

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-74-105

Погрешность приближенного интегрирования на классах функций, заданных моноидами натуральных чисел¹

Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Ю. А. Басалов, И. Ю. Реброва

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com***Добровольский Николай Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: dobrovol@tsput.ru***Басалов Юрий Александрович** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: dobrovol@tsput.ru***Реброва Ирина Юрьевна** — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).*e-mail: i_rebrova@mail.ru***Аннотация**

В работе получены ответы на следующие вопросы.

Во-первых, вопрос о том, в каком случае номера гармоник из класса M_s^α не попадают в решётку решений линейного сравнения, соответствующего параллелепипедальной сетке. В результате появился новый объект исследования — пересечение решётки решений линейного сравнения, соответствующего параллелепипедальной сетке, и многомерного моноида, задающего класс функций.

Во-вторых, как выглядят граничные функции этих классов для параллелепипедальных сеток. Здесь не получилось простого конечного вида в виде выражения от элементарных функций, а только выражение в виде рядов согласно общей теории. Оценка погрешности приближенного интегрирования на классе M_s^α связана с изучением нового теоретико-числового объекта — гиперболической дзета-функции пересечения решётки решений линейного сравнения и многомерного моноида, задающего класс функций. Здесь удалось получить аналог усиленной теоремы Бахвалова — Коробова.

Наконец, третий вопрос, связанный с тем фактом, что параллелепипедальные сетки — это сетки интерполяционного типа: какова погрешность интерполяционных многочленов для допустимых параллелепипедальных сеток в случае моноида $M_{q,1}$. Здесь ответ получился следующий: интерполяционные формулы по параллелепипедальным сеткам точны только для некоторых тригонометрических многочленов, у которых все гармоники попадают в полную систему вычетов фундаментальной решётки по подрешётки решений соответствующего линейного сравнения. В общем случае оценка погрешности аналогична оценкам для класса Коробова.

Ключевые слова: классы функций, квадратурные формулы, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел.

Библиография: 17 названий.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ № 23-21-00317 “Геометрия чисел и диофантовы приближения в теоретико-числовом методе в приближенном анализе”.

Для цитирования:

Добровольский, Н.Н., Добровольский, Н.М., Басалов, Ю.А., Реброва, И.Ю. Погрешность приближенного интегрирования на классах функций, заданных моноидами натуральных чисел // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 74–105.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-74-105

Error of approximate integration and interpolation on classes of functions defined by monoids of natural numbers²

N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, Yu. A. Basalov, I. Yu. Rebrova

Dobrovo'lskii Nikolay Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Dobrovol'skii Nikolay Mikhailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Basalov Yuri Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The paper provides answers to the following questions:

First, the question is in which case the harmonic numbers from the class M_s^α do not fall into the lattice of linear comparison solutions corresponding to the parallelepipedal grid. As a result, a new object of research has appeared – the intersection of the lattice of linear comparison solutions corresponding to a parallelepipedal grid and a multidimensional monoid defining a class of functions.

Secondly, what do the boundary functions of these classes look like for parallelepipedal grids. Here we did not get a simple finite form in the form of an expression from elementary functions, but only an expression in the form of series according to the general theory. The estimation of the error of approximate integration on the class M_s^α is associated with the study of a new number-theoretic object – the hyperbolic zeta function of the intersection of the lattice of solutions of linear comparison and a multidimensional monoid defining a class of functions. Here it was possible to obtain an analogue of the enhanced Bakhvalov–Korobov theorem.

Finally, the third question is related to the fact that parallelepipedal grids are interpolation-type grids: what is the error of interpolation polynomials for valid parallelepipedal grids in the case of the monoid $M_{q,1}$. The answer here is as follows: interpolation formulas for parallelepipedal grids are accurate only for some trigonometric polynomials, in which all harmonics fall into the complete system of deductions of the fundamental lattice by the sublattice of solutions of the corresponding linear comparison. In general, the error estimate is similar to the estimates for the Korobov class.

² Acknowledgments: The reported study was funded by the RSF grant №23-21-00317 “Geometry of numbers and Diophantine approximations in the number-theoretic method in approximate analysis”.

Keywords: classes of functions, quadrature formulas, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M., Basalov, Yu.A. Rebrova, I.Yu. 2024, "Error of approximate integration on classes of functions defined by monoids of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 74–105.

1. Введение

В работе [9] для произвольного моноида M натуральных чисел был определён новый класс функций M_s^α .

В работе [8] изучалась погрешность приближенного интегрирования с точки зрения величины гиперболического параметра сетки.

Целью данной работы является получение оценки погрешности приближенного интегрирования на классе функций M_s^α с помощью величины гиперболического параметра сетки.

Уже при $s = 1$ мы видим парадоксальное поведение погрешности приближенного интегрирования на классе M_1^α по равномерным сеткам из N точек. В размерности $s = 1$ имеется только одна параллелепипедальная сетка из N точек:

$$\left(\frac{k}{N}\right) \quad (k = 0, \dots, N-1).$$

Для погрешности приближенного интегрирования периодической функции

$$f(x) = \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m x}$$

по равномерной сетке:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{N} f\left(\frac{k}{N}\right) - R_N[f(x)]$$

справедливо равенство

$$R_N[f(x)] = \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M}^{\infty} c(m) \delta_N(m),$$

где символ Коробова $\delta_N(m)$ задан равенствами

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для нормы $R_N[M^\alpha]$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе M^α по равномерной сетке имеем равенство

$$R_N[M^\alpha] = \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M}^{\infty'} \frac{\delta_N(m)}{|m|^\alpha} = 2 \sum_{m=1, m \in M}^{\infty} \frac{\delta_N(m)}{m^\alpha}.$$

Если моноид M натуральных чисел не содержит чисел $m \equiv 0 \pmod{N}$, то $R_N[M^\alpha] = 0$ и квадратурная формула с равномерной сеткой точна на классе M^α .

