

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 511. 344

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-120-137

**Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы
Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми**

Ф. З. Рахмонов

Рахмонов Фируз Заруллоевич — кандидат физико-математических наук, Институт математики им. А. Джураева (г. Душанбе).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Аннотация

При $n \geq 3$ получена асимптотическая формула для количества представлений достаточно большого натурального N в виде $p_1 + p_2 + m^n = N$, где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число, удовлетворяющие условиям

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1}.$$

Ключевые слова: проблема Эстермана, почти пропорциональные слагаемые, короткая тригонометрическая сумма Г. Вейля, малая окрестность центров больших дуг

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

Рахмонов, Ф. З. Асимптотическая формула в обобщении тернарной проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышёвский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 120–137.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 511. 344

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-120-137

**Asymptotic formula in generalization of ternary Esterman problem
with almost proportional summands**

F. Z. Rakhmonov

Rakhmonov Firuz Zarulloevich — candidate of physical and mathematical sciences, A. Dzhuraev Institute of Mathematics (Dushanbe).

e-mail: rakhmonov.firuz@gmail.com

Abstract

For $n \geq 3$, an asymptotic formula for the number of representations of a sufficiently large natural number N in the form $p_1 + p_2 + m^n = N$, is obtained. Here p_1, p_2 are prime numbers, and m is a natural number, satisfying the following conditions

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1}.$$

Keywords: Estermann problem, almost proportional summands, short exponential sum of G. Weyl, small neighborhood of centers of major arcs

Bibliography: 20 titles.

For citation:

Rakhmonov, F. Z. 2024, “Asymptotic formula in generalization of ternary Esterman problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 120–137.

1. Введение

Эстерман [1] при $n = 2$ доказал асимптотическую формулу для числа решений уравнения

$$p_1 + p_2 + m^n = N, \tag{1}$$

где p_1, p_2 — простые числа, m — натуральное число. В работах [2, 3, 4] при $n = 2, 3, 4$ эта задача исследована с более жёсткими условиями, а именно, когда слагаемые почти равны, то есть выведена асимптотическая формула для числа решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| p_i - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad i = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad H \geq N^{1 - \theta(n)} \mathcal{L}^{c_n},$$

соответственно при

$$\theta(2) = \frac{1}{4}, \quad c_2 = 2; \quad \theta(3) = \frac{1}{6}, \quad c_3 = 3; \quad \theta(4) = \frac{1}{12}, \quad c_4 = \frac{40}{3}. \tag{2}$$

В этой работе при произвольном фиксированном $n \geq 3$ доказана теорема об асимптотической формуле в обобщении проблемы Эстермана с почти пропорциональными слагаемыми.

ТЕОРЕМА 1. Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ — фиксированное натуральное число, $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $x^n \equiv N \pmod{p}$, μ_1, μ_2, μ_3 — положительные фиксированные числа, удовлетворяющие условию $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$, $J_n(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H.$$

Тогда, при $H \geq N^{1 - \frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1}$, справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{n\mu_3^{1 - \frac{1}{n}} N^{1 - \frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1 - \frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2}\right)$$

где постоянное под знаком O зависит от чисел μ_1, μ_2, μ_3 и n .

Из теоремы 1 при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}$ следует асимптотическая формула в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть N — достаточно большое натуральное число, $n \geq 3$ — фиксированное натуральное число, $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $x^n \equiv N \pmod{p}$, $J_n(N, H)$ — число решений диофантова уравнения (1) с условиями

$$\left| p_k - \frac{N}{3} \right| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad \left| m^n - \frac{N}{3} \right| \leq H.$$

Тогда, при $H \geq N^{1-\frac{1}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{2n+1}{n-1}+n-1}$, справедлива асимптотическая формула:

$$J_{n,r}(N, H) = \frac{3^{2-\frac{1}{n}} \mathfrak{S}(N) H^2}{n N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right), \quad \mathfrak{S} = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p)}{(p-1)^2}\right)$$

где постоянное под знаком O зависит только от n .

Заметим, что полученные ранее в работах [3, 4] асимптотические формулы в обобщении проблемы Эстермана с почти равными слагаемыми при $n = 3$ и $n = 4$, приведенные нами в формуле (2), являются частными случаями следствия 1.

Доказательство теоремы 1 проводится круговым методом Харди-Литтлвуда-Рамануджана в форме тригонометрических сумм И. М. Виноградова в сочетании с методом, описанным в работах [5, 6, 7, 8, 9], где исследовано поведение короткой суммы Г. Вейля вида

$$T(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < m \leq x} e(\alpha m^n),$$

в больших дугах и доказана асимптотическая формула в обобщении проблемы Варинга с почти пропорциональными слагаемыми. Основными утверждениями, позволившими доказать теорему 1, являются:

- асимптотическая формула для коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ в малой окрестности центра больших дуг (следствие 2 леммы 7);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в больших дугах за исключением малой окрестности их центров (следствие 3 леммы 7);
- нетривиальная оценка сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах (теорема 2).

При решении ряда аддитивных задач с почти пропорциональными слагаемыми, к которым относятся проблема Варинга и обобщение проблемы Эстермана, возникают задачи о поведении коротких тригонометрических сумм Г. Вейля вида $T(\alpha; x, y)$ как в больших так и в малых дугах. Для произвольного $n \geq 3$ в больших дугах они изучены в работах [5, 8]. Для тригонометрических сумм $T(\alpha; x, y)$ в малых дугах при $q \gg y^\varepsilon$ были получены нетривиальные оценки в работе [10].

В настоящей работе, воспользовавшись методами работ [11, 12, 13, 14], нетривиальная оценка получена при

$$(\ln y)^{(n-1)^2} \ll q \ll y^n (\ln y)^{-(n-1)^2}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \geq x_0 > 0$, $\ln x < y \leq x(\ln x)^{-1}$, α — вещественное число,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

тогда при $n \geq 3$ справедлива оценка

$$|T(\alpha; x, y)| \ll y \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q}{y^n} \right)^{2-n} (\ln qy)^{(n-1)2^{2-n}},$$

где постоянная под знаком $\ll$ зависит только от n .

