

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 519.65:517.518.826

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-106-119

**Чебышевская аппроксимация в коэффициентной обратной задаче для алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом**

А. П. Локтионов, С. Г. Емельянов

**Локтионов Аскольд Петрович** — доктор технических наук, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: loara@mail.ru*

**Емельянов Сергей Геннадьевич** — доктор технических наук, профессор, Юго-Западный государственный университет (г. Курск).

*e-mail: rector@swsu.ru*

**Аннотация**

В статье посредством специально сконструированных узлов сетки аппроксимации определяется класс многочленов  $L_n(z, u)$  степени  $n \geq 1$ , наименее уклоняющихся от нуля на отрезке  $-1 \leq u \leq 1$ , равных нулю при  $u = -1$ . Для многочленов  $L_n(z, u)$ : описана связь с многочленами Чебышева первого рода; изучен  $n$ -точечный альтернанс; найдены экстремумы; получены точные выражения корней и координат точек максимума и минимума; выведена формула старшего коэффициента; найден отрезок, где многочлен монотонно возрастает и стремится к  $+\infty$  при  $u \rightarrow +\infty$ . Приведены конкретные примеры альтернанса второго, третьего и четвертого порядка. Мы рассматриваем алгебраические многочлены степени  $n$  с действительными коэффициентами. При обработке входных данных использована равномерная непрерывная норма абсолютной погрешности. Исследовано влияние погрешности входных данных на качество аппроксимации в коэффициентной обратной задаче для алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом. В задаче минимизации влияния погрешности входных данных целевая функция описана в виде абсолютного числа обусловленности задачи, равного значению функции Лебега. На графическом материале показано увеличение численного значения абсолютного числа обусловленности задачи при отклонении координат узлов сетки аппроксимации от оптимальных.

Для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления коэффициентов исследуемого алгебраического многочлена специально сконструировано расположение узлов сетки аппроксимации. При чебышевской аппроксимации получена связь узлов с точками альтернанса многочленов  $L_n(z, u)$  линейной функцией.

**Ключевые слова:** коэффициентная обратная задача, обработка данных, алгебраический многочлен, многочлены Чебышева, чебышевская аппроксимация.

**Библиография:** 20 названий.

**Для цитирования:**

Локтионов, А. П., Емельянов, С. Г. Чебышевская аппроксимация в коэффициентной обратной задаче для алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 106–119.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 519.65:517.518.826

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-106-119

**Chebyshev approximation in the coefficient inverse problem for an algebraic polynomial with a prescribed lowest coefficient**

A. P. Loktionov, S. G. Emelyanov

**Loktionov Askold Petrovich** – doctor of technical sciences, Southwest State University (Kursk).  
*e-mail: loapa@mail.ru*

**Emelyanov Sergey Gennadievich** –doctor of technical sciences, professor, Southwest State University (Kursk).

**Abstract**

In the article, by means of specially designed approximation grid nodes, the class of polynomials  $L_n(z, u)$  of degree  $n \geq 1$  is determined, which deviate least from zero on the interval  $-1 \leq u \leq 1$ , equal to zero at  $u = -1$ . For polynomials  $L_n(z, u)$  a connection with Chebyshev polynomials of the first kind is described; the  $n$ -point Chebyshev alternance was studied; extrema are found; exact expressions for the roots and coordinates of the maximum and minimum points are obtained; the formula of the senior coefficient is derived; a segment is found where the polynomial increases monotonically and tends to  $+\infty$  as  $u \rightarrow +\infty$ . Specific examples of the Chebyshev alternance of the second, third and fourth order are given.

We consider algebraic polynomials of degree  $n$  with real coefficients. When processing the input data, a uniform continuous rate of absolute error was used. The influence of input data error on the quality of approximation in the coefficient inverse problem for an algebraic polynomial with a prescribed lowest coefficient is studied. In the problem of minimizing the influence of the input data error, the objective function is described as an absolute condition number of the problem, equal to the value of the Lebesgue function. The graphical material shows the level of increase in the numerical value of the absolute condition number of the problem when the coordinates of the approximation grid nodes deviate from the optimal ones.

To minimize the influence of the input data error on the accuracy of calculating the coefficients of the studied algebraic polynomial, the location of the nodes of the approximation grid was specially designed. With the Chebyshev approximation, the connection of the nodes with the alternance points of the polynomials  $L_n(z, u)$  by a linear function is obtained.

*Keywords:* coefficient inverse problem, data processing, algebraic polynomial, Chebyshev polynomials, Chebyshev approximation.

*Bibliography:* 20 titles.

**For citation:**

Loktionov, A. P., Emelyanov, S. G. 2024, "Chebyshev approximation in the coefficient inverse problem for an algebraic polynomial with a prescribed lowest coefficient", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 106–119.

**1. Введение**

Восстановление коэффициентов алгебраических многочленов относится к обратным задачам математической физики, механики [1, 2, 3, 4]. Ограничение на конечность измерений и целесообразность вычисления конечного числа неизвестных параметров приводят к дискретной форме обратных задач. Отметим, что параметром регуляризации в обратных задачах в

дискретной форме эффективна характеристика распределения узлов сетки аппроксимации, например, шаг сетки [1]. Входные данные - значения исследуемого многочлена получают экспериментально в аналитическо-экспериментальных обратных задачах или расчетом на ЭВМ. Малая погрешность входных данных может вызвать большое возмущение решения [1, 5, 6]. Входные данные задаются на сетке аппроксимации таблицей, каждая точка которой связана с соответствующим узлом сетки аппроксимации. Часто таблицу аппроксимируют некоторыми разложениями по базису элементарных функций.