Пусть $q(M, N)$ — наименьший элемент моноида M сравнимый с 0 по модулю N . Обозначим через $M(N)$ мультипликативный подмоноид натуральных чисел из моноида M , которые

сравнимы с 0 по модулю N . Очевидно, что $q(M, N)$ наименьший элемент этой подгруппы, а если к ней добавить 1, то получится моноид натуральных чисел, который обозначим через $M^*(N)$.

Очевидно, что справедливо равенство

$$R_N[M^\alpha] = 2(\zeta(M^*(N)|\alpha) - 1) = 2\zeta(M(N)|\alpha).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q(M, N))^\alpha} &\leq \zeta(M(N)|\alpha) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(q(M, N) + mN)^\alpha} = \alpha \int_{q(M, N)}^{\infty} \frac{\left[\frac{x-q(M, N)}{N}\right] + 1}{x^{\alpha+1}} dx < \\ &< \alpha \int_{q(M, N)}^{\infty} \frac{x - q(M, N) + N}{Nx^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)N \cdot (q(M, N))^{\alpha-1}} + \frac{-q(M, N) + N}{N \cdot (q(M, N))^\alpha} = \\ &= \frac{1}{(\alpha - 1)N \cdot (q(M, N))^{\alpha-1}} + \frac{1}{(q(M, N))^\alpha}. \end{aligned}$$

Мы видим, что в этом случае выполняется аналог наиболее сильной оценки на классе E_s^α из книги [13], которая была доказана в работе [14].

Аналогично рассматривается вопрос об интерполировании периодической функции одной переменной по равномерной сетке. Согласно лемме 15 из книги [12], стр. 75 имеем разложение в конечный ряд Фурье, который является интерполяционным многочленом по равномерной сетке:

$$f\left(\frac{z}{p}\right) = \sum_{m=-p_1}^{p_2} C_p(m) e^{2\pi i \frac{mz}{p}}, \quad C_p(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{mk}{p}}, \quad z = 0, \dots, p-1,$$

где $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $p_2 = \left[\frac{p}{2}\right]$.

Нетрудно видеть, что конечные коэффициенты Фурье легко выражаются через обычные коэффициенты Фурье:

$$C_p(m) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{n=-\infty, \bar{n} \in M}^{\infty} c(n) e^{2\pi i \frac{nk}{p}} \right) e^{-2\pi i \frac{mk}{p}} = \sum_{n=-\infty, \bar{n} \in M}^{\infty} c(n) \delta_p(n - m).$$

Отсюда получаем выражение для погрешности интерполирования периодической функции $f(z)$ на отрезке $[0; 1]$ с помощью конечного ряда Фурье по равномерной сетке:

$$\begin{aligned} R_p^*[f(z)] &= f(z) - \sum_{m=-p_1}^{p_2} C_p(m) e^{2\pi i m z} = \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M}^{\infty} c(m) e^{2\pi i m z} - \sum_{n=-p_1}^{p_2} C_p(n) e^{2\pi i n z} = \\ &= \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M}^{\infty} c(m) \left(e^{2\pi i m z} - \sum_{n=-p_1}^{p_2} \delta_p(n - m) e^{2\pi i n z} \right) = \\ &= \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M, m \notin [-p_1, p_2]}^{\infty} c(m) \left(e^{2\pi i m z} - \sum_{n=-p_1}^{p_2} \delta_p(n - m) e^{2\pi i n z} \right). \end{aligned}$$

Переходя к оценкам, получим

$$|R_p^*[f(z)]| \leq 2\|f(z)\|_{E_1^\alpha} \sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M, m \notin [-p_1, p_2]}^{\infty} \frac{1}{|m|^\alpha}.$$

Так как

$$\sum_{m=-\infty, \bar{m} \in M, m \notin [-p_1, p_2]}^{\infty} \frac{1}{|m|^\alpha} \leq 2 \sum_{m > \frac{p}{2}} \frac{1}{m^\alpha} \leq 2 \int_{\frac{p}{2}-1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{2}{(\alpha-1) \left(\frac{p}{2}-1\right)^{\alpha-1}} \leq \frac{2 \cdot 3^{\alpha-1}}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$$

при $p \geq 6$, то

$$|R_p^*[f(z)]| \leq \|f(z)\|_{E_1^\alpha} \frac{4 \cdot 3^{\alpha-1}}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}.$$

Последнюю оценку можно уточнить, если рассматривать функцию распределения элементов моноида M не меньших $\frac{p}{2}$. Сейчас оценка общая для всех моноидов M .

2. Необходимые понятия и факты из теории квадратурных формул с теоретико-числовыми сетками

2.1. Гиперболический крест и гиперболические параметры

В s -мерном пространстве усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s$ (x_i координата точки x), где для вещественного x обозначаем $\bar{x} = \max(1, |x|)$.

Гиперболическим крестом называется область

$$K_s(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq t\},$$

а величина t — его параметром. Назовем r -ой компонентой гиперболического креста $K_s(t)$ подмножество

$$K_s^{(r)}(t) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leq t, \text{ ровно } r \text{ координат } \vec{x} \text{ отличны от } 0\}.$$

Ясно, что справедливо следующее разбиение гиперболического креста:

$$K_s(t) = \left(\bigcup_{r=1}^s K_s^{(r)}(t) \right) \cup \{\vec{0}\}.$$

С понятием усеченной нормы и гиперболическим крестом связано понятие гиперболического параметра множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ называется величина

$$q(K) = \min_{\vec{m} \in K} \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s. \quad (1)$$

Для пустого множества K полагается $q(K) = \infty$.

Ясно, что гиперболический параметр $q(K)$ имеет простой геометрический смысл — он равен наименьшему значению параметра t гиперболического креста $K_s(t)$ такого, что на границе $K_s(t)$ имеются точки множества K , а внутри отсутствуют.

Важную роль в применении понятия гиперболического креста играет количество целых точек в гиперболическом кресте.