Обозначения. ε — произвольное положительное число, не превосходящее 0.00001, $\mathcal{L} = \ln N$,

$$S(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right), \quad \gamma(\lambda; x, y) = \int_{-0,5}^{0,5} e\left(\lambda\left(x - \frac{y}{2} + yt\right)^n\right) dt.$$

2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. [5]. Пусть $f(u)$ — многочлен степени n , x и y — целые положительные числа, $y < x$. Тогда при $j = 1, \dots, n-1$ имеет место

$$\left| \sum_{x-y < u \leq x} e(f(u)) \right|^{2^j} \leq (2y)^{2^j - j - 1} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_j| < y} \left| \sum_{u \in I_j(x, y; h_1, \dots, h_j)} e(\Delta_j(f(u); h_1, \dots, h_j)) \right|,$$

где интервалы $I_j(x, y; h_1, \dots, h_j)$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} I_1(x, y; h_1) &= (x - y, x] \cap (x - y - h_1, x - h_1], \\ I_j(x, y; h_1, \dots, h_j) &= I_{j-1}(x, y; h_1, \dots, h_{j-1}) \cap I_{j-1}(x - h_j, y; h_1, \dots, h_{j-1}), \end{aligned}$$

то есть $I_{j-1}(x - h_j, y; h_1, \dots, h_{j-1})$ получается из $I_{j-1}(x, y; h_1, \dots, h_{j-1})$ сдвигом на $-h_j$ всех интервалов, пересечением которых он является.

ЛЕММА 2. [5]. Пусть Δ_j означает j -ое применение разностного оператора, так что для любой функции действительного переменного $f(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_1(f(u); h) &= f(u + h) - f(u), \\ \Delta_{j+1}(f(u); h_1, \dots, h_{j+1}) &= \Delta_1(\Delta_j(f(u); h_1, \dots, h_j); h_{j+1}). \end{aligned}$$

Тогда при $j = 1, \dots, n-1$ имеет место соотношение

$$\Delta_j(u^n; h_1, \dots, h_j) = h_1 \dots h_j p_j(u; h_1, \dots, h_j),$$

где $p_j = g_j(u; h_1, \dots, h_j)$ является формой $n - j$ -го порядка с целыми коэффициентами, имеющей относительно u степень $n - j$ и старший коэффициент $n(n-1) \dots (n-j+1)$, то есть

$$p_j(u; h_1, \dots, h_j) = \frac{n!}{(n-j)!} u^{n-j} + \dots$$

ЛЕММА 3. [15]. При $x \geq 1$, $r \geq 2$ и $k \geq 1$ имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau_r^k(n) \ll \frac{x r^k}{(r!)^{\frac{r^k-1}{r-1}}} \left(\ln x + r^k - 1 \right)^{r^k-1}.$$

ЛЕММА 4. [16]. Пусть α — вещественное число,

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

$x \geq 1$, $y > 0$ и β — любое, тогда справедлива оценка

$$\sum_{n \leq x} \min\left(y, \frac{1}{\|\alpha n + \beta\|}\right) \leq 6 \left(\frac{x}{q} + 1\right) (y + q \ln q).$$

ЛЕММА 5. [17]. Пусть $x \geq x_0$, A и b — произвольные фиксированные положительные числа, $1 \leq q \leq \mathcal{L}_x^b$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1.$$

Тогда при $|\lambda| \leq x(2\pi y^2)^{-1}$ и $y \geq x^{\frac{5}{8}} \mathcal{L}_x^{1,5A+0,25b+18}$ справедливо равенство

$$S_1(\alpha; x, y) = \frac{\mu(q) \sin \pi \lambda y}{\varphi(q) \pi \lambda} e\left(\lambda \left(x - \frac{y}{2}\right)\right) + O(y \mathcal{L}_x^{-A}).$$

ЛЕММА 6. Пусть μ_k — фиксированное действительное число, $0 < \mu_k < 1$, N — достаточно большое натуральное число, $N_k = \mu_k N + H$, $k = 1, 2$, $N^{\frac{1}{2}} \leq H \leq N^{1-\frac{1}{30}}$,

$$\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H) = \sum_{N_k - 2H < p \leq N_k} e(\alpha p), \quad S_1(\alpha; x, y) = \sum_{x-y < n \leq x} \Lambda(n) e(\alpha n).$$

Тогда имеет место соотношение

$$\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H) = \frac{S_1(\alpha; N_k, 2H)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H^2}{N \ln(\mu_k N)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя неравенство $N_k - 2H < p \leq N_k$ в виде $\mu_k N - H < p \leq \mu_k N + H$, логарифмируя это неравенство и воспользовавшись формулой

$$\ln(\mu_k N \pm H) = \ln(\mu_k N) + \ln\left(1 \pm \frac{H}{\mu_k N}\right) = \ln(\mu_k N) + O\left(\frac{H}{N}\right),$$

получим, что при $\mu_k N - H < p \leq \mu_k N + H$, выполняется соотношение

$$\ln p = \ln(\mu_k N) + O\left(\frac{H}{N}\right).$$

При помощи этой формулы сумму $\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H)$ выражаем через сумму вида $S_1(\alpha; x, y)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H) &= \sum_{\mu_k N - H < p \leq \mu_k N + H} \left(\frac{\ln p}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H}{N \ln(\mu_k N)}\right) \right) e(\alpha p) = \\ &= \frac{S_1(\alpha; \mu_k N + H, 2H)}{\ln(\mu_k N)} - R_1 + O\left(\frac{H^2}{N \ln(\mu_k N)}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Оценивая сумму R_1 тривиально числом слагаемых, и воспользовавшись формулой $(1 \pm u)^{\mu_k} = 1 \pm \mu_k u + O(u^2)$, $|u| < 0,5$, имеем

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{\substack{\mu_k N - H < p^k \leq \mu_k N + H \\ k \geq 2}} \frac{\ln p}{\ln(\mu_k N)} e(\alpha p^k) \ll \ln(\mu_k N) \left((\mu_k N + H)^{\frac{1}{2}} - (\mu_k N - H)^{\frac{1}{2}} + 1 \right) = \\ &= (\mu_k N)^{\frac{1}{2}} \ln(\mu_k N) \left(\left(1 + \frac{H}{\mu_k N}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{H}{\mu_k N}\right)^{\frac{1}{2}} \right) + \ln(\mu_k N) \ll \frac{H}{(\mu_k N)^{\frac{1}{2}}} \ln(\mu_k N). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в правую часть (3), получим утверждение леммы.

ЛЕММА 7. [5]. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, тогда при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} \leq \frac{1}{2q}$ имеет место формула

$$T(\alpha; x, y) = \frac{S(a, q)}{q} T(\lambda; x, y) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

а при $\{n|\lambda|x^{n-1}\} > \frac{1}{2q}$ имеет место оценка

$$|T(\alpha, x, y)| \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min(yq^{-\frac{1}{n}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} x^{1-\frac{n}{2}} q^{-\frac{1}{n}}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $|\lambda| \leq \frac{1}{2nqx^{n-1}}$, тогда имеет место соотношение

$$T(\alpha; x, y) = \frac{y}{q} S(a, q) \gamma(\lambda; x, y) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\tau \geq 2n(n-1)x^{n-2}y$, $\frac{1}{2nqx^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$, тогда имеет место оценка

$$T(\alpha; x, y) \ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min \left(yq^{-\frac{1}{n}}, x^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \right).$$

ЛЕММА 8. [18]. Пусть $(a, q) = 1$, q — натуральное число. Тогда имеем

$$S(a, q) = \sum_{k=1}^q e\left(\frac{ak^n}{q}\right) \ll q^{1-\frac{1}{n}},$$

где постоянная под знаком Виноградова зависит от n .