Обычно ищут наилучшее приближение в нормах  $C$  или  $L_2$ . Понятие близости уточняется видом приближения. Прохождение графика интерполяционного многочлена через значения исследуемой функции в узлах аппроксимации в ряде случаев нецелесообразно. Среднеквадратичное приближение вполне приемлемо при обработке экспериментальных результатов, оно сглаживает некоторые неточности входных данных, учитывает погрешности преобразования в узлах сетки аппроксимации [7]. Метод наименьших квадратов имеет вероятностное обоснование как метод максимального правдоподобия при использовании гипотезы нормального распределения погрешности в значениях входных данных. Нормальный закон распределения часто используется при моделировании случайных процессов. Если распределение погрешности (шумов) в статистических данных отличается от нормального распределения, то метод наименьших квадратов теряет свое вероятностное обоснование [6]. Эффективность среднеквадратичного приближения снижается при малой величине массива обрабатываемых экспериментальных результатов. Выбор метрики, как правило, определяется характером эксперимента [8]. В данной работе в задаче приближения ставим более жесткое условие – используем равномерную непрерывную норму абсолютной погрешности.

В проблеме минимизации погрешности аппроксимации выбором оптимальных узлов сетки аппроксимации, поставленной С. Н. Бернштейном [9], часть задач, учитывающих вид аппроксимационного многочлена и вид погрешности входных данных, решена, но все еще достаточно много нерешенных задач. Если учитывать только погрешность от замены исследуемой функции интерполяционным многочленом степени, меньшей степени исследуемой функции, то в качестве оптимальных узлов сетки выбирают нули многочлена Чебышева первого рода на отрезке  $[-1, 1]$  [10, 11].

Если в общем случае дополнительно учитывать погрешность входных данных, то для алгебраических многочленов решение задачи не получено [10, 11]. Для некоторых частных случаев есть методики построения сеток, близких к наилучшим, например есть рекомендации выбирать в качестве точек интерполяции кроме корней крайние точки многочлена Чебышева (см., например, [5, 10]). Выделим вычислительные задачи, в которых с учетом современного уровня развития вычислительной техники погрешность входных данных значительно превосходит погрешность округления в вычислительном процессе. В этом случае, если в коэффициентной обратной задаче известна степень  $n$  исследуемого алгебраического многочлена, то при равномерной непрерывной норме абсолютной погрешности входных данных эффективна чебышевская аппроксимация с узлами сетки в виде чередующихся точек максимума и минимума многочлена Чебышева первого рода степени  $n$  [12, 13].

Намного хуже исследованы способы построения наилучших приближений в коэффициентных обратных задачах для алгебраического многочлена с частично заданными коэффициентами, особенно у младших членов. Эти задачи относятся к задачам, при решении которых также используют многочлены Чебышева (см., например, [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]). Коэффициентные обратные задачи для алгебраического многочлена с частично заданными младшими коэффициентами родственны задачам с заданными старшими коэффициентами, например, первой и второй задачам Е. И. Золотарева, фильтровой задаче [14, 17]. В данной работе предложен метод решения задач последнего типа с использованием чебышевской аппроксимации для снижения влияния погрешности входных данных. Он применен к решению реальных прикладных задач для алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом.

## 2. Приближение по Лагранжу алгебраического многочлена

Пусть  $n$  некоторое натуральное число. Рассмотрим вычисление коэффициентов алгебраического многочлена степени  $n$  с заданным (предписанным) коэффициентом  $a_{n,n}$

$$P(a, x) = \sum_{r=0}^n a_{r,n} x^{n-r}, \quad a_{n,0} \neq 0. \quad (1)$$

Входные данные –  $P^*(a, x_i)$ ,  $i \in (1, \dots, n)$  значения многочлена (1) на отрезке  $[0, l]$  заданы таблицей в  $n$  узлах сетки аппроксимации

$$0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq l. \quad (2)$$

Таблица 1: Результаты вывода формул множителей Лагранжа в уравнении (5) ( $r = 2$ )

| $n$ | $i$ | Множители Лагранжа                                                  |
|-----|-----|---------------------------------------------------------------------|
| 2   | 1   | $1/[x_1(x_1 - x_2)]$                                                |
|     | 2   | $1/[x_2(x_2 - x_1)]$                                                |
| 3   | 1   | $-(x_2 + x_3)/[x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)]$                          |
|     | 2   | $-(x_1 + x_3)/[x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)]$                          |
|     | 3   | $-(x_1 + x_2)/[x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)]$                          |
| 4   | 1   | $(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)/[x_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)]$ |
|     | 2   | $(x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4)/[x_2(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)]$ |
|     | 3   | $(x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_4)/[x_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)]$ |
|     | 4   | $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)/[x_4(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)]$ |