Обозначим через $KZ_s(t)$ множество всех целых точек принадлежащих гиперболическому кресту $K_s(t)$, а через $KZ_s^{(r)}(t)$ – множество всех целых точек принадлежащих r -ой компоненте $K_s^{(r)}(t)$ гиперболического креста $K_s(t)$. Таким образом

$$KZ_s(t) = K_s(t) \cap \mathbb{Z}^s, \quad KZ_s^{(r)}(t) = K_s^{(r)}(t) \cap \mathbb{Z}^s.$$

Для $t \geq 1$ положим:

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \dots m_j \leq t} 1, \quad (2)$$

здесь суммирование проводится только по натуральным значениям переменных $m_1, \dots, m_j$. Ясно что

$$B_1(t) = [t]. \quad (3)$$

Из разбиения гиперболического креста на r -ые компоненты и определения величин $B_j(t)$ получим равенство для величины $|KZ_s(t)|$ – количества целых точек в гиперболическом кресте:

$$|KZ_s(t)| = 1 + \sum_{r=1}^s |KZ_s^{(r)}(t)| = 1 + \sum_{r=1}^s C_s^r 2^r B_r(t). \quad (4)$$

2.2. О гиперболическом параметре сетки

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x}$$

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 – всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [6]).

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \quad (5)$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s) dx_1 \dots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \dots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \quad (k = 1 \dots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M , а сами точки – *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Для произвольных целых $m_1, \dots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (6)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S_{M,\vec{\rho}}^*(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum_{j=1}^N |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| \leq \frac{\rho(M)}{N}. \quad (7)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S_M^*(\vec{m})$.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [1]).³

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_N[f] &= C(\vec{0}) \left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \frac{1}{N} \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ &= C(\vec{0}) \left(S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right) + \sum'_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) \end{aligned} \quad (8)$$

и при $N \rightarrow \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s -мерном кубе.

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ ($\alpha > 1$) с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C , то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство E_s^α состоит из функций $f(x_1, \dots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \dots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)} \quad (9)$$

удовлетворяют условиям⁴

$$\sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(m_1, \dots, m_s)| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} < \infty. \quad (10)$$

³Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

⁴Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Таким образом, величину $\overline{m}$ можно назвать усеченной нормой числа m , что согласуется с понятием усеченной нормы вектора, о которой речь пойдет дальше.

Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ пространство E_s^α является несепарабельным банаховым пространством изоморфным пространству l_∞ — всех ограниченных комплексно-значных последовательностей (см. [6]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s = \bigcup_{\alpha > 1} E_s^\alpha$. Очевидно $E_s \subset \mathfrak{A}_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Рассмотрим понятие усеченной нормы вектора, которой называется величина

$$q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \dots \bar{x}_s.$$

Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geq 1$ называется множество

$$N_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) = t, \vec{x} \neq \vec{0}\},$$

которое является границей гиперболического креста $K_s(t)$, заданного соотношениями

$$K_s(t) = \{\vec{x} | q(\vec{x}) \leq t\}.$$

Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_s^*(t)$ целых ненулевых точек, где

$$\tau_s^*(t) = \sum'_{\vec{m} \in N(t)} 1 \quad (11)$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \bar{m}_1 \dots \bar{m}_s$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы функции $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$. Справедливо равенство

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \max \left(|C(\vec{0})|, \sup_{t \in \mathbb{N}} \left(t^\alpha \cdot \max_{\vec{m} \in N(t)} |C(\vec{m})| \right) \right).$$

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_s^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C \cdot (1 + 2\zeta(\alpha))^s$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} \frac{C \cdot e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}$$

в точке $\vec{x} = \vec{0}$.

Очевидно, что $E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ при $\alpha \geq \beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha(C) \subset E_s^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \geq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x}) = C(\vec{0}) + \sum_{\vec{m} \in N(1)} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

В работе [1] дано следующее определение дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geq 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) рядом Дирихле

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \quad (12)$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m} \in N(n)} |S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p. \quad (13)$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leq \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \quad (14)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p|M)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x_1, \dots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка

$$\begin{aligned} |R_N[f]| &\leq C \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{C}{N} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ &= C \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + C \cdot \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \end{aligned} \quad (15)$$

где сумма $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} &= \left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \frac{1}{N} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\ &= \left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (16)$$

Если рассмотреть класс $E_s^{\alpha, q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha, q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} |C(\vec{m})|^q (\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha, q}$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка

$$\begin{aligned} |R_N[f]| &\leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha, q}} \left(\left| \frac{1}{N} S_{M, \vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right|^p + \frac{1}{N^p} \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty'} \frac{|S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha, q}} \left(\left| S_{M, \vec{\rho}}^*(\vec{0}) - 1 \right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где сумма $S_{M, \vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^{\alpha, q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Из теорем 2 и 3 следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки. Эта гипотеза была доказана в работе [8] (см. теорему 8, стр. 86).

2.3. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [7] было дано такое определение.

«Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q(M, \rho(\vec{x})) = \min_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \{\vec{0}\}, |S(\vec{m})| > 0} \overline{m_1} \dots \overline{m_s}.$$

В этой работе использовались несколько иные обозначения. Так

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{|M|} \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}$$

— тригонометрическая сумма сетки M с весами $\rho(\vec{x})$;

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} \frac{|S(\vec{m})|}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}$$

— гиперболическая дзета-функция сетки M с весами $\rho(\vec{x})$.