ЛЕММА 9. [19]. Пусть $y \geq x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, тогда справедлива асимптотическая формула

$$\pi(x) - \pi(x-y) = \frac{y}{\ln x} + O\left(\frac{y}{\ln^2 x}\right).$$

ЛЕММА 10. [18]. Пусть действительная функция $f(u)$, и монотонная функция $g(u)$ удовлетворяют условиям: $f'(u)$ — монотонна, $|f'(u)| \geq m_1 > 0$ и $|g(u)| \leq M$. Тогда справедлива оценка:

$$\int_a^b g(u) e(f(u)) du \ll \frac{M}{m_1}.$$

ЛЕММА 11. [18]. Пусть при $a \leq u \leq b$ вещественная функция $f(u)$ имеет производную n -го порядка ($n > 1$), причём при некотором $A > 0$ выполняется неравенство $A \leq |f^{(n)}(u)|$. Тогда справедлива оценка

$$\int_a^b e(f(u)) du \leq \min(b-a, 6nA^{-\frac{1}{n}}).$$

3. Доказательство теоремы 2

Воспользовавшись при $j = n-1$ леммой 1, затем леммой 2, получим

$$|T(\alpha; x, y)|^{2^{n-1}} \leq (2y)^{2^{n-1}-n} \sum_{|h_1| < y} \dots \sum_{|h_{n-1}| < y} \left| \sum_{u \in I_{n-1}(x, y; h_1, \dots, h_{n-1})} e(\alpha n! h_1 h_2 \dots h_{n-1} u) \right|.$$

В последней сумме по u количество членов для которых выполняется соотношение $h_1 \dots h_{n-1} = 0$ не превосходит величины $(n-1)y(2y)^{n-2}$. Следовательно

$$|T(\alpha; x, y)|^{2^{n-1}} \leq (2y)^{2^{n-1}-n} \left(2^{n-1} \tilde{T}(\alpha; x, y) + (n-1)y(2y)^{n-2} \right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\alpha; x, y) &= \sum_{1 \leq h_1 < y} \dots \sum_{1 \leq h_{n-1} < y} \left| \sum_{u \in I_{n-1}(x, y; h_1, \dots, h_{n-1})} e(\alpha n! h_1 h_2 \dots h_{n-1} u) \right| \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^{y^{n-1}} \tau_{n-1}(h) \left| \sum_{u \in I_{n-1}(x, y; h_1, \dots, h_{n-1})} e(\alpha n! hu) \right| \leq \sum_{h=1}^{y^{n-1}} \tau_{n-1}(h) \min \left(y, \frac{1}{2\|\alpha n! h\|} \right), \end{aligned}$$

где $\tau_n(h)$ — число решений диофантова уравнения $h_1 \dots h_n = h$. Применяя к последней сумме неравенство Коши, а затем леммы 3 и 4, находим

$$\begin{aligned} \tilde{T}^2(\alpha; x, y) &\leq \sum_{h=1}^{y^{n-1}} \tau_{n-1}^2(h) \cdot y \sum_{h=1}^{y^{n-1}} \min \left(y, \frac{1}{2\|\alpha n!h\|} \right) \leq \\ &\leq \frac{(n-1)^2 y^n}{((n-1)!)^2} (\ln y - n^2 - 2n)^{n^2-2n} \left(\frac{n! y^{n-1}}{q} + 1 \right) (y + q \ln q) \ll \\ &\ll y^{2n} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^n} \right) (\ln y)^{n^2-2n}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (4), получим

$$\begin{aligned} |T(\alpha; x, y)|^{2n} &\ll y^{2n-2n} \left(\tilde{T}^2(\alpha; x, y) + y^{2n-2} \right) \ll \\ &\ll y^{2n-2n} \left(y^{2n} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q \ln q}{y^n} \right) (\ln y)^{n^2-2n} + y^{2n-2} \right) \ll \\ &\ll y^{2n} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{y} + \frac{q}{y^n} \right) (\ln qy)^{(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Извлекая корень степени 2^n , получим утверждение теоремы.

4. Доказательство теоремы 1

Не ограничивая общности будем считать, что

$$H = N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{\omega(n)}, \quad \theta(n) = \frac{1}{(n-1)n}, \quad \omega(n) = \frac{2^{n+1}}{n-1} + n - 1. \quad (5)$$

Пользуясь обозначениями

$$\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H) = \sum_{N_k - 2H < p \leq N_k} e(\alpha p), \quad N_k = \mu_k N + H, \quad k = 1, 2;$$

$$N_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{n}} = \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{H}{\mu_3 N} \right)^{\frac{1}{n}} = \mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right), \quad (6)$$

$$H_3 = (\mu_3 N + H)^{\frac{1}{n}} - (\mu_3 N - H)^{\frac{1}{n}} = \frac{2H}{n\mu_3^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right) \right), \quad (7)$$

$$\tau = 2(n-1)nN_3^{n-2}H_3 = \frac{4(n-1)H}{n\mu_3^{\frac{1}{n}} N^{\frac{1}{n}}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right) \right), \quad \text{æ}\tau = 1, \quad (8)$$

$J_n(N, H)$ — число решений диофантова уравнения

$$p_1 + p_2 + m^n = N,$$

относительно простых чисел p_1, p_2 и натуральных чисел m с условиями

$$|p_k - \mu_k N| \leq H, \quad k = 1, 2, \quad |m^n - \mu_3 N| \leq H,$$

представим в виде

$$\begin{aligned} J_n(N, H) &= \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(-\alpha N) \sum_{|p_1 - \mu_1 N| \leq H} e(\alpha p_1) \sum_{|p_2 - \mu_2 N| \leq H} e(\alpha p_2) \sum_{|m^n - \mu_3 N| \leq H} e(\alpha m^n) = \\ &= \int_{-\text{æ}}^{1-\text{æ}} e(-\alpha N) (\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) + \theta_1) (\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) + \theta_2) (T(\alpha; N_3, H_3) + \theta_3) d\alpha, \quad (9) \end{aligned}$$

где $|\theta_k|$ равен 1, если соответственно нижние пределы тригонометрических сумм $\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)$, $\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)$, $T(\alpha; N_3, H_3)$, то есть числа $N_1 - 2H$, $N_2 - 2H$, $N_3 - H_3$ целые числа, и 0 в противном случае. Перемножая скобки в подынтегральной функции в (9), получим

$$\begin{aligned} J_n(N, H) &= \int_{-\infty}^{1-\infty} e(-\alpha N) \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) d\alpha + \mathbb{R}_1, \\ \mathbb{R}_1 &= \int_{-\infty}^{1-\infty} e(-\alpha N) (\theta_3 \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) + \theta_1 \theta_2 T(\alpha; N_3, H_3) + \\ &\quad + \theta_2 \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) + \theta_1 \theta_3 \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) + \\ &\quad + \theta_1 \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) + \theta_2 \theta_3 \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)) d\alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