Для многочлена (1) решаем коэффициентную обратную задачу вычисления коэффициентов многочлена  $a_{n,r}^*$

$$P^*(a, x) = a_{n,n} + \sum_{r=0}^{n-1} a_{n,r}^* x^{n-r},$$

приближенного к многочлену (1). Значения коэффициентов  $a_{n,r}^* \approx a_{n,r}$  вычисляются приближением по Лагранжу

$$a_{n,r}^* = \sum_{i=1}^n l_{n,r,i} [P^*(a, x_i) - a_{n,n}], \quad r \in (1, \dots, n) \quad (3)$$

в методе неопределенных коэффициентов. Формулы множителей Лагранжа  $l_{n,r,i}$  получаются решением системы уравнений

$$l_{n,r,i} x_i^j = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq n-r, \\ 1, & \text{при } j = n-r, \end{cases}$$

$$j = 1:n, \quad r \in (1, \dots, n)$$

В таблице 1 приведены полученные формулы множителей Лагранжа при  $n \in (2, 3, 4)$ .

### 3. Чувствительность аппроксимации к погрешности входных данных

Каждое из входных данных  $P^*(a, x_i)$  содержит погрешность

$$R[P_n(a, x_i)] = P_n^*(a, x_i) - P_n(a, x_i).$$

Для входных данных  $P^*(a, x_i)$  на точечном множестве  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  используем равномерную непрерывную норму абсолютной погрешности

$$||\Delta P_n(a, x_i)|| = \Delta_{\max}[P_n(a, x_i)] \geq \Delta P_n(a, x_i) = |R[P_n(a, x_i)]|. \quad (4)$$

Суммарная абсолютная погрешность по всем узлам сетки аппроксимации (2) есть

$$\Delta a_{n,r} = \sum_{i=1}^n l_{n,r,i} \Delta P_n^*(a, x_i). \quad (5)$$

Как отмечено во введении погрешностью округления в вычислительном процессе в сравнении с погрешностью входных данных пренебрегаем.

Уровень погрешности вычисления коэффициентов  $a_{n,r}$  и эффективность решения коэффициентной обратной задачи с обработкой входных данных об алгебраическом многочлене (1) оцениваем абсолютным числом обусловленности задачи  $\alpha_{n,r}(X)$ , связывающим неравенством

$$\Delta_{\max}[a_{n,r}] \leq \alpha_{n,r}(X) \cdot \sup \Delta_{\max}[P(a, x_i)] \quad (6)$$

верхние границы абсолютной погрешности решения  $\Delta_{\max}[a_{n,r}]$  и погрешности  $\Delta_{\max}[P_n(a, x_i)]$  многочлена (1) в узлах (2).

Всоответствии с формулами (1)–(6) абсолютное число обусловленности задачи  $\alpha_{n,r}(X)$  равно значению функции Лебега

$$\sum_{i=1}^n |l_{n,r,i}|.$$

По данным о множителях Лагранжа, представленным в таблице 1, результаты вывода формул функций Лебега при  $n \in (2, 3, 4)$  даны в таблице 2. С увеличением  $n$  и  $r$  функция Лебега

Таблица 2: Результаты вывода формул функций Лебега по данным о множителях Лагранжа ( $r = 2$ )

| $n$            | 2                                       | 3                                                                                        | 4                              |
|----------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| Функции Лебега | $\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}$ | $(x_2 + x_3) \frac{x_1(x_1 + x_3) + x_2(x_3 - x_2)}{x_1 x_2 x_3 (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)}$ | $\sum_{i=1}^4  l_{4,r,i}(0) .$ |

представима все более громоздкой алгебраической дробью. Функция Лебега с множителями Лагранжа  $l_{4,2,i}$  имеет вид дроби, числитель которой функция восьмой степени, а знаменатель десятой степени.

На качество приближения сильное влияние оказывает степень исследуемого многочлена, количество и расположение узлов сетки (2).

Для минимизации влияния погрешности входных данных на качество приближения используем специально сконструированное расположение узлов сетки (2). Для этого введем

константу Лебега второго рода  $\Lambda_{n,r,s}$ <sup>1</sup> в виде:

$$\Lambda_{n,r,i} = \min \sum_{i=1}^n |l_{n,r,i}|.$$

Считая абсолютное число обусловленности задачи  $\alpha_{n,r}(X)$  целевой функцией поставим задачу минимизации числа обусловленности, получения целевого параметра – константы Лебега второго рода по условию

$$\alpha_{n,r}(X) \sum_{i=1}^n |l_{n,r,i}| \rightarrow \min. \quad (7)$$

Специально сконструированные узлы сетки аппроксимации получаются решением задачи (7). Задача может быть реализована прямым аналитическим методом разыскания частных производных функции Лебега по переменным  $x_i$  с последующим получением безусловного экстремума (минимума) и оптимальных координат узлов сетки аппроксимации. Результаты решения задачи (7) представлены в таблице 3. Получены безразмерные координаты  $x_{n,i,d} = l x_{n,i}$ <sup>2</sup>, выраженные в действительных радикалах для  $n = 2, 3$ .

