могут быть квазипериодичны, но не периодичны.

**ПРИМЕР.** Пусть  $\alpha = \frac{v+\sqrt{f}}{xr}$ , где  $f = (4x + 17)(x - 4)(x - 68)$ ,  $v = 6(2x + 7)x$ , а  $r = x + 4$ . Тогда  $v^2 - f = (144x^3 + 428x^2 + 323x - 1156)(x + 4)$ . В этом случае  $\alpha$  обладает квазипериодическим, но не периодическим разложением в непрерывную дробь:

$$\alpha = [6 + 17x^{-1}, \overline{1/4 + x^{-1}, -36 + 136x^{-1}}^{1/4}],$$

где верхней чертой выделен квазипериод длины 2, а коэффициент квазипериодичности равен  $1/4$ .

## 2. Необходимые определения и факты

Напомним необходимые для дальнейшего изложения понятия и утверждения. Пусть  $f \in \mathbb{K}[x]$  — бесквадратный многочлен,  $\deg f = 2g + 1$ . Здесь и далее предполагаем, что  $f(0) = a^2$  для  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . В этом случае элемент  $\sqrt{f}$  разлагается в степенной ряд  $\sqrt{f} = \sum_{j \geq 0} g_j x^j$ , где  $g_j \in \mathbb{K}$ , что позволяет построить вложение  $L$  в поле формальных степенных рядов  $\mathbb{K}((x))$ , что в свою очередь позволяет представить произвольный элемент поля  $L = \mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$  в виде степенного ряда и разложить его в непрерывную дробь. Определим так называемую дробную и целую части элемента  $\alpha = \sum_{j=e} g_j x^j \in \mathbb{K}((x))$  по формулам  $\{\alpha\} := \sum_{j \geq 1} g_j x^j$  и  $[\alpha] := \alpha - \{\alpha\} = \sum_{e=j}^0 g_j x^j$ . Далее определим последовательности неполных частных  $\alpha_i$  и полных частных  $A_i$ , положив нулевые члены равными  $\alpha_0 = \alpha$ ,  $A_0 = [\alpha]$ , а остальные определив индуктивно по формулам  $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1} - A_{i-1}} \in \mathbb{K}((x))$  и  $A_i = [\alpha_i] \in \mathbb{K}[x^{-1}]$ . Традиционно последовательность  $[A_0, A_1, A_2, \dots]$  записывают в виде непрерывной дроби:

$$A_0 + \frac{1}{A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3 + \dots}}}.$$

Под периодичностью разложения в непрерывную дробь мы понимаем периодичность последовательности полных частных  $[A_0, A_1, A_2, \dots]$ , которая равносильна равенству неполных частных  $\alpha_i = \alpha_j$  для некоторых  $i \neq j$ . В случае  $\alpha_i = c\alpha_j$ ,  $i \neq j$ , где  $c \in \mathbb{K}$ , мы называем разложение в непрерывную дробь квазипериодическим, минимальное такое  $i - j > 0$  — длиной квазипериода, а коэффициент  $c$  для такой пары  $i, j$  — коэффициентом квазипериодичности (подробнее о функциональных непрерывных дробях см. [3], [9]). Если  $\alpha$  квазипериодичен, то нетрудно видеть, что  $\alpha$  является квадратичной иррациональностью. Обратное верно не всегда. Пусть  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_2 \alpha^2 + \Lambda_1 \alpha + \Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_0 \in \mathbb{K}[x^{-1}], \quad \text{НОД}(\Lambda_2, \Lambda_1, \Lambda_0) \in \mathbb{K}. \quad (1)$$

Будем далее называть дискриминантом квадратичной иррациональности  $\alpha$  выражение  $D(\alpha) = \Lambda_1^2 - 4\Lambda_2\Lambda_0 \in \mathbb{K}[x^{-1}]$ . Критерий квазипериодичности в случае непрерывных дробей в  $\mathbb{K}((1/x))$  был доказан в [5], и переформулирован для случая непрерывных дробей в  $\mathbb{K}((x))$  в [9]

следующим образом. Квадратичная иррациональность  $\alpha$  разлагается в квазипериодическую непрерывную дробь в том и только том случае, когда соотношение

$$Y^2 - D(\alpha)Z^2 = b \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad (2)$$