В $\mathbb{R}_1$, переходя к оценкам, пользуясь неравенством Коши, а затем соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H)|^2 d\alpha &= \pi(N_k) - \pi(N_k - 2H) \leq 2H, \quad k = 1, 2; \\ \int_0^1 |T(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha &= [N_3] - [N_3 - H_3] \leq H_3 + 1 \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}, \end{aligned}$$

где при выводе второго из них используется соотношение (7), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_1 &\leq \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |T(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \int_0^1 |T(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \int_0^1 |T(\alpha; N_3, H_3)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \ll \\ &\ll H + \left(\frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}} \right)^{\frac{1}{2}} + H^{\frac{1}{2}} \ll H \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10), имеем

$$J_n(N, H) = \int_{-\infty}^{1-\infty} e(-\alpha N) \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) d\alpha + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right).$$

Согласно теореме Дирихле о приближении действительных чисел рациональными числами, каждое α из промежутка $[-\infty, 1-\infty]$ представим в виде

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leq q \leq \tau, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}. \quad (11)$$

В этом представлении $0 \leq a \leq q-1$, причём $a = 0$ лишь при $q = 1$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим те α , для которых в представлении (11)

$$q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}, \quad \eta(n) = 2^{n+1} + (n-1)^2,$$

а, через $\mathfrak{m}$ — обозначим оставшиеся α . Множество $\mathfrak{M}$ состоит из непересекающихся отрезков. Разобьём множество $\mathfrak{M}$ на множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{\mathcal{L}^2}{H} \right\}, \\ \mathfrak{M}_2 &= \left\{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{M}, \quad \frac{\mathcal{L}^2}{H} < \left| \alpha - \frac{a}{q} \right| \leq \frac{1}{q\tau} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $J(\mathfrak{M}_1)$, $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ соответственно интегралы по множествам $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{m}$. Будем иметь

$$J_n(N, H) = J(\mathfrak{M}_1) + J(\mathfrak{M}_2) + J(\mathfrak{m}) + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}^3}\right).$$

В последней формуле первый член, то есть $J(\mathfrak{M}_1)$, доставляет главный член асимптотической формулы для $J_n(N, H)$, а $J(\mathfrak{M}_2)$ и $J(\mathfrak{m})$ входят в его остаточный член.

4.1. Вычисление интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$.

По определению интеграла $J(\mathfrak{M}_1)$ имеем:

$$J(\mathfrak{M}_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \mathbb{F}(\alpha) e(-\alpha N) d\alpha = \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} I(a, q), \quad (12)$$

$$I(a, q) = e\left(-\frac{aN}{q}\right) \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2 H^{-1}} \mathbb{F}\left(\frac{a}{q} + \lambda; N, H\right) e(-\lambda N) d\lambda, \quad (13)$$

$$\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}(\alpha; N, H) = \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3).$$

Для нахождения асимптотической формулы функции $\mathbb{F}(\alpha; N, H)$, сначала найдем асимптотическое поведение суммы $S_1(\alpha; N_k, 2H)$, $k = 1; 2$, для этого полагая,

$$x = \mu_k N + H, \quad y = 2H, \quad A = 3 + \frac{n-1}{n} \eta(n), \quad b = \eta(n),$$

применим к этим суммам лемму 5. Воспользовавшись соотношениями

$$1, 5A + 0, 25\eta(n) + 18 = \frac{45}{2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{n}\right) \eta(n), \quad 1 - \theta(n) \geq 1 - \theta(3) = \frac{5}{6} < \frac{5}{8},$$

покажем, что выполняются следующие условия леммы 5, то есть

$$2H = 2N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{\omega(n)} \geq 2N_k^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{\omega(n)} \geq N_k^{\frac{5}{8}} (\ln N_k)^{\frac{45}{2} + (\frac{5}{4} - \frac{1}{n})\eta(n)},$$

$$\frac{\mathcal{L}^2}{H} = \frac{\mu_k N + 2H}{2\pi(2H)^2} \cdot \frac{8\pi H \mathcal{L}^2}{\mu_k N + 2H} \leq \frac{\mu_k N + 2H}{2\pi(2H)^2}.$$

согласно которым, находим

$$S_1(\alpha; N_k, 2H) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi \lambda H}{\pi \lambda} e(\lambda \mu_k N) + O\left(\frac{H}{(\ln(\mu_k N))^A}\right).$$

Воспользовавшись леммой 6, сумму $\mathcal{S}(\alpha; N_k, 2H)$, $k = 1, 2$ выражаем через сумму $S_1(\alpha; N_k, 2H)$, а затем пользуясь последней формулой, имеем

$$\mathcal{S}(\alpha; \mu_k N, H) = \frac{S_1(\alpha; \mu_k N + H, 2H)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H^2}{N}\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \frac{\sin 2\pi \lambda H}{\pi \lambda} \frac{e(\lambda \mu_k N)}{\ln(\mu_k N)} + O\left(\frac{H}{\mathcal{L}^{A+1}}\right).$$

Отсюда, и из соотношения $\frac{\sin 2\pi \lambda H}{\pi \lambda} \ll H$, найдём

$$\mathcal{S}(\alpha; \mu_1 N, H) \mathcal{S}(\alpha; \mu_2 N, H) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi \lambda H}{\pi^2 \lambda^2} \frac{e(\lambda(\mu_1 + \mu_2)N)}{\ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} + O\left(\frac{H^2}{\varphi(q) \mathcal{L}^{A+2}}\right). \quad (14)$$

Теперь воспользовавшись следствием 2 леммы 7, найдем асимптотическое поведение суммы $T(\alpha; N_3, H_3)$, $\alpha \in \mathfrak{M}_1$. Из неравенства $4nN^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}^{\eta(n)+2} \leq H = N^{1-\theta(n)}\mathcal{L}^{\omega(n)}$ следует, что выполняется условия этой леммы, то есть

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}^2}{H} &= \frac{1}{2nqN_3^{n-1}} \cdot \frac{2nqN_3^{n-1}\mathcal{L}^2}{H} = \frac{1}{2nqN_3^{n-1}} \cdot \frac{2nq\mu_3^{\frac{n-1}{n}}N^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}^2}{H} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2nqN_3^{n-1}} \cdot \frac{4nN^{1-\frac{1}{n}}\mathcal{L}^{\eta(n)+2}}{H} \leq \frac{1}{2nqN_3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому согласно следствию 2 леммы 7, находим

$$T(\alpha; N_3, H_3) = \frac{H_3}{q} S(a, q) \gamma(\lambda; N_3, H_3) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \quad (15)$$