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [17], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзета-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M, \rho(\vec{x})|\alpha) = \alpha \int_{q(M, \rho(\vec{x}))}^{\infty} \frac{D(t|M, \rho(\vec{x})) dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M, \rho(\vec{x})) = \sum'_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s, \overline{m_1} \dots \overline{m_s} \leq t} |S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [1] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M, \vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \dots, x_s + \xi_s(k)]. \quad (18)$$

Через $A_{M, \vec{\rho}} C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M, \vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

ЛЕММА 1. Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (19)$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N}C(\vec{m}) = S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})C(\vec{m}) \quad (20)$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \leq \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [1], стр. 194. $\square$

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0 = K_0(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) = 0\}, \quad (22)$$

$$K_1 = K_1(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) = 1\}, \quad (23)$$

$$K_2 = K_2(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m}) \neq 1, |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = 1\}, \quad (24)$$

$$K_3 = K_3(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid 0 < |S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| < 1\}, \quad (25)$$

$$K_4 = K_4(M, \vec{\rho}) = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \mid |S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| > 1\}. \quad (26)$$

Ясно что $\mathbb{Z}^s = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [1] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [1], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \emptyset$, а для несмещенного оператора имеем: $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha, p | M, \vec{\rho}) = \sum'_{\vec{m} \in K_1 \cup K_2} \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} + \sum_{\vec{m} \in K_3} \frac{|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}. \quad (27)$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами

$$q_\nu(M, \rho(\vec{x})) = q(K_\nu(M, \rho(\vec{x}))) \quad (\nu = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q(M, \rho(\vec{x})) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu(M, \rho(\vec{x})).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p , то есть в s -мерном кубе

$$G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_i < 1 \ (i = 1, \dots, s)\}$$

имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \dots, \frac{x_s^{(k)}}{p} \right) \quad k = 1, \dots, N, \quad (29)$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leq x_i^{(k)} \leq p-1$, p — натуральное.

ТЕОРЕМА 4. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедливо соотношение

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1(M, \rho(\vec{x})),$$

кроме того тригонометрические суммы $S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s .

ТЕОРЕМА 5. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

ТЕОРЕМА 6. Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, множество $K_1(M, \vec{\rho}) \cup K_2(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.

2.4. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток из работы [4], одна лемма из работы [2] и одно новое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, имеет тип $\Delta(N, s) < 1$, если для любого $\vec{m} \in K_3(M, \vec{\rho})$ выполняется оценка

$$|S_{M,\vec{\rho}}^*(\vec{m})| \leq \Delta(N, s).$$

ТЕОРЕМА 7. (Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток) Для любой s -мерной решетки Λ справедливы оценки

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leq \begin{cases} (2 + 2\zeta(\alpha))^s \cdot \left(1 + \left[\frac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda) = 1; \\ 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda) > 1, \end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s -мерный куб $[-\lambda; \lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

ЛЕММА 2. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leq \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right), \quad (30)$$

где $\zeta(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ — дзета-функция Римана при $\alpha > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [2]. $\square$

ТЕОРЕМА 8. (Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток) Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N, s) < 1$, для которых линейный оператор $A_{M, \vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещенным, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) &\leq 2^{(\alpha+1)s+1} \alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right)^s \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)} + \\ &+ \Delta^p(N, s) \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{s-1} t}{(\alpha-1)(s-1)!} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{s-2} \zeta(\alpha)^{s-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1} \right) \right), \end{aligned} \quad (31)$$

где решетка $\Lambda = K_1(M, \vec{\rho}) \cup K_2(M, \vec{\rho})$ и $t = q_3(M, \rho(\vec{x}))$.

3. Применение общей теории к классу функций, порожденных моноидом, и параллелепипедальным сеткам

Начиная с этого места предполагаем, что размерность $s \geq 2$.

Согласно работе [9], пусть M — произвольный моноид натуральных чисел. Рассмотрим многомерный моноид целочисленных векторов M_s , заданный равенством

$$M_s = \{(m_1, \dots, m_s) | \overline{m}_\nu \in M, (\nu = 1, \dots, s)\}.$$

Класс функций M_s^α определяется следующим образом. Этот класс периодических функций состоит из функций $f(\vec{x})$, которые задаются многомерным рядом Фурье вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s, \\ \overline{m}_\nu \in M, (\nu=1, \dots, s)}} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{m} \in M_s} \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

где коэффициенты Фурье удовлетворяют неравенствам

$$|C(\vec{m})| \leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha}$$

и

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in M_s} |C(\vec{m})| (\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha = \sup_{\vec{m} \in M_s} |c(\vec{m})| < \infty.$$

Если σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M|\alpha)$ моноида натуральных чисел M , то для любого $\alpha > \sigma_M$ ряд Фурье для функции $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ абсолютно и равномерно сходится для любого $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$.

Таким образом, справедливо вложение $M_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$, где $\mathfrak{A}_s$ — пространство периодических функций от s переменных с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}_s$ периодических функций от s переменных, заданное равенством $\mathfrak{M}_s = \bigcup_{\alpha > \sigma_M} M_s^\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{M}_s \subset \mathfrak{A}_s$.

Нетрудно видеть, что для нормы $\|f(\vec{x})\|_C = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^s} |f(\vec{x})|$ справедливо неравенство

$$\|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(M|\alpha))^s.$$

Рассмотрим оператор вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}$ пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 > \alpha_2$. Естественной, что нормой оператора вложения $\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}$ называется величина, определяемая равенством

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| = \sup_{f(\vec{x}) \in M_s^{\alpha_1}} \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_2}}}{\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha_1}}}.$$

ЛЕММА 3. Для любых $\alpha_1 > \alpha_2 > \sigma_M$ для нормы оператора вложения пространства $M_s^{\alpha_1}$ в пространство $M_s^{\alpha_2}$ справедливо равенство

$$\|\mathbb{A}_{\alpha_1, \alpha_2}\| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [9].