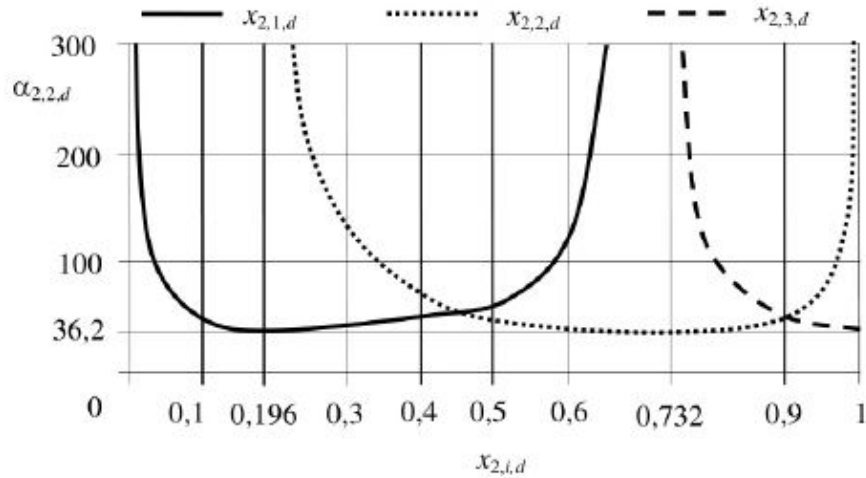
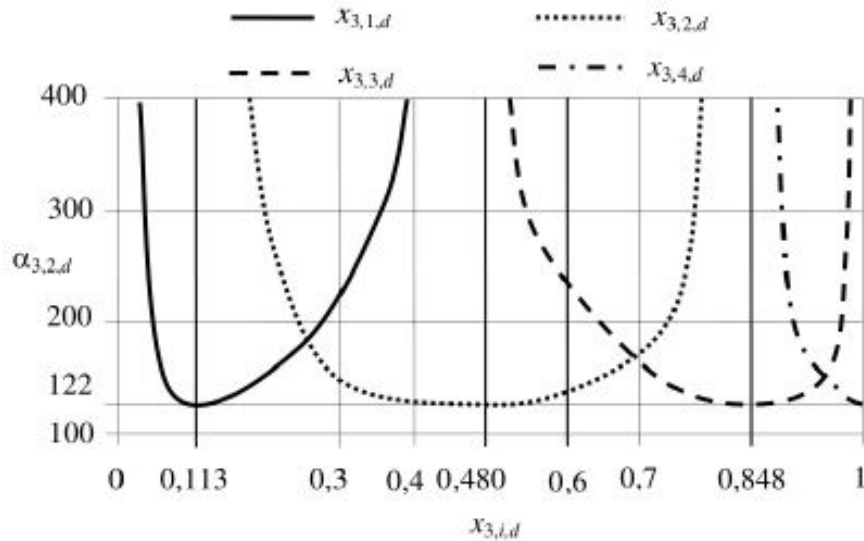


Рис. 1: Абсолютное число обусловленности  $\alpha_{2,2,d}$

<sup>1</sup> s-первая буква слова second

<sup>2</sup> d-первая буква слова dimensionless

Рис. 2: Абсолютное число обусловленности  $\alpha_{3,2,d}$ Таблица 3: Результаты вычисления оптимальных координат узлов сетки аппроксимации  $x_{n,i,d}$  при нахождении решения задачи (7) ( $x_{n,n,d} = 1,000$ )

| $n$        | 2               | 3                |                 | 4                                            |                                   |                            |
|------------|-----------------|------------------|-----------------|----------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| $i$        | 1               | 1                | 2               | 1                                            | 2                                 | 3                          |
| Координаты | $-1 + \sqrt{2}$ | $-5 + 3\sqrt{3}$ | $-1 + \sqrt{3}$ | $1 - \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{1+2/\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ | $-1 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ |
| Значения   | 0,4142          | 0,1962           | 0,7321          | 0,1127                                       | 0,4802                            | 0,8478                     |

Руководствуясь теоремой Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах для уравнений пятой и более высоких степеней и в силу сложности аналитического вывода частных производных функции Лебега с увеличением  $n$  координаты  $x_{4,i,d}$  на данном этапе исследования получены численным способом. Очевидно, отклонение координат узлов сетки аппроксимации от оптимальных увеличивает безразмерное абсолютное число обусловленности  $\alpha_{n,r,d} = l\alpha_{n,r}$ . У многочленов (1) отклонение каждой из координат  $x_{n,i}$  до половины текущего шага сетки при оптимальных остальных координатах в полтора раза увеличивает погрешность определения коэффициентов  $a_{2,2}$  и  $a_{3,2}$  (рис. 1 и 2).

В качестве альтернативы дифференцированию функции Лебега в разделе 5 рассмотрим чебышевскую аппроксимацию с альтернансной характеристикой распределения узлов сетки (2) с использованием экстремальных свойств многочленов. Предварительно в разделе 4 исследуем модифицирование многочлена Чебышева первого рода в многочлен, также наименее уклоняющийся от нуля на отрезке  $[-1, 1]$ , но равный нулю в точке с координатой  $(-1)$ .

#### 4. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ , равные нулю в точке с координатой $(-1)$

Пусть  $n$  – некоторое натуральное число. Введем в рассмотрение алгебраический многочлен степени  $n \geq 1$

$$L_n(z, u) = \sum_{i=1}^n z_i u^i, \quad (8)$$

допускающий на отрезке  $[-1, 1]$  представление сложной функцией

$$L_n(z, u) = \cos(n \arccos \tau_n(u)) \quad (9)$$

от вспомогательной переменной  $\tau_n$ , которая в свою очередь зависит от аргумента  $u$  так, что:

$$\tau_n = 1 + \psi_n(u - 1), \quad (10)$$

где  $\psi_n = \cos^2 \frac{\pi}{4n}$ .