Найдем асимптотическую формулу для $\gamma(\lambda; N_3, H_3)$. Пользуясь соотношением $N_3^n = \mu_3 N + H$, и формулой

$$N_3^{n-i} H_3^i = \frac{2^i N^{1-i} H^i}{n\mu_3^{i-1}} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right),$$

которая является следствием соотношений (6) и (7), имеем

$$\begin{aligned} \left(N_3 + H_3 \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^n &= N_3^n + nN_3^{n-1}H_3 \left(t - \frac{1}{2}\right) + \sum_{i=2}^n C_n^i N_3^{n-i} H_3^i \left(t - \frac{1}{2}\right)^i = \\ &= \mu_3 N + H + (2Ht - H) \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) + \sum_{i=2}^n C_n^i \frac{2^i N^{1-i} H^i}{n\mu_3^{i-1}} \left(t - \frac{1}{2}\right)^i \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) = \\ &= \mu_3 N + 2Ht + \mathbb{R}_2, \quad \mathbb{R}_2 \ll \frac{H^2}{N}. \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что $e(\lambda\mathbb{R}_2) - 1 \ll |\lambda|\mathbb{R}_2$ и $|\lambda| \ll \mathcal{L}^2 H^{-1}$, найдём

$$\gamma(\lambda; N_3, H_3) = \int_{-0,5}^{0,5} e(\lambda(\mu_3 N + 2Ht + \mathbb{R}_2)) dt = e(\mu_3 N \lambda) \frac{\sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} + O\left(\frac{H\mathcal{L}^2}{N}\right).$$

Подставляя правую часть этой формулы в (15), затем при оценке остаточного члена $\mathbb{R}_3$ воспользовавшись соотношением (7), оценкой $S(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 8) и условием $q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}$, а затем соотношением (5), получим

$$\begin{aligned} T(\alpha; N_3, H_3) &= \frac{S(a, q)}{q} \frac{H_3 \sin(2\pi H \lambda)}{2\pi H \lambda} (e(\mu_3 N \lambda) + \mathbb{R}_3), \\ \mathbb{R}_3 &\ll \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}} + q^{\frac{1}{2}+\varepsilon} = \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}} \left(1 + \frac{N^{2-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{-2} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n+\varepsilon}}{H^2}\right) = \\ &= \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}} \left(1 + N^{-\frac{n-3}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{-2-2\omega(n)} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\varepsilon}\right) \leq \\ &\leq \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}} \left(1 + N^{-\frac{n-3}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\nu(n)}\right), \quad \nu(n) = -2 - 2\omega(n) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \varepsilon\right) \eta(n), \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда, имея ввиду, что $\nu(3) = -\frac{56}{3} + 20\varepsilon$, находим

$$\mathbb{R}_3 \ll \frac{H^2 \mathcal{L}^2}{q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}}.$$

Почленно умножая формулы (14) и (16), затем при оценке остаточного члена этого произведения, который обозначим через $\mathbb{R}_4$, пользуясь неравенством $|\sin(2\pi H\lambda)| \ll |2\pi H\lambda|$, оценкой $S(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 8), соотношением (7) и условием (5), найдем

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(\alpha) &= \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} \cdot \frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3 \lambda^3} + \mathbb{R}_4, \\ \mathbb{R}_4 &\ll \frac{1}{\varphi^2(q)} \frac{\sin^2 2\pi\lambda H}{\pi^2 \lambda^2 \mathcal{L}^2} \mathbb{R}_3 + \frac{|S(a, q)|}{q} \frac{H_3 |\sin(2\pi H\lambda)|}{|2\pi H\lambda|} \frac{H^2}{\varphi(q) \mathcal{L}^{A+2}} + \frac{H^2}{\varphi(q) \mathcal{L}^{A+2}} \mathbb{R}_3 \ll \\ &\ll \frac{H^4}{\varphi^2(q) q^{\frac{1}{n}} N^{2-\frac{1}{n}}} + \frac{H^3}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A+2}} + \frac{H^4}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{2-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^A} = \\ &= \frac{H^3}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A+2}} \left(1 + \frac{H \mathcal{L}^{A+2}}{\varphi(q) N} + \frac{H \mathcal{L}^2}{N} \right) \ll \frac{H^3}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A+2}}.\end{aligned}$$

Подставляя значение функции $\mathbb{F}(\alpha)$, то есть правую часть последней формулы в (13), затем воспользовавшись оценкой $S(a, q) \ll q^{1-\frac{1}{n}}$ (лемма 8) и соотношением (7), найдём

$$\begin{aligned}I(a, q) &= \frac{H_3}{2H \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) J(H) + \mathbb{R}_5, \\ J(H) &= \int_{|\lambda| \leq \mathcal{L}^2 H^{-1}} \frac{\sin^3 2\pi\lambda H}{\pi^3 \lambda^3} d\lambda, \quad \mathbb{R}_5 \ll \frac{H^2}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^A}.\end{aligned}\tag{17}$$

Заменив $J(H)$ близким к нему несобственным интегралом независимым от $\mathcal{L}$ и воспользовавшись формулой (см. [20] стр. 174)

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n mu}{u^n} du = \frac{\pi m^{n-1}}{2^n (n-1)!} \left[n^{n-1} - \frac{n}{1!} (n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} (n-4)^{n-1} + \dots \right].$$

при $m = 1$ и $n = 3$, найдём

$$J(H) = \frac{4H^2}{\pi} \int_{|u| \leq 2\pi \mathcal{L}^2} \frac{\sin^3 u}{u^3} d\lambda = \frac{8H^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^3 u}{u^3} du + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^6}\right) = 3H^2 + O\left(\frac{H^2}{\mathcal{L}^6}\right).$$

Подставляя значение интеграла $J(H)$ в формулу (17), найдём

$$\begin{aligned}I(a, q) &= \frac{3HH_3}{2 \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \cdot \frac{\mu^2(q)S(a, q)}{q\varphi^2(q)} e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_6, \\ \mathbb{R}_6 &\ll \frac{\mu^2(q)|S(a, q)|}{q\varphi^2(q)} \cdot \frac{HH_3}{\mathcal{L}^8} + \mathbb{R}_5 \ll \frac{H^2}{q^{\frac{1}{n}} \varphi^2(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^8} + \frac{H^2}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^A}.\end{aligned}$$

Подставляя полученное значение интеграла $I(a, q)$, в (12), затем при оценке $\mathbb{R}_7$ воспользовавшись условием $A = 3 + \frac{n-1}{n}\eta(n)$, получим

$$\begin{aligned}I(\mathfrak{M}_1) &= \frac{3HH_3}{2 \ln(\mu_1 N) \ln(\mu_2 N)} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) + \mathbb{R}_7. \\ \mathbb{R}_7 &\ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}}} \sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} \left(\frac{1}{q^{\frac{1}{n}} \varphi^2(q) \mathcal{L}^8} + \frac{1}{q^{\frac{1}{n}} \varphi(q) \mathcal{L}^A} \right) \ll \\ &\ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^8} + \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{A-\frac{n-1}{n}\eta(n)}} \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}.\end{aligned}\tag{18}$$