Рассмотрим квадратурную формулу с параллелепипедальной сеткой

$$\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\} \right) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

на классе M_s^α :

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_{s-1} k}{N} \right\}\right) - R_N[f(\vec{x})], \quad f(\vec{x}) \in M_s^\alpha. \quad (32)$$

Если

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M_s} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{m} \in M_s} \frac{c(\vec{m})}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})},$$

то для погрешности приближенного интегрирования $R_N[f(\vec{x})]$ справедливо равенство

$$R_N[f(\vec{x})] = \sum_{\vec{m} \in M_s} \frac{c(\vec{m})}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} \delta_N(m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s).$$

По аналогии с дзета-функцией моноида натуральных чисел и гиперболической дзета-функцией решётки рассмотрим гиперболическую дзета-функцию пересечения решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \dots, a_{s-1}; N)$ решений линейного сравнения $m_1 + a_1 m_2 + \dots + a_{s-1} m_s \equiv 0 \pmod{N}$ и многомерного моноида M_s , которую зададим равенством

$$\zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda \cap M_s} \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha}.$$

Отсюда следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам на классе M_s^α справедливо равенство

$$R_N[M_s^\alpha] = \zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha).$$

Для класса M_s^α меняется разбиение Коробова. А именно, $K_1 = \Lambda \cap M_s$, так как для любых $\vec{m} \notin M_s$ коэффициенты Фурье равны 0.

Для оценки гиперболической дзета-функции $\zeta(\Lambda \cap M_s | \alpha)$ нам потребуется теорема о числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях из работы [15].

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед

$$\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \prod_{\nu=1}^s [\lambda_\nu + 1; \lambda_\nu + n_\nu],$$

где $\vec{\lambda} \in \mathbb{Z}^s$, $\vec{n} \in \mathbb{N}^s$. Очевидно, что $\Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}) = \vec{\lambda} + \Pi(\vec{0}; \vec{n})$.

Обозначим через $T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N)$ число решений системы

$$\begin{cases} a_1 m_1 + \dots + a_s m_s + \lambda \equiv 0 \pmod{N}, \\ \vec{m} \in \Pi(\vec{\lambda}; \vec{n}). \end{cases} \quad (33)$$

Ясно, что

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) = T(\vec{a}, \vec{0}, \vec{n}, \lambda + (\vec{a}, \vec{\lambda}); N). \quad (34)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки и величина n определена равенством $n = \max(n_1, \dots, n_s)$. Тогда справедлива оценка

$$T(\vec{a}, \vec{\lambda}, \vec{n}, \lambda; N) \leq \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 \dots n_s \leq q, \\ \frac{3n_1 \dots n_s}{n} & \text{при } n_1 \dots n_s > q, n \leq \frac{q}{3}, \\ \frac{n_1 \dots n_s}{n} & \text{при } n_1 \dots n_s > q, \frac{q}{3} < n < N, \\ \frac{2n_1 \dots n_s}{N} & \text{при } n \geq N. \end{cases} \quad (35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [15].

Кроме этого, докажем новый вариант обобщённой леммы Коробова из работы [16].

Ещё Н. М. Коробов в 1959 году в работах [10, 11] установил, что остаточный ряд в гиперболической дзета-функции решётки решений $\Lambda(\vec{a}, N)$, в котором хотя бы одна компонента по модулю не меньше N , оценивается как $O(\frac{1}{N^\alpha})$.

В соответствии с этим результатом Н. М. Коробова положим $\Lambda = \Lambda^* \cup \Lambda^{**}$, где $\Lambda^* = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| < N\}$, $\Lambda^{**} = \{\vec{x} | \vec{x} \in \Lambda, \max_{1 \leq j \leq s} |x_j| \geq N\}$.

Обозначим через $q_1 = q(\Lambda \cap M_s)$ и $q_2 = q(\Lambda^{**} \cap M_s)$. Справедливы очевидные неравенства $q(\Lambda) \leq q_1 = q(\Lambda \cap M_s)$ и $\max(q_1, N) \leq q_2 = q(\Lambda^{**} \cap M_s)$.

ЛЕММА 4. Пусть $T \geq N$. Справедливо неравенство

$$\sum_{|m_j| \geq T} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \leq 2 \left(\frac{1}{(\alpha - 1)T^{\alpha-1}N} + \frac{1}{T^\alpha} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пользуясь свойствами полной системы вычетов, получим

$$\begin{aligned} \sum_{|m_j| \geq T} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} &= \sum_{b=0}^{\infty} \left(\sum_{m_j=T+bN}^{T+bN+N-1} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} + \sum_{m_j=-(T+bN+N-1)}^{-(T+bN)} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} \right), \\ \sum_{|m_j| \geq N} \frac{\delta_N(a_j m_j + \lambda)}{|m_j|^\alpha} &\leq 2 \sum_{b=0}^{\infty} \frac{1}{(T+bN)^\alpha} = 2\alpha \int_T^{\infty} \frac{\left[\frac{x-T}{N}\right] + 1}{x^{\alpha+1}} dx \leq \\ &\leq 2 \left(\frac{\alpha}{(\alpha - 1)T^{\alpha-1}N} - \frac{1}{T^{\alpha-1}N} + \frac{1}{T^\alpha} \right) = 2 \left(\frac{1}{(\alpha - 1)T^{\alpha-1}N} + \frac{1}{T^\alpha} \right). \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 5. Пусть $S(t, \alpha)$ для положительного $t \geq 1$ задано равенством

$$S(t, \alpha) = \sum_{m \geq t}^{\infty} \left(\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} \right) (2m+1),$$

тогда справедливы соотношения

$$S(t, \alpha) \leq \begin{cases} 1 + 2\zeta(\alpha) & \text{при } t = 1, \\ \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $t_1 = [t]$ ⁵, тогда

$$S(t, \alpha) = \sum_{m=t_1}^{\infty} \frac{2m+1}{m^{\alpha}} - \sum_{m=t_1+1}^{\infty} \frac{2m-1}{m^{\alpha}} = \frac{2t_1-1}{t_1^{\alpha}} + 2 \sum_{m=t_1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}.$$

При $t = 1$ справедливы равенства $t_1 = 1$, $S(1, \alpha) = 1 + 2\zeta(\alpha)$.