Очевидно, многочлен (9) «похож» на многочлен Чебышева первого рода, если в многочлен Чебышева ввести особенность представления сложной функцией  $T_n[\tau(u)]$ . Следующее утверждение дает исчерпывающий ответ о форме и свойствах многочлена  $L_n(z, u)$ .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Имеют место следующие свойства многочлена  $L_n(z, u)$ : 1) многочлен  $L_n(z, u)$  на отрезке  $[-1, 1]$  имеет  $n$  действительных корней

$$u_{n,k,i} = 1 + \frac{\tau_{n,k,i} - 1}{\psi_n}, \quad i \in (1, \dots, n), \quad (11)$$

в том числе корень  $u_{n,k,1} = -1$ , где

$$\tau_{n,k,i} = -\cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}, \quad i \in (1, \dots, n) \quad (12)$$

– корни многочлена Чебышева первого рода; 2) на отрезке  $[-1, 1]$  справедливо равенство  $\max |L_n(z, u)| = 1$ , максимум достигается в  $n$  точках

$$u_{n,m,i} = 1 + \frac{\tau_{n,m,i+1} - 1}{\psi_n}, \quad i \in (1, \dots, n) \quad (13)$$

при  $i \in (1, \dots, n)$ , точки (13) вычисляются через координаты точек максимума и минимума многочлена Чебышева первого рода

$$\tau_{n,k,i} = -\cos \frac{i\pi}{n}, \quad i \in (1, \dots, n), \quad (14)$$

имеют место экстремумы  $L_n(z, u) = (-1)^{n-i}$  в точках (13) при  $i \in (1, \dots, n-1)$ ; 3) старший коэффициент многочлена равен  $2^{n-1}\psi_n^n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Справедливость первого и второго утверждений непосредственно следует из выражения для корней и точек максимума и минимума многочлена (9) и из формулы многочлена Чебышева первого рода, допускающего на отрезке  $[-1, 1]$  представление в виде

$$T_n(\tau) = \cos(n \arccos \tau). \quad (15)$$

В частности, в силу этой формулы многочлен Чебышева имеет на отрезке  $[-1, 1]$  ровно  $n$  различных действительных корней, все они задаются формулой (см., например, [11], глава 9)

$$\tau_{n,k,i} = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad i \in (0, \dots, n-1),$$

с увеличением  $i$  корни расположены на оси  $\tau$  справа налево. Используем тригонометрические формулы приведения с опорной точкой  $\pi$  и получаем формулы корней (12), по которым с увеличением  $i$  корни расположены на оси слева направо. Далее для доказательства формул (11) достаточно воспользоваться равенством (10). Очевидно, что условие  $L_n(z, -1) = 0$  подтверждается непосредственно результатом  $u_{n,k,1} = -1$  по (11).



2) Непосредственно из того, что  $L_n(z, u) = \cos n\varphi$  при  $\tau = \cos \varphi$ , следует, что  $|L_n(z, u)| \leq 1$  при  $\tau \leq 1$ , чему эквивалентно равенство  $\max |L_n(z, u)| = 1$ . Понятно, что многочлен Чебышева имеет на отрезке  $[-1, 1]$  ровно  $n + 1$  различных точек экстремумов, которые задаются справа налево на оси  $\tau$  формулой (см., например, [11], глава 9)

$$\tau_{n,m,i} = \cos \frac{i\pi}{n}, \quad i \in (0, \dots, n) \quad (16)$$

или при задании слева направо формулой:

$$\tau_{n,m,i} = -\cos \frac{i\pi}{n}, \quad i \in (0, \dots, n). \quad (17)$$

По равенству (10) из  $n + 1$  точек одна из точек  $u_{n,m,0} < -1$  расположена вне отрезка  $[-1, 1]$ , а  $n$  значимых точек  $u_{n,m,1}, \dots, u_{n,m,n}$  находятся на отрезке  $[-1, 1]$ . Для получения координат значимых точек формула (17) преобразуется в формулу (14) с последующей подстановкой результата в формулу (13). Отметим, что  $L_n(z, u_{n,m,n}) = 1$ . Точка  $u_{n,m,n}$  находится на полуоси  $(u_{n,m,n-1}, +\infty)$ , где многочлен  $L_n(z, u)$  монотонно возрастает и стремится к  $+\infty$  при  $u \rightarrow +\infty$  (рис. 3). Известно, что многочлен  $T_n(\tau)$  имеет  $n + 1$  точечный альтернанс в точках (16) (см., например, [11], глава 9). От точек (16) переходим к  $n$  точкам (13) многочлена  $L_n(z, u)$  линейной подстановкой (10). Ясно, что такая подстановка переносит альтернансность многочлена  $T_n(\tau)$  многочлену  $L_n(z, u)$  на точках (13).