Сумму по q в (18) заменим близким к ней бесконечным рядом, не зависящим от степени $\mathcal{L}$:

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N) = \mathfrak{S}(N) - R(N), \quad \Phi(q, N) = \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^q S(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right), \quad (19)$$

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N), \quad R(N) = \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N).$$

Представим особый ряд $\mathfrak{S}(N)$ в виде бесконечного произведения по всем простым числам, для этого сначала покажем, что сумма $\Phi(q, N)$ является мультипликативной функцией. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, тогда представляя переменную суммирования a в виде

$$a = a_1 q_2 + a_2 q_1, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 1 \leq a_1 \leq q_1, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad 1 \leq a_2 \leq q_2,$$

найдем

$$\Phi(q_1 q_2, N) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} S(a_1 q_2 + a_2 q_1, q_1 q_2) e\left(-\frac{(a_1 q_2 + a_2 q_1)N}{q_1 q_2}\right). \quad (20)$$

Представляя в сумме $S(a_1 q_2 + a_2 q_1, q_1 q_2)$ переменную суммирования x в виде

$$x = x_1 q_2 + x_2 q_1, \quad 1 \leq x_1 \leq q_1, \quad 1 \leq x_2 \leq q_2,$$

и имея в виду, что

$$(x_1 q_2 + x_2 q_1, q_1 q_2) = (x_1 q_2 + x_2 q_1, q_1)(x_1 q_2 + x_2 q_1, q_2) = (x_1 q_2, q_1)(x_2 q_1, q_2) = (x_1, q_1)(x_2, q_2),$$

имеем

$$\begin{aligned} S(a_1 q_2 + a_2 q_1, q_1 q_2) &= \sum_{x=1}^{q_1 q_2} e\left(\frac{(a_1 q_2 + a_2 q_1)x^3}{q_1 q_2}\right) = \sum_{x_1=1}^{q_1} \sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{(a_1 q_2 + a_2 q_1)(x_1 q_2 + x_2 q_1)^3}{q_1 q_2}\right) = \\ &= \sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1(x_1 q_2)^3}{q_1}\right) \sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2(x_2 q_1)^3}{q_2}\right) = \sum_{x_1=1}^{q_1} e\left(\frac{a_1 x_1^3}{q_1}\right) \sum_{x_2=1}^{q_2} e\left(\frac{a_2 x_2^3}{q_2}\right) = S(a_1, q_1) S(a_2, q_2). \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в правую часть (20), получим

$$\Phi(q_1 q_2, N) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} S(a_1, q_1) e\left(-\frac{a_1 N}{q_1}\right) \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} S(a_2, q_2) e\left(-\frac{a_2 N}{q_2}\right) = \Phi(q_1, N) \Phi(q_2, N).$$

Пользуясь абсолютной сходимостью $\mathfrak{S}(N)$ и мультипликативностью $\Phi(q, N)$, найдём

$$\mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N) = \prod_p \left(1 + \frac{\Phi(p, N)}{p(p-1)^2}\right).$$

Теперь вычислим $\Phi(p, N)$:

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \sum_{a=1}^{p-1} S(a, p) e\left(-\frac{aN}{p}\right) = \sum_{x=1}^p \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{a(x^n - N)}{p}\right) = \\ &= \sum_{x=1}^p \sum_{a=1}^p e\left(\frac{a(x^n - N)}{p}\right) - p = p(\rho(N, p) - 1). \end{aligned} \quad (21)$$

где $\rho(N, p)$ — число решений сравнения $x^n \equiv N \pmod{p}$. Следовательно,

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(N, p) - 1}{(p-1)^2} \right).$$

Теперь оценим $R(N)$. Воспользовавшись тем, что $\Phi(q, N)$ — мультипликативная функция, q — бесквадратное число, имеет место формула (21) и оценка $\rho(N, p) \leq n$. Найдем

$$\begin{aligned} R(N) &= \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \prod_{p \mid q} \Phi(p, N) = \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \prod_{p \mid q} (\rho(N, p) - 1) \leq \\ &\leq \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} (n-1)^{\omega(q)} = \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \exp(\omega(q) \ln(n-1)), \end{aligned}$$

где $\omega(q)$ — число различных простых делителей числа q . Воспользовавшись известными неравенствами

$$\frac{\varphi(q)}{q} \geq \frac{c_\varphi}{\ln \ln q}, \quad \omega(q) \leq \frac{c_\omega \ln q}{\ln \ln q},$$

а затем определением параметра $\eta(n)$, найдем

$$R(N) \ll \sum_{q > \mathcal{L}^{\eta(n)}} \frac{(\ln \ln q)^2}{c_\varphi^2 q^2} \exp\left(\frac{c_\omega \ln(n-1) \ln q}{\ln \ln q}\right) \ll \frac{1}{\mathcal{L}^{0,9\eta(n)}} \ll \frac{1}{\mathcal{L}^2}.$$

Таким образом соотношение (19) принимает вид

$$\sum_{q \leq \mathcal{L}^{736}} \frac{\mu^2(q)}{q\varphi^2(q)} \Phi(q, N) = \mathfrak{S}(N) + O(\mathcal{L}^{-2}).$$

Подставляя правую часть этого равенства в (18), а затем воспользовавшись формулой (7) и соотношением

$$\frac{1}{\ln(\mu_k N)} - \frac{1}{\mathcal{L}} = \frac{-\ln \mu_k}{(\mathcal{L} - \ln \mu_k) \mathcal{L}} \ll \frac{1}{\mathcal{L}^2},$$

получим

$$I(\mathfrak{M}_1) = \frac{3\mathfrak{S}(N)H^2}{n\mu_3^{1-\frac{1}{n}} N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + O\left(\frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}\right).$$

4.2. Оценка интеграла $I(\mathfrak{M}_2)$

Имеем

$$I(\mathfrak{M}_2) = \int_{\mathfrak{M}_2} e(-\alpha N) \mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H) \mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H) T(\alpha; N_3, H_3) d\alpha$$

Переходя к оценкам, а затем воспользовавшись неравенством Коши для интегралов, находим

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{M}_2) &\ll \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)| \int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)| |\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)| d\alpha = \\ &= \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)| \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_1, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\mathcal{S}(\alpha; N_2, 2H)|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)| (\pi(\mu_1 N + H) - \pi(\mu_1 N - H))^{\frac{1}{2}} (\pi(\mu_2 N + H) - \pi(\mu_2 N - H))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Применяя к двум последним множителям правой части полученной формулы, с учётом соотношения

$$H = N^{1-\theta(n)} \mathcal{L}^{\omega(n)} \geq (\mu_k N + H)^{\frac{7}{12}+\varepsilon}, \quad k = 1; 2,$$

лемму 9, найдём

$$\pi(\mu_k N + H) - \pi(\mu_k N - H) \ll \frac{H}{\mathcal{L}}.$$

Следовательно

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H}{\mathcal{L}} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)| = \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}{H} \max_{\alpha \in \mathfrak{M}_2} |T(\alpha; N_3, H_3)|. \quad (22)$$

Оценим $T(\alpha; N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{M}_2$. Если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad \frac{\mathcal{L}^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 1 \leq q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}.$$

Рассмотрим два возможных случая: $\frac{\mathcal{L}^2}{H} < |\lambda| \leq \frac{1}{2nqN_3^{n-1}}$ и $\frac{1}{2nqN_3^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}$.