обладает нетривиальным решением относительно неизвестных  $Y, Z \in \mathbb{K}[x^{-1}]$  и некоторой неизвестной константы  $b$ , т.е. решением с  $Z \neq 0$ . Ниже будет показано, что каждое решение уравнения (2) может быть получено из некоторого решения уравнения (2) для  $D = \frac{f}{x^{2g+2}}$ . В каждом гиперэллиптическом поле нетривиальная группа решений уравнения 2 для  $D = \frac{f}{x^{2g+2}}$  изоморфна произведению  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  и бесконечной циклической группы. Образующую этой группы назовём фундаментальным решением (подробнее о фундаментальных решениях и их связи с фундаментальными  $S$ -единицами см. [9]).

### 3. Основная часть

**ЛЕММА 1.** Пусть  $f$  — бесквадратный многочлен степени  $2g + 1$ . Тогда квадратичная иррациональность  $\alpha = \frac{v+w\sqrt{f}}{u}$ ,  $\text{НОД}(u, v, w) \in \mathbb{K}$ , обладает дискриминантом

$$D(\alpha) = 4x^{-2m} (x^{-s}wu/r)^2 \frac{f}{x^{2g+2}}, \quad (3)$$

где  $r = \text{НОД}(u, v^2 - w^2f)$ ,  $s = \deg w + \deg u - \deg r$ , а  $m = \max\{\tau - g - 1, g - \tau, 2\Gamma + \tau - g - 1\} \geq 0$ , где  $\tau = \deg u - \deg w$ ,  $\Gamma = \deg v - \deg u$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Элемент  $\alpha$  удовлетворяет уравнению с коэффициентами в  $\mathbb{K}[x]$ :

$$\lambda_2 \alpha^2 + \lambda_1 \alpha + \lambda_0 = 0, \quad (4)$$

где  $r = \text{НОД}(u^2, uv, v^2 - w^2f) = \text{НОД}(u, v^2 - w^2f)$ ,  $\lambda_2 = (u^2/r)$ ,  $\lambda_1 = -2(uv/r)$ ,  $\lambda_0 = (v^2 - w^2f)/r = 0$ . Пусть  $l = \max\{2\deg u, \deg u + \deg v, \deg(v^2 - w^2f)\} - \deg r$ . Ясно, что если поделить уравнение (4) на  $x^l$ , то мы получим уравнение вида (1) для квадратичной иррациональности  $\alpha$  с коэффициентами в кольце  $\mathbb{K}[x^{-1}]$  с дискриминантом  $D(\alpha) = 4x^{-2l}w^2(u/r)^2f = 4x^{-2m} (x^{-s}wu/r)^2 \frac{f}{x^{2g+2}} \in \mathbb{K}[x^{-1}]$ , где  $s = \deg w + \deg u - \deg r$ , а  $m = l - g - 1 - \deg w - \deg u + \deg r$ , то есть

$$m + g + 1 = \max \begin{cases} \deg u - \deg w, \\ \deg v - \deg w, \\ 2\deg v - \deg u - \deg w, \\ \deg w - \deg u + 2g + 1 \end{cases} = \max \begin{cases} \deg u - \deg w, \\ 2g + 1 - (\deg u - \deg w), \\ \deg v - \deg u + \deg u - \deg w, \\ 2(\deg v - \deg u) + \deg u - \deg w. \end{cases}$$

□ Отметим, что в требование  $\text{НОД}(u, v, w) \in \mathbb{K}$  можно опустить, но тогда  $r$  изменяется следующим образом  $r = (\text{НОД}(u, v, w))^2 \cdot \text{НОД}(u, v^2 - w^2f)$ . Из леммы 1 следует, что дискриминант любой квадратичной иррациональности имеет вид  $D(\alpha) = W^2 \frac{f}{x^{2g+2}}$ , где  $W, \frac{f}{x^{2g+2}} \in \mathbb{K}[x^{-1}]$ . Далее будем писать  $W(\alpha)$  имея в виду множитель  $W$  из выражения выше для  $\alpha$ . Кроме того, дискриминант  $D(\alpha)$  зависит только от степени  $\deg v$ , но не зависит от вида многочлена  $v$ .