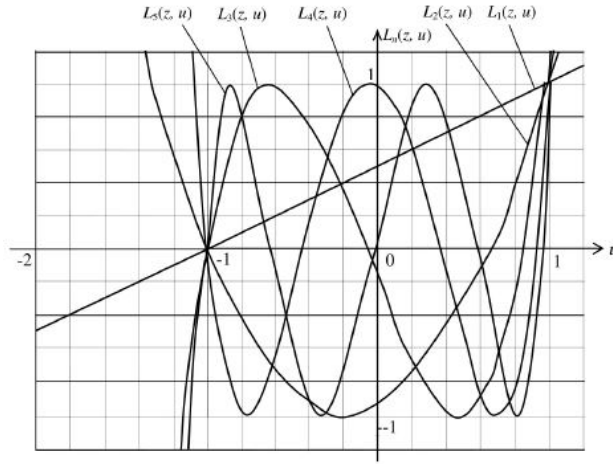


Рис. 3: Многочлены  $L_n(z, u)$  на отрезке  $[-1, 1]$  для  $n \in (1, \dots, 5)$

3) Как известно, у многочлена (15) старший коэффициент равен  $2^{n-1}$  (см., например, [18]), многочлен (15) может быть представлен в виде:

$$T_n(\tau) = 2^{n-1} \prod_{i=1}^n (\tau - \tau_{n,k,i}).$$

Тогда у многочлена (8) в виде произведения коэффициента  $z_0$  и  $n$  линейных сомножителей  $(u - u_{n,k,i})$ , а именно в виде

$$L_n(z, u) = z_0 \prod_{i=1}^n (u - u_{n,k,i}).$$

согласно (10) старший коэффициент  $z_0$  равен  $2^{n-1}\psi_n^n$ .

Вид многочленов  $L_n(z, u)$  и их особые точки в зависимости от степени  $n$  рассмотрим на частных примерах.

$$n = 1: \quad L_1(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u; \quad u_{1,k,1} = -1, \\ u_{1,m,1} = 1;$$

$$n = 2: \quad L_2(u) = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}u + \frac{3+2\sqrt{2}}{4}u^2, \quad u_{2,k,1} = -1, \\ u_{2,k,2} = -5 + 4\sqrt{2} \approx 0.6569, \\ u_{2,m,1} = -3 + 2\sqrt{2} \approx 0.1716, \\ u_{2,m,2} = 1;$$

$$n = 3: \quad L_3(u) = \frac{2-3\sqrt{3}}{16} - \frac{18+15\sqrt{3}}{16}u + \frac{6+3\sqrt{3}}{16}u^2 + \frac{26+15\sqrt{3}}{16}u^3, \quad u_{3,k,1} = -1, \\ u_{3,k,2} = -7 + 4\sqrt{3} \approx -0.0718, \quad u_{3,k,3} = -13 + 8\sqrt{3} \approx 0.8564, \\ u_{3,m,1} = -11 + 6\sqrt{3} \approx 0.6077, \quad u_{3,m,2} = -3 + 2\sqrt{3} \approx 0.4641, \\ u_{3,m,3} = 1;$$

$$n = 4: \quad u_{4,k,1} = -1, \\ u_{4,k,2} = -2\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + 1 \approx -0.4374, \quad u_{4,k,3} = -2\frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + 1 \approx 0.3583, \\ u_{4,k,4} = -2\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + 1 \approx 0.9209, \quad u_{4,m,1} = 1 - 2\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 0.7747, \\ u_{4,m,2} = \frac{2}{1+2/\sqrt{2+\sqrt{2}}} - 1 \approx -0.0396, \quad u_{4,m,3} = 2\sqrt{2+\sqrt{2}} - 3 \approx 0.6955, \\ u_{4,m,4} = 1;$$

$$n = 5: \quad u_{5,k,1} = -1, \\ u_{5,k,2} = -2\frac{4+\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx -0.6276, \quad u_{5,k,3} = \frac{8}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx -0.0251, \\ u_{5,k,4} = -2\frac{4-\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx 0.5774, \quad u_{5,k,5} = -2\frac{4-\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx 0.9498, \\ u_{5,m,1} = -2\frac{5+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx -0.8544, \quad u_{5,m,2} = -2\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx -0.3419, \\ u_{5,m,3} = -2\frac{5-\sqrt{5}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx 0.2917, \quad u_{5,m,4} = -2\frac{3-\sqrt{5}}{4+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}} + 1 \approx 0.8042.$$

Многочлены  $L_n(z, u)$ , их корни и точки экстремума выражаются посредством иррациональных выражений. В большинстве случаев точные выражения выглядят весьма громоздко.

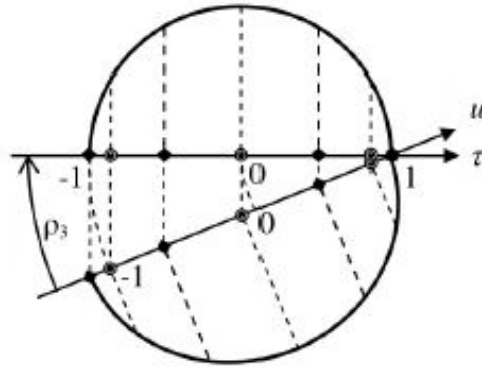


Рис. 4: Геометрическая интерпретация построения корней и точек экстремума многочлена  $L_3(z, u)$  ( $\cos \rho_3 = \psi_3$ )

На рис. 4 на частном примере многочлена третьей степени указано, что преобразование координат корней и точек экстремума многочлена  $T_n(\tau)$  в соответствующие координаты многочлена  $L_n(z, u)$  имеет геометрическую интерпретацию уравнения (10). Введем угол  $\rho_n = \arccos \psi_n$ . В верхней части рис. 4 представлены построенные по методике ([4], с. 152) корни (12) и точки экстремума (16) многочлена  $T_3(\tau)$ , а в нижней части – корни (11) и точки экстремума (13) многочлена  $L_3(z, u)$ . Корни многочленов помечены кружочками, точки экстремума помечены ромбиками. Далее применим эти результаты к решению коэффициентной задачи для многочлена (1).