При $t > 1$ имеем: $t_1 \geq 2$, $t_1 \geq t$,

$$\sum_{m=t_1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}} = \alpha \int_{t_1}^{\infty} \frac{[x] - t_1}{x^{\alpha+1}} dx < \alpha \int_{t_1}^{\infty} \frac{x - t_1}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{t_1^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$S(t, \alpha) < \frac{2t_1-1}{t_1^{\alpha}} + \frac{2}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} < \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} \leq \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}.$$

□

ЛЕММА 6. Пусть $S^*(t, N, \alpha)$ для положительного $t \geq 1$, $t < N$ задано равенством

$$S^*(t, N, \alpha) = \sum_{m \geq t}^{N-1} \left(\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} \right) (2m+1),$$

тогда справедливы соотношения

$$S^*(t, N, \alpha) \leq \begin{cases} 1 + 2\zeta(\alpha) & \text{при } t = 1, \\ \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $t_1 = [t]$, тогда

$$S^*(t, N, \alpha) = \sum_{m=t_1}^{N-1} \frac{2m+1}{m^{\alpha}} - \sum_{m=t_1+1}^N \frac{2m-1}{m^{\alpha}} < \frac{2t_1-1}{t_1^{\alpha}} + 2 \sum_{m=t_1}^{N-1} \frac{1}{m^{\alpha}}.$$

При $t = 1$ справедливы равенства $t_1 = 1$, $S(1, \alpha) \geq 1 + 2\zeta(\alpha)$.

При $t > 1$ имеем: $t_1 \geq 2$, $t_1 \geq t$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=t_1}^{N-1} \frac{1}{m^{\alpha}} &= \alpha \int_{t_1}^N \frac{[x] - t_1}{x^{\alpha+1}} dx < \alpha \int_{t_1}^N \frac{x - t_1}{x^{\alpha+1}} dx = \\ &= \frac{\alpha}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}} - \frac{1}{t_1^{\alpha-1}} + \frac{t_1}{N^{\alpha}} < \frac{1}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$S^*(t, N, \alpha) < \frac{2t_1-1}{t_1^{\alpha}} + \frac{2}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} < \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t_1^{\alpha-1}} \leq \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}.$$

□

⁵ Для вещественного x через $[x]$ обозначаем наименьшее целое из условий $[x] - 1 < x \leq [x]$.

ЛЕММА 7. Пусть $S_\nu(t, \alpha)$ для положительного $t \geq 1$ задано равенством

$$S_\nu(t, \alpha) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_\nu=1, \\ m_1 \dots m_\nu \geq t}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1),$$

тогда справедливы соотношения

$$S_\nu(t, \alpha) \leq \begin{cases} (1 + 2\zeta(\alpha))^\nu & \text{при } t = 1, \\ \frac{\nu 2\alpha((1+2\zeta(\alpha))^{\nu-1} + (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-1})}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, при $t = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} S_\nu(1, \alpha) &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_\nu=1, \\ m_1 \dots m_\nu \geq 1}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) = \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) \right)^\nu = (S(1, \alpha))^\nu = (1 + 2\zeta(\alpha))^\nu \end{aligned}$$

и первое утверждение леммы доказано.

При $\nu = 1$ имеем $S_1(t, \alpha) = S(t, \alpha)$ и утверждение леммы справедливо в силу леммы 5.

Пусть теперь $t > 1$ и $\nu > 1$, тогда имеем:

$$\begin{aligned} S_\nu(t, \alpha) &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_\nu=1, \\ m_1 \dots m_\nu \geq t}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_{\nu-1}=1}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) \sum_{m_\nu \geq \max\left(1, \frac{t}{m_1 \dots m_{\nu-1}}\right)}^{\infty} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} S_\nu(t, \alpha) &\leq S_{\nu-1}(t, \alpha) S(1, \alpha) + \\ &+ \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{\nu-1}=1, \\ m_1 \dots m_{\nu-1} < t}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) \sum_{m_\nu \geq \frac{t}{m_1 \dots m_{\nu-1}}}^{\infty} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1) \leq \\ &\leq (1 + 2\zeta(\alpha)) S_{\nu-1}(t, \alpha) + \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{\nu-1}=1, \\ m_1 \dots m_{\nu-1} \leq t}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) m_\mu^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Положим $T(u, \alpha) = \sum_{m=1}^u \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) m^{\alpha-1}$, тогда

$$\begin{aligned} T(u, \alpha) &= \sum_{m=1}^u (2m+1) m^{\alpha-1} \alpha \int_m^{m+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} \leq \sum_{m=1}^u (2m+1) m^{\alpha-1} \frac{\alpha}{m^{\alpha+1}} = \\ &= \alpha \left(2 \sum_{m=1}^u \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^u \frac{1}{m^2} \right) < \alpha \left(2 \ln u + 2 + \frac{\pi^2}{6} \right) < 2\alpha (\ln u + 2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
S_\nu(t, \alpha) &< (1 + 2\zeta(\alpha))S_{\nu-1}(t, \alpha) + \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} (T(t, \alpha))^{\nu-1} < (1 + 2\zeta(\alpha))S_{\nu-1}(t, \alpha) + \\
&+ \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-1} < (1 + 2\zeta(\alpha))^2 S_{\nu-2}(t, \alpha) + \\
&+ (1 + 2\zeta(\alpha)) \left(\frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-2} \right) + \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-1} < \\
&< \dots < \frac{(1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-1} 2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{(1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-\mu-1} 2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} (2\alpha(\ln t + 2))^\mu = \\
&= \frac{2\alpha}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-\mu-1} (2\alpha(\ln t + 2))^\mu < \frac{\nu 2\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-1} + (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-1} \right)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

□

ЛЕММА 8. Пусть $S_\nu^*(t, N, \alpha)$ для положительного $t \geq 1$ задано равенством

$$S_\nu^*(t, N, \alpha) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_\nu=1, \\ m_1 \dots m_\nu \geq t}}^{N-1} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1),$$

тогда справедливы соотношения

$$S_\nu^*(t, N, \alpha) \leq \begin{cases} (1 + 2\zeta(\alpha))^\nu & \text{при } t = 1, \\ \frac{\nu 2\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-1} + (2\alpha(\ln t + 2))^{\nu-1} \right)}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}} & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем:

$$S_\nu^*(t, N, \alpha) < S_\nu(t, \alpha)$$

и утверждение леммы доказано. □

ЛЕММА 9. **Обобщённая лемма Коробова.** Если $q_2 = \infty$, то $\Lambda^{**} \cap M_s = \emptyset$ и $\zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha) = 0$.