**ЛЕММА 2.** Пусть  $f$  — бесквадратный многочлен степени  $2g + 1$ . Тогда квадратичная иррациональность  $\alpha \in \mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$  обладает квазипериодическим разложением в  $\mathbb{K}((x))$  только, если уравнение (2) для  $D = 4\frac{f}{x^{2g+2}} \in \mathbb{K}[x^{-1}]$  имеет решение  $Y, Z \in k[x^{-1}]$  такое, что  $Z = Z'W(\alpha)$ , где  $Z' \in \mathbb{K}[x^{-1}]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство легко следует из критерия квазипериодичности, вида уравнения (2) и леммы 1.  $\square$

ПРИМЕР.  $D(\sqrt{f}) = 4x^{-2g} \frac{f}{x^{2g+2}}$ . По лемме 2 элемент  $\sqrt{f}$  квазипериодичен, если и только если найдётся решение  $Y, Z$  уравнения (2) с  $Z = x^{-g}Z'$ .

Приведём доказательство теоремы с использованием леммы 1 и леммы 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы] По лемме 1 дискриминант квадратичной иррациональности  $\alpha = \frac{v+w\sqrt{f}}{u}$  равен

$$D(\alpha) = 4x^{-2m} (x^{-s}wu/r)^2 \frac{f}{x^{2g+2}},$$

где  $r = \text{НОД}(u, v^2 - w^2f)$ ,  $s = \deg w + \deg u - \deg r$ , а  $m = \max\{\tau - g - 1, g - \tau, 2\Gamma + \tau - g - 1\}$ , где  $\tau = \deg u - \deg w$ ,  $\Gamma = \deg v - \deg u$ . По лемме 2 элемент  $\alpha$  заведомо квазипериодичен, если  $W(\alpha) \in \mathbb{K}$ . В противном случае для квазипериодичности  $\alpha$  необходимо выполнение условия  $Z = Z'W(\alpha)$ . Для  $W(\alpha) \in \mathbb{K}$  необходимо и достаточно, чтобы  $m = 0$ ,  $w = x^i$ ,  $u = x^j r$ . В случае  $m = 0$  получаем  $g \leq \tau \leq g + 1$ ,  $\Gamma \leq 0$ . При условиях выше получаем  $\tau = \deg r + j - i$ ,  $\Gamma = \deg v - \deg r - j$ , откуда  $\deg v \leq \sigma + i$  и  $\deg r = \sigma + i - j$ , где  $\sigma = g$  или  $\sigma = g + 1$ . Пусть  $v = 0$ , и пусть без ограничения общности  $x \nmid r$ , тогда  $r \mid f$ . Т.к.  $x \nmid f$ ,  $\nu_x(\alpha) = i - j = \deg r - \sigma$ . Если  $\deg r < \sigma$ , то  $\nu_x(\alpha) < 0$ , и т.к.  $\alpha^2 \in \mathbb{K}(x)$ , то  $\alpha$  периодичен по Следствию 3, [9]. Если  $\deg r > \sigma$ , то  $\alpha_1 = 1/\alpha$ ,  $\nu_x(\alpha_1) < 0$  и  $\alpha_1$  периодичен по Следствию 3, [9]. Если  $r \in \mathbb{K}$ , то без ограничения общности можем считать, что  $r = 1$ , тогда  $j = i + \sigma$ , откуда  $x^{-j}v \in \mathbb{K}[x]$  и  $\alpha = x^{-j}v + \frac{\sqrt{f}}{x^\sigma} = x^{-(i+\sigma)}v + \beta$ , где  $\beta = \frac{\sqrt{f}}{x^g}$  или  $\beta = \frac{\sqrt{f}}{x^{g+1}}$ . Оба этих элемента периодичны при наличии квазипериодических элементов в  $\mathbb{K}(x)(\sqrt{f})$  (см. [9]), откуда следует периодичность  $\alpha$ . Пусть теперь  $\alpha = \frac{v+x^i\sqrt{f}}{x^j r}$ , и