Случай 1. Согласно следствию 2 леммы 7, имеем

$$T(\alpha; N_3, H_3) = \frac{H_3 S(a, q)}{q} \gamma(\lambda; N_3, H_3) + O\left(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \quad (23)$$

Оценим тригонометрический интеграл $\gamma(\lambda; N_3, H_3)$ по величине производной первого порядка (лемма 10), полагая $f(u) = \lambda \left(N_3 - \frac{H_3}{2} + H_3 t\right)^n$. Производная второго порядка $f''(u) = n(n-1)\lambda H_1^2 \left(N_3 - \frac{H_3}{2} + H_3 t\right)^{n-2}$ не меняет знак, и следовательно, производная первого порядка $f'(u)$ является монотонной функцией и удовлетворяет неравенству

$$|f'(u)| = n|\lambda|H_3N_3^{n-1} \left(1 + \frac{H_3}{N_3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^{n-1} \geq n|\lambda|H_3N_3^{n-1} \left(1 - \frac{(n-1)H_3}{N_3}\right).$$

Применяя к правой части последнего неравенства формулы

$$H_3N_3^{n-1} = 2H \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right), \quad \frac{H_3}{N_3} = \frac{2H}{n\mu_3N} \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right),$$

которые в свою очередь являются следствиями формул (6) и (7), получим

$$|f'(u)| \geq 2n|\lambda|H \left(1 + O\left(\frac{H}{N}\right)\right) \left(1 - \frac{2(n-1)H}{n\mu_3N} + O\left(\frac{H^2}{N^2}\right)\right) \geq n|\lambda|H.$$

Следовательно, воспользовавшись леммой 10, при $m = n|\lambda|H$ и $M = 1$, а затем условием $|\lambda| > \mathcal{L}^2 H^{-1}$, находим

$$|\gamma(\lambda; N_3, H_3)| \leq \frac{1}{n|\lambda|H} \leq \frac{1}{n\mathcal{L}^2}.$$

Переходя в (23) к оценкам, а затем воспользовавшись соотношением (7), тривиальной оценкой $S(a, q) \leq q$, полученной оценкой для $\gamma(\lambda; N_3, H_3)$, условием $q \leq \mathcal{L}^{\eta(n)}$ и формулой (5), последовательно найдём

$$\begin{aligned} |T(\alpha; N_3, H_3)| &\ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} + \mathcal{L}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\eta(n)} = \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(1 + \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\eta(n)+2}}{H}\right) = \\ &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(1 + N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)\eta(n)+2-\omega(n)}\right) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Случай 2. В этом случае, то есть при

$$\frac{1}{2nqN_3^{n-1}} < |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau},$$

воспользовавшись следствием 3 леммы 7, при $x = N_3$, $y = H_3$ и соотношением (6), а затем явным значением параметра H , то есть формулой (5), имеем

$$\begin{aligned} T(\alpha, N_3, H_3) &\ll q^{1-\frac{1}{n}} \ln q + \min \left(H_3 q^{-\frac{1}{n}}, N_3^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \right) \ll q\mathcal{L} + N_3^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} \ll \\ &\ll \mathcal{L}^{\eta(n)+1} + N^{\frac{1}{2n}} \mathcal{L}^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\eta(n)} = \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(\frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{\eta(n)+3}}{H} + \frac{N^{1-\frac{1}{2n}} \mathcal{L}^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\eta(n)+2}}{H} \right) = \\ &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\eta(n)+3} + N^{-\frac{n-3}{2n(n-1)}} \mathcal{L}^{\mathfrak{ae}(n)} \right), \quad \mathfrak{ae}(n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \eta(n) + 2 - \omega(n), \end{aligned}$$

Отсюда, имея в виду, что $\mathfrak{ae}(3) = -\frac{14}{3}$, получим

$$T(\alpha, N_3, H_3) \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}.$$

Из этой оценки и из оценки (24), ввиду соотношения (22) для всех $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, получим

$$I(\mathfrak{M}_2) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3}.$$

4.3. Оценка интеграла $J(\mathfrak{m})$

Поступая аналогично, как и в случае оценки $J(\mathfrak{M}_2)$, имеем

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^3} \cdot \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}{H} \max_{\alpha \in \mathfrak{m}} |T(\alpha; N_3, H_3)|. \quad (25)$$

Оценим $T(\alpha; N_3, H_3)$ для α из множества $\mathfrak{m}$. Если $\alpha \in \mathfrak{m}$, то

$$\alpha = \frac{a}{q} + \lambda, \quad (a, q) = 1, \quad |\lambda| \leq \frac{1}{q\tau}, \quad \mathcal{L}^{\eta(n)} < q \leq \tau, \quad \eta(n) = 2^{n+1} + (n-1)^2.$$

Пользуясь теоремой 2, при $x = N_3$, $y = H_3$ и воспользовавшись соотношениями

$$H_3 \asymp \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}}, \quad N_3 \asymp N^{\frac{1}{n}}, \quad \tau \asymp \frac{H}{N^{\frac{1}{n}}},$$