## 5. Чебышевская интерполяция в коэффициентной обратной задаче

На вопрос, что собой представляет специально сконструированное расположение узлов сетки (2) по условию (8), ответ дает следующее утверждение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.** Если в коэффициентной обратной задаче известна степень  $n$  исследуемого алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом, то при равномерной непрерывной норме абсолютной погрешности входных данных для минимизации влияния погрешности входных данных на точность вычисления коэффициентов многочлена сетка аппроксимации (2) представима альтернансом многочлена  $L_n(z, u)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение доказывается по индукции. Так как многочлены  $P_n(a, x)$  и  $L_n(z, u)$  рассматриваются на различающихся отрезках, то используется формула приведения координаты  $u$  на отрезке  $[-1, 1]$  к координате  $x$  на отрезке  $[0, l]$

$$x = \frac{u+1}{2}l, \quad u \in [-1, 1],$$

которая для координат точек (13)  $n$ -точечного альтернанса многочлена  $L_n(z, u)$  трансформируется в формулу

$$x_{n,i} = \frac{u_{n,m,i} + 1}{2}l, \quad i = 1:n. \quad (18)$$

Если в функцию (18) при  $u_{n,m,i}$ , равном двум, трем и четырем, на место переменной  $u_{n,m,i}$  подставить функцию (13) с учетом функции (14), то получим все представленные в таблице 3 явные формулы в радикалах и численные значения оптимальных координат узлов сетки аппроксимации. Совпадение этих результатов с результатами, полученными по критерию (6) доказывает утверждения 1 и 2. Нет сомнений в том, что функция (18) применима и при  $n > 4$

вместо вывода громоздких формул координат узлов сетки аппроксимации вида координат, представленных в таблице 3. Утверждение 2 дает альтернативную характеристику решения коэффициентной задачи для многочлена (1).

## 6. Заключение

В данной работе был рассмотрен подход к решению коэффициентной обратной задачи для алгебраического многочлена с предписанным младшим коэффициентом как задачи чебышевской аппроксимации, основанной на специально сконструированном расположении узлов сетки аппроксимации. В качестве целевой функции использовано абсолютное число обусловленности задачи, равное значению функции Лебега. При обработке входных данных, заданных равномерной непрерывной нормой абсолютной погрешности, это означает минимизацию влияния погрешности входных данных. Данный подход в вычислительном плане приводит к использованию приближения по Лагранжу и решению задачи построения многочлена  $L_n(z, u)$ , наименее уклоняющегося от нуля на отрезке  $[-1, 1]$  и равного нулю в точке с координатой  $(-1)$ . Приведены примеры построения сетки аппроксимации в виде альтернанса многочлена  $L_n(z, u)$ .

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bakushinsky A. B., Kokurin M. M., Kokurin M. Yu. Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Inverse and Ill-Posed Problems Series, 61. De Gruyter; Boston, USA, 2018.
2. Ватульян А. О., Плотников Д. К. Обратные коэффициентные задачи в механике // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. №3. С. 37-47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.
3. Самарский А.А, Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики, М.: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с.
4. Добровольский Н. Н., Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. О решениях обратных задач дифракции звуковых волн // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20. Вып. 3. С. 220–245. DOI 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-245
5. Cheney E.W., Kincaid D.R. Numerical Mathematics and Computing. Thomson Brooks/Cole; Belmont, California, USA, 2013.
6. Горелик В. А., Золотова Т. В. Полный метод чебышевской интерполяции в задаче построения линейной регрессии // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23. Вып. 4. С. 52–63. DOI 10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63
7. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов, М.: Физматлит, 2005. 304 с.
8. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач, М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
9. Бернштейн С.Н. Об ограничениях значений многочлена  $P_n(x)$  степени  $n$  на всем отрезке по его значениям в  $n+1$  точках отрезка. Собр.соч. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954, с.107-126.
10. Бабенко К. И. Основы численного анализа, М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.
11. Вержбицкий В.М. Основы численных методов, М ; Берлин : Директ-Медиа, 2021. 850 с.