$$x^t x^j r = v^2 - x^{2i} f. \quad (5)$$

Тогда в силу условия  $\text{НОД}(x^i, x^j r, v) \in \mathbb{K}$  получаем, что или  $i = 0$  или  $j = 0$ . Также из (5) получаем  $t + \sigma + i = \max\{2 \deg v, 2g + 1 + 2i\}$ . Следовательно, если  $\sigma = g$  или  $\sigma = g + 1$  и  $\deg v = \sigma + i$ , то  $t = g + 1 + i$ . Если  $\sigma = g + 1$  и  $\deg v < \sigma + i$ , то  $t = g + i$ . Воспользуемся (5), откуда  $\alpha = \frac{1}{x^{-t}v - x^{i-t}\sqrt{f}}$ . Учитывая, что  $f(0) \neq 0$  получаем  $\nu_x(x^{i-t}\sqrt{f}) < 0$ , а т.к.  $t \geq \deg v$  получаем  $\nu_x(x^{-t}v) \leq 0$ . Откуда,  $\nu_x(\alpha) > 0$ , если  $[\frac{\sqrt{f}}{x^{i-t}}] \neq x^{-t}v + c$ , для некоторого  $c \in \mathbb{K}$ . В силу этого  $A_0 = [\alpha] = 0$  и  $\alpha_1 = x^{-t}v - x^{i-t}\sqrt{f}$ . Следовательно,  $\{\alpha_1\} = -\{\beta\}$ , и  $\alpha_2 = -\beta_1$ , где  $\beta = \frac{\sqrt{f}}{x^{t-i}}$ , т.е.  $\beta = \frac{\sqrt{f}}{x^g}$  или  $\beta = \frac{\sqrt{f}}{x^{g+1}}$ . Как мы видели выше, оба этих элемента периодичны, откуда следует периодичность  $\alpha$ . Пусть теперь  $[\frac{\sqrt{f}}{x^{i-t}}] = x^{-t}v + c$ , где  $c \in \mathbb{K}$ . Тогда  $\alpha = \frac{1}{x^{-t}v - x^{i-t}\sqrt{f}} = -\frac{1}{\beta - [\beta] + c} = -\frac{1}{c + \{\beta\}}$ , где  $\beta$  определена выше. В случае  $c = 0$  это влечёт  $\alpha = -\beta_1$ , что даёт периодичность  $\alpha$ . Наконец, пусть  $c \neq 0$ , тогда получаем  $A_0 = -\frac{1}{c}$ . Если  $\alpha$  удовлетворяет (4), то для  $L_0, M_0$  из формулы  $\alpha_{n+1} = \frac{M_n + \lambda_2 \alpha}{L_n}$  (см., например, [9]) выполнено  $L_0 = -(\lambda_2 A_0^2 + \lambda_1 A_0 + \lambda_0)$  и  $M_0 = \lambda_2 A_0 + \lambda_1$ . Т.к.  $\text{НОД}(x^j r, v^2 - x^{2i} f) = x^j r = u$ , то по формуле (4) получаем  $\lambda_2 = x^j r$ ,  $\lambda_1 = -2v$ ,  $\lambda_0 = x^t$ . Следовательно,  $\alpha_1 = -\frac{u A_0 - v + x^i \sqrt{f}}{u A_0^2 - 2v A_0 + x^t}$ . По формуле (5) получаем  $u = x^t([\beta]^2 - 2c[\beta] + c^2 - x^{2(i-t)}f)$ . Подставляя значения выше получаем, что числитель  $\alpha_1$  равен  $u A_0 - v + x^i \sqrt{f} = -\frac{1}{c}x^t([\beta]^2 - 2c[\beta] + c^2 - x^{2(i-t)}f) + c x^{-t}v - c\beta = -\frac{1}{c}x^t([\beta]^2 - \beta^2 - c([\beta] + \beta))$ . А знаменатель  $u A_0^2 - 2v A_0 + x^t = \frac{1}{c^2}x^t([\beta]^2 - 2c[\beta] + c^2 - x^{2(i-t)}f) + 2c[\beta] - 2c^2 + c^2 = \frac{1}{c^2}x^t([\beta]^2 - \beta^2)$ . Таким образом, получаем, что  $\alpha_1 = c + c^2 \beta_1$ , откуда следует  $\{\alpha_1\} = c^2 \{\beta_1\}$ , что влечёт  $\alpha_2 = c^2 \beta_2$ , что, в свою очередь, завершает доказательство теоремы.  $\square$