Если $q_2 < \infty$, то справедливы неравенства

$$\zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha) \geq \frac{1}{q_2^\alpha}, \quad (36)$$

$$\zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha) \leq \quad (37)$$

$$\leq \min \left(\frac{2s(1 + 2\zeta(M|\alpha))^{s-1} \zeta(\alpha)}{N^\alpha}, \frac{4s\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + (2\alpha(\ln q_2 + 2))^{s-1} \right)}{(\alpha-1)Nq_2^{\alpha-1}} \right). \quad (38)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q_2 = \infty$, то из определения гиперболического параметра множества следует, что $\Lambda^{**} \cap M_s = \emptyset$ и $\zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha) = 0$.

Неравенство (36) очевидно.

Если $q_2 < \infty$, то

$$\begin{aligned}
\zeta_H \left(\Lambda^{**} \cap M_s \middle| \alpha \right) &= \sum'_{\vec{m} \in \Lambda^{**} \cap M_s} \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^s \sum'_{\vec{m} \in \Lambda^{**} \cap M_s, |m_\nu| \geq N} \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \\
&= \sum_{\nu=1}^s \sum_{\overline{m}_\mu \in M, (\mu \neq \nu)} \sum_{b=1}^{\infty} \sum_{bN \leq |m_\nu| < (b+1)N, \overline{m}_\nu \in M} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} \leq \\
&\leq 2 \sum_{\nu=1}^s \sum_{\overline{m}_\mu \in M, (\mu \neq \nu)} \prod_{\mu=1, \mu \neq \nu}^s \frac{1}{\overline{m}_\mu^\alpha} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{1}{b^\alpha N^\alpha} = \frac{2s(1 + 2\zeta(M|\alpha))^{s-1} \zeta(\alpha)}{N^\alpha}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{m} \notin \Lambda^{**} \cap M_s, \\ \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s) = 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda^{**} \cap M_s. \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned}
\zeta_H \left(\Lambda^{**} \cap M_s \middle| \alpha \right) &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^\alpha} = \\
&= \sum_{m_1, \dots, m_s = 1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s) = \\
&= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s = 1 \\ \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \geq q_2, \max(m_1, \dots, m_s) \geq N}}^{\infty} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s).
\end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 0$, $\lambda_\nu = -(m_\nu + 1)$ и $n_\nu = 2m_\nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$). Так как $\max(m_1, \dots, m_s) \geq N$, то утверждение теоремы 9 (с. 88) можно записать в виде

$$\sum_{|k_1| \leq m_1} \dots \sum_{|k_s| \leq m_s} \delta_p(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s) \leq \frac{2(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{N}.$$

Пользуясь этой оценкой, получим

$$\begin{aligned}
\zeta_H \left(\Lambda^{**} \cap M_s \middle| \alpha \right) &\leq \\
&\leq \frac{2}{N} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s = 1, \\ \overline{m}_1 \dots \overline{m}_s \geq q_2, \max(m_1, \dots, m_s) \geq N}}^{\infty} \prod_{\mu=1}^s \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\mu + 1) \leq \\
&\leq \frac{2}{N} S_s(q_2).
\end{aligned}$$

Применим оценку леммы 7, получим

$$\zeta_H \left(\Lambda^{**} \cap M_s \middle| \alpha \right) \leq \frac{4s\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + (2\alpha (\ln q_2 + 2))^{s-1} \right)}{(\alpha - 1) N q_2^{\alpha-1}}.$$

□

Теперь мы можем доказать обобщённый вариант теоремы Бахвалова—Коробова для произвольного модуля N и класса M_s^α .

ТЕОРЕМА 10. Пусть $q = q(\Lambda(\vec{a}, N))$ — гиперболический параметр решетки, $q_1 = q(\Lambda \cap M_s)$ и $q_2 = q(\Lambda^{**} \cap M_s)$. Тогда при $q \geq 4$ гиперболическая дзета-функция пересечения решетки и моноида $\zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha)$ удовлетворяет соотношениям:

при $q_1 = \infty$ справедливо равенство $\zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha) = 0$;

при $q_1 < \infty$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha) < \\ & < \min \left(\frac{2s(1 + 2\zeta(M|\alpha))^{s-1} \zeta(\alpha)}{N^\alpha}, \frac{4s\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} + (2\alpha(\ln q_2 + 2))^{s-1} \right)}{(\alpha - 1)Nq_2^{\alpha-1}} \right) + \\ & + \frac{6(1 + 2\zeta(\alpha))^s}{N} \left(\frac{2N - 1}{N^\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))} \right)^{\nu_M} + \frac{4(s-1)\alpha \left((1 + 2\zeta(\alpha))^{s-2} + (2\alpha(\ln q_1^* + 2))^{s-1} \right) 2^{\nu_M}}{N(\alpha - 1)(q_1^*)^{\alpha-1}} + S_1, \end{aligned} \quad (39)$$

$$(40)$$

где при $q_1^* > \left(\frac{N-1}{2}\right)^s$

$$S_1 \leq \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{(\alpha - 1)N(q_1^*)^{\frac{\alpha-1}{s}}};$$

при $\left(\frac{N-1}{2}\right)^s \geq q_1^* > \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$

$$S_1 \leq s(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{1}{(q_1^*)^{\frac{\alpha}{s}}} - \frac{2^\alpha}{(N+1)^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(\alpha-1)N(N-1)^{\alpha-1}} \right);$$

при $q_1^* \leq \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$

$$\begin{aligned} S_1 & \leq \frac{4s(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}\alpha}{(\alpha-1)(q_1^{**})^{\alpha-1}} + \frac{s(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}6^\alpha}{(q-3)^\alpha} + \\ & + \frac{6(s-1)\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-2}}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right) \alpha^{s-1} \left(2 + 2\ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{s-1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению гиперболической дзета-функции пересечения решетки Λ и моноида M_s имеем:

$$\zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha) = \sum'_{\vec{m} \in \Lambda \cap M_s} \frac{1}{(\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s)^\alpha} = \zeta_H(\Lambda^* \cap M_s | \alpha) + \zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha). \quad (41)$$

В силу условия теоремы при $\vec{m}_1 \dots \vec{m}_s < q_1$ слагаемые суммы (41) равны нулю.