которые являются следствиями формул (7), (6) и (8), а затем явным значением параметра H , то есть формулой (5), имеем

$$\begin{aligned} |T(\alpha; N_3, H_3)| &\leq 2H_3 \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{H_3} + \frac{q}{H_3^n} \right)^{2^{-n}} (\ln q H_3)^{(n-1)^2 2^{-n}} \ll \\ &\ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^{2n+1+(n-1)^2}} + \frac{N^{1-\frac{1}{n}}}{H} + \frac{N^{n-1-\frac{1}{n}}}{H^{n-1}} \right)^{2^{-n}} \mathcal{L}^{(n-1)^2 2^{-n}} = \\ &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(1 + \frac{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^{2n+1+(n-1)^2}}{H} + \left(\frac{N^{1-\frac{1}{(n-1)n}} \mathcal{L}^{\frac{2^{n+1}}{n-1}+n-1}}{H} \right)^{n-1} \right)^{2^{-n}} = \\ &= \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2} \left(2 + N^{-\frac{n-2}{n(n-1)}} \mathcal{L}^{\frac{(n-2)2^{n+1}}{n-1}+n^2-3n+2} \right)^{2^{-n}} \ll \frac{H}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathcal{L}^2}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (25), находим

$$J(\mathfrak{m}) \ll \frac{H^2}{N^{1-\frac{1}{n}} \mathscr{L}^3}.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and square // Proc. London math.Soc. 1937. V. 11. P. 501–516.
2. Рахмонов З. Х. Тернарная задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2003. Т. 74. вып. 4. С. 564 – 572.
3. Рахмонов З. Х. Кубическая задача Эстермана с почти равными слагаемыми // Математические заметки. 2014. Т. 95. вып. 3. С. 445 – 456.
4. Рахмонов Ф. З., Рахимов А. О. Об одной аддитивной задаче с почти равными слагаемыми // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Издательство: Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского. ISSN: 1810-4134. 2016. № 8. С. 87 – 89.
5. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Чебышевский сборник. 2024. Т. 25. № 2(93). С. 139–168.
6. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Асимптотическая формула в проблеме Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2024. Т. 67. № 3-4. С. 125-136.
7. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Проблема Варинга с почти пропорциональными слагаемыми // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 9-10. С. 481-488.
8. Рахмонов З.Х., Рахмонов Ф.З. Поведение коротких тригонометрических сумм Г.Вейля в больших дугах // Доклады Национальной академии наук Таджикистана. 2023. Т. 66. № 11-12. С. 625-633.
9. Рахмонов З. Х. Обобщение проблемы Варинга для девяти почти пропорциональных кубов // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. № 3. С. 71-94
10. Рахмонов З. Х., Азамов А. З., Назрублов Н. Н. Короткие тригонометрические суммы Г. Вейля в малых дугах // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018 г. Т. 61. № 7-8. С. 609–614.
11. Рахмонов Ф.З. Оценка тригонометрических сумм с простыми числами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12. В. 1. С. 158–171.
12. Рахмонов Ф.З. Оценка квадратичных тригонометрических сумм с простыми числами // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2011. № 3. С. 56–60.
13. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Короткие кубические суммы простыми числами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2016. Т. 296. С. 220 – 242.

14. Рахмонов З. Х., Рахмонов Ф. З. Тригонометрические суммы с функцией Мёбиуса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. № 4. С. 281-305.
15. Марджанишвили К.К. Оценка одной арифметической суммы // ДАН СССР. 1939. Т. 22. № 7. С. 391-393.
16. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел — М.: Наука, 1983, 2-ое изд.
17. Собиров А. А. Короткие линейные тригонометрические суммы с простыми числами в окрестности центра больших дуг // Доклады НАН Таджикистана. 2021 г. Т. 64. № 11-12. С. 611 – 620.
18. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм — Москва: Наука. 1987 г.
19. Huxley M.N. On the differences between consecutive primes // Invent. math. 1972. V. 15. P. 164–170.
20. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. ч. 1. Основные операции анализа — Изд. 2-е. Перев. с англ. Москва: Физматгиз, 1963 г. -342 с.

REFERENCES

1. Estermann, T. 1937, “Proof that every large integer is the sum of two primes and square”, *Proc. London math. Soc.*, vol. 11, pp. 501-516.
2. Rakhmonov, Z. Kh. 2003, “Estermann’s ternary problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 74, Is. 4, pp. 534-542.
3. Rakhmonov, Z. Kh. 2014, “The Estermann cubic problem with almost equal summands”, *Mathematical Notes*, vol. 95, Is. 3-4, pp. 407–417.
4. Rakhmonov, F. Z., & Rakhimov, A. O. 2015, “On an additive problem with almost equal summands”, *Issledovaniya po algebre, teorii chisel, funktsional’nomu analizu i smezhnym voprosam. Izdatel’sтво: Saratovskiy natsional’nyy issledovatel’skiy gosudarstvennyy universitet im. N.G. Chernyshevskogo*, ISSN: 1810-4134, no 8, pp. 87–89, (in Russian).
5. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z. 2024, “Asymptotic formula in the Waring’s problem with almost proportional summands”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 25, Is. 2(93), pp. 139–168, (in Russian).
6. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z. 2024, “Asymptotic formula in the Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 67, no 3-4, pp. 125-136, (in Russian).
7. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z. 2023, “Waring’s problem with almost proportional summands”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 66, no 9-10, pp. 481-488, (in Russian).
8. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z. 2023, “Behavior of short exponential sums of G.Weyl in major arcs”, *Doklady Natsional’noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 66, no 11-12, pp. 625-633, (in Russian).
9. Rakhmonov, Z. Kh. 2023, “Generalization of Waring’s problem for nine almost proportional cubes”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 24, Is. 3, pp. 71–94, (in Russian).

10. Rakhmonov, Z. Kh., & Azamov, A.Z., Nazrubloev, N. N. 2018, "Of short Weyl's exponential sum in minor arcs", *Doklady Akademii nauk Respubliki Tajikistan*, vol. 61, no 7-8, pp. 609-614, (in Russian).
11. Rakhmonov, F. Z. 2011, "Estimation of trigonometric sums with prime numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 12, Is. 1, pp. 158–171, (in Russian).
12. Rahmonov, F. Z. 2011, "Estimate of quadratic trigonometric sums with prime numbers", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, no. 3, pp. 56–60.
13. Rakhmonov, Z. Kh., & Rakhmonov, F. Z. 2017, "Short Cubic Exponential Sums over Primes", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, pp. 211-233.
14. Rakhmonov, Z. Kh. & Rakhmonov, F. Z. 2024, "Short cubic exponential sums with Möbius function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, Is. 4, pp. 281–305, (in Russian).
15. Mardjhanashvili, K. K. 1939, "An estimate for an arithmetic sum", *Doklady Akad. Nauk SSSR*, vol. 22, no 7, pp. 391–393.
16. Karatsuba, A. A. 1993, "Basic analytic number theory", *Springer-Verlag, Berlin*, xiv+222 pp.
17. Sobirov, A. A. 2021, "Short linear exponential sums with primes in a neighborhood of the center of major arcs", *Doklady Natsional'noi akademii nauk Tadzhikistana*, vol. 64, no 11-12, pp. 611-620, (in Russian).
18. Arkhipov, G. I. & Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis", *Berlin–New-York: Walter de Gruyter*, 554 p.
19. Huxley, M. N. 1972, "On the differences between consecutive primes", *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 164 – 170.
20. Whittaker, G. E., & Watson, T. N. 1915, "A Course of Modern Analysis. Part 1. The processes of analysis. Part 2. The transcendental functions", *Cambridge, Cambridge University Press*, p. 620.

Получено: 05.05.2024

Принято в печать: 24.12.2024