## 4. Заключение

Из доказательства теоремы следует в некотором смысле максимальность этого класса квазипериодических элементов. Чтобы сделать вывод о периодичности или квазипериодических

других элементов недостаточно анализа только вида квадратичной иррациональности, как в теореме, а необходим анализ фундаментальных решений, которые мы определим далее, и получение которых невозможно без вычислений, зависящих от вида многочлена  $f$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N.H. Ueber die Integration der Differential-Formel  $\rho dx/\sqrt{R}$  wenn  $R$  und  $\rho$  ganze Functionen sind // *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 1826. Vol. 1. P. 185–221.
2. Tchebicheff P. Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisieme ou du quatrieme degré' // *Journal des math. pures et appl.* 1857. Vol. 2. P. 168–192.
3. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // *Успехи Математических Наук*. 2014. Т. 69:1, № 415. С. 3–38.
4. Adams William W., Razar Michael J. Multiples of point on elliptic curves and continued fractions // *Proc. London Math. Soc.* 1980. Vol. 41, no. 3. P. 481–498.
5. Schmidt Wolfgang M. On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields // *Acta arithmetica*. 2000. Vol. 95, no. 2. P. 139–166.
6. Schinzel A. On some problems of the arithmetical theory of continued fractions // *Acta Arithmetica*. – 1961. – Vol. 6. – №. 4. – P. 393–413.
7. Беньш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // *Математический сборник*. 2009. Т. 200, № 11. С. 15–44.
8. Петрунин М. М. S-единицы и периодичность квадратного корня в гиперэллиптических полях // *Доклады Академии наук* 2017. – Т. 474. – №. 2. – С. 155–158.
9. Платонов В. П., Петрунин М. М. Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Тр. МИАН*. 2018.
10. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // *Математический сборник*. 2018. Т. 209, № 4. С. 54–94.
11. Платонов В. П. Об описании периодических элементов эллиптических полей, заданных многочленом третьей степени // *Успехи Математических Наук*. 2024 Т. 79, В. 6
12. Berry T.G. On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields // *Arch. Math. (Basel)*. 1990. Vol. 55, no. 3. P. 259–266.

## REFERENCES

1. Abel, N.H. 1826, “Ueber die Integration der Differential-Formel  $\rho dx/\sqrt{R}$ , wenn  $R$  und  $\rho$  ganze Functionen sind”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 1, pp. 185–221.
2. Tchebicheff, P. 1857, “Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisieme ou du quatrieme degré”, *Journal des math. pures et appl.*, vol. 2, pp. 168–192.

3. Platonov, V.P. 2014, "Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field", *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1–34.
4. Adams, W.W. & Razar, M.J. 1980, "Multiples of points on elliptic curves and continued fractions", *Proc. London Math. Soc.*, vol. 41, no. 3, pp. 481–498.
5. Schmidt, W.M. 2000, "On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields", *Acta Arithmetica*, vol. 95, no. 2, pp. 139–166.
6. Schinzel, A. 1961, "On some problems of the arithmetical theory of continued fractions", *Acta Arithmetica*, vol. 6, no. 4, pp. 393–413.
7. Benyash-Krivets, V.V. & Platonov, V.P. 2009, "Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 1587–1615.
8. Petrunin, M.M. 2017, "S-Units and Periodicity of Square Root in Hyperelliptic Fields", *Doklady Mathematics*, vol. 95, no. 3, pp. 222–225.
9. Platonov, V.P. & Fedorov, G.V. "On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Sb. Math.*, 209:4 (2018), 519–559
10. Platonov, V.P. & Fedorov, G.V. 2018, "On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519–559.
11. Platonov, V.P. 2024, "On the description of periodic elements in elliptic fields defined by a cubic polynomial", *Russian Math. Surveys*
12. Berry, T. G. 1990, "On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields", *Arch. Math. (Basel)*, vol. 55, no. 3, pp. 259–266.

Получено: 11.07.2024

Принято в печать: 24.12.2024