Положим $q_1^* = q(\Lambda^* \cap M_s)$, тогда при $q_1^* = \infty$ справедливо равенство $\zeta_H(\Lambda^* \cap M_s | \alpha) = 0$.

При $q_1^* < \infty$ будут справедливы неравенства $q \leq q_1 = q_1^* \leq (N-1)^s$. Заметим, что из $q_1^* < \infty$ следует, что $q_2 < \infty$. Действительно, если $q_1^* < \infty$, то найдется вектор $(m_1, \dots, m_s) \neq \vec{0}$ такой, что $a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}$ и $m_\nu \in M$ ($\nu = 1, \dots, s$), $\max(m_1, \dots, m_s) \leq N-1$. Пусть $m \in M$ и $m \geq N$, тогда $m \cdot (m_1, \dots, m_s) \in \Lambda^{**} \cap M_s$ и $q_2 < \infty$. Нетрудно видеть, что если $q_1^* = \vec{m}_1 \dots \vec{m}_s$ и ровно r значений $m_\nu \neq 0$, то для наименьшего натурального $m \in M$, удовлетворяющего неравенству $m \cdot \max_{m_\nu \neq 0} (|m_\nu|) \geq N$, имеем $q_2 \leq q_1^* m^r$.

Определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{m} \notin \Lambda^* \cap M_s, \\ \delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s) = 1, & \text{если } \vec{m} \in \Lambda^* \cap M_s. \end{cases}$$

Применяя по каждой переменной преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned}
\zeta_H \left(\Lambda^* \cap M_s \mid \alpha \right) &= \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \dots, m_s)}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\alpha} = \\
&= \sum_{m_1, \dots, m_s = 1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s) = \\
&= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s = 1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{N-1} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s) + \\
&+ \sum_{\nu=1}^s \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{\nu-1} = 1, \\ m_1 \dots m_{\nu-1} (N-1)^{s+1-\nu} \geq q_1^*}}^{N-1} \frac{1}{N^{\alpha(s+1-\nu)}} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \sum_{\substack{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_{\nu-1}| \leq m_{\nu-1} \\ |k_\nu|, \dots, |k_s| \leq N-1}} \varphi(k_1, \dots, k_s) = \\
&= S_1 + S,
\end{aligned}$$

так как при $m_\nu \geq N$ имеем $\varphi(m_1, \dots, m_s) = 0$.

Пусть $\lambda = 0$, $\lambda_\nu = -(m_\nu + 1)$ и $n_\nu = 2m_\nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$). Тогда при $m_1 \dots m_s \geq q$ утверждение теоремы 9 (с. 88) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k_1| \leq m_1} \dots \sum_{|k_s| \leq m_s} \delta_p(a_1 k_1 + \dots + a_s k_s) \leq \\
&\leq \begin{cases} 0 & \text{при } m_1 \dots m_s < q, \\ \frac{3(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{q} & \text{при } \begin{matrix} m_1 \dots m_s > q, \\ \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) \leq \frac{q}{3}, \end{matrix} \\ \frac{(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{\max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1)} & \text{при } \begin{matrix} m_1 \dots m_s > q, \\ \frac{q}{3} < \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) < N, \end{matrix} \\ \frac{2(2m_1 + 1) \dots (2m_s + 1)}{N} & \text{при } \max(2m_1 + 1, \dots, 2m_s + 1) \geq N. \end{cases}
\end{aligned}$$

Пользуясь этой оценкой, получим

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\nu=1}^s \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{\nu-1} = 1, \\ m_1 \dots m_{\nu-1} (N-1)^{s+1-\nu} \geq q_1^*}}^{N-1} \frac{1}{N^{\alpha(s+1-\nu)}} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) \sum_{\substack{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_{\nu-1}| \leq m_{\nu-1} \\ |k_\nu|, \dots, |k_s| \leq N-1}} \varphi(k_1, \dots, k_s) \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^s \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{\nu-1} = 1, \\ m_1 \dots m_{\nu-1} (N-1)^{s+1-\nu} \geq q_1^*}}^{N-1} \frac{2(2N-1)^{s+1-\nu}}{N^{\alpha(s+1-\nu)+1}} \prod_{\mu=1}^{\nu-1} \left(\frac{1}{m_\mu^\alpha} - \frac{1}{(m_\mu + 1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1) = \\
&= \frac{2(2N-1)^s}{N^{\alpha s+1}} + \sum_{\nu=2}^s \frac{2(2N-1)^{s+1-\nu}}{N^{\alpha(s+1-\nu)+1}} S_{\nu-1}^* \left(\left\lceil \frac{q_1^*}{(N-1)^{s+1-\nu}} \right\rceil, N, \alpha \right).
\end{aligned}$$

Согласно лемме 8 имеем:

$$\begin{aligned}
&S_{\nu-1}^* \left(\left\lceil \frac{q_1^*}{(N-1)^{s+1-\nu}} \right\rceil, N, \alpha \right) \leq \\
&\leq \begin{cases} (1 + 2\zeta(\alpha))^{\nu-1} & \text{при } q_1^* \leq (N-1)^{s+1-\nu}, \\ \frac{(\nu-1)2\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{\nu-2} + (2\alpha(\ln q_1^* + 2))^{\nu-1} \right) N^{(s+1-\nu)(\alpha-1)}}{(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} & \text{