12. Loktionov A. P. Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel // Telecommunications and Radio Engineering. 2013. Vol. 72, № 2, p. 161-171. DOI: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.
13. Локтионов А. П. Чебышёвский альтернанс при аппроксимации начальных условий обратной задачи Коши // Известия Юго-Западного государственного университета. 2021. Т. 25(3). С. 86-102. <https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102>.
14. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. В: Золотарев Е.И. Собр.соч. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР; 1932. С. 1-59.
15. Агафонова И. В., Малоземов В. Н. Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Доклады Академии наук. 2016. Т. 5. Вып. 467. С. 255–256. DOI: 10.7868/S0869565216090036.
16. Малоземов В.Н. Что даёт информация об альтернансе? В: Малозёмов В.Н. Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 259-267.
17. Малоземов В.Н., Тамасян Г.Ш. Этюд на тему полиномиальной фильтровой задачи ( $n = 3$ ). В: Малозёмов В.Н. Избранные лекции по экстремальным задачам. Часть вторая. СПб.: Изд-во ВВМ, 2017. С. 305-315.
18. Прасолов В.В. Многочлены, М : МЦНМО, 2003. 336 с.
19. Агафонова И. В., Малоземов В. Н. Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 65(7). Вып. 1. С. 3-14.
20. Соловьев С. Ю. Об одном классе множителей многочленов Чебышева // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 4. С. 241–252. DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252

## REFERENCES

1. Bakushinsky, A. B., Kokurin, M. M. & Kokurin, M.Yu. 2018, *Regularization Algorithms for Ill-Posed Problems. Inverse and Ill-Posed Problems Series*, 61, De Gruyter, Boston, USA.
2. Vatulyan, A. O., Plotnikov, D. K. 2019, “Inverse coefficient problems in mechanics”, *Vestnik Permского nacional'nogo issledovatel'skogo politexnicheskogo universiteta. Mexanika (PNRPU MECHANICS BULLETIN)*, no. 3, pp. 37-47. doi: 10.15593/perm.mech/2019.3.04.
3. Samarskii, A. A., Vabishevich, P. N. 2009, “Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics”, *Izd. LKI*, Moscow, 480 p.
4. Dobrovol'skii, N. N., Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov L. A. 2019, “About solutions of inverse problems sound waves diffraction”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 220-245. doi: 10.22405/2226-8383-2019-20-3-220-245
5. Cheney, E. W., Kincaid, D. R. 2013, “Numerical Mathematics and Computing”, *Thomson Brooks/Cole*, Belmont, California, USA.
6. Gorelik, V. A., Zolotova, T. V. 2020, “Method of parametric correction in data transformation and approximation problems”, *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Vol. 12422. P.122-133. doi: 10.22405/2226-8383-2022-23-4-52-63

7. Turchak, L. I., Plotnikov, P. V. 2005, "Fundamentals of Numerical Methods", *Fizmatlit*, Moscow, 304 p.
8. Denisov, A. M. 1994, "Introduction to the theory of inverse problems", *Izd-vo MGU*, Moscow, 208 p.
9. Bernshtejn, S. N. 1954, "On the restrictions on the values of the polynomial  $P_n(x)$ , squeeze  $n$  on the entire segment by its values at  $n + 1$  points of the segment", // In: *Bernshtejn, S.N. Sobr.soch., 2. [Bernshtejn, S.N. Collected works, 2]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 107-126. p.
10. Babenko, K. I. 2002, "Fundamentals of Numerical Analysis", *NiTs Regul. Khaot. Dinamika*, Moscow, Izhevsk, 848 p.
11. Verzhbickij, V. M. 2021, "Fundamentals of numerical methods", *Direkt-Media*, Moscow, Berlin, 850 p.
12. Loktionov, A. P. 2013, "Regularization of the lattice time function of the signal in the communication channel", *Telecommunications and Radio Engineering*, vol. 72, no. 2, pp. 161-171. doi: 10.1615/TelecomRadEng.v72.i2.70.
13. Loktionov, A. P. 2021, "Chebyshev Alternance when Approximating Initial Conditions of the Inverse Cauchy Problem", *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta (Proceedings of the Southwest State University)*. vol. 25(3), pp. 86-102. [https://doi.org/ 10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102](https://doi.org/10.21869/2223-1560-2021-25-3-86-102).
14. Zolotarev, E.I. 1932, "Application of elliptic functions to questions about functions deviating least and most from zero", *Zolotarev E.I., Sobr.soch., Vypusk 2. [Zolotarev E.I., Collected works, Issue 2]*, Izdat. Akad. Nauk SSSR; Leningrad, pp. 1-59.
15. Agafonova, I. V., Malozemov, V. N. 2016, "Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials", *Doklady Akademii nauk (Dokl. Akad. Nauk)*. vol. 467(5), pp.255-256. doi: 10.7868/S0869565216090036.
16. Malozemov, V. N. 2017, "What does information about alternance give?", *Malozemov V.N. Selected lectures on extremal problems. Part two*. [Selected lectures on extremal problems. Part two]. Izd-vo VVM, St. Petersburg, pp. 259-267.
17. Malozemov, V. N., Tamasyan, G. Sh. 2017, "Etude on the theme of the polynomial filter problem ( $n = 3$ )", *Malozemov V.N. Selected lectures on extremal problems. Part two*. [Selected lectures on extremal problems. Part two] Izd-vo VVM, St. Petersburg, pp. 305-315.
18. Prasolov, V. V. 2004, "Polynomials", *Springer-Verlag*, Berlin, 316 p.
19. Agafonova, I. V., Malozemov, V. N. 2020, "Extremal polynomials connected with Zolotarev polynomials", *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya (Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy)*. Vol. 7 (65), issue 1, pp. 3-14.
20. Soloviev, S. Y. 2021, "On a class of factors of the Chebyshev polynomials", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 22, № 4, pp. 241-252. doi: 10.22405/2226-8383-2021-22-4-241-252.

Получено: 09.06.2024

Принято в печать: 24.12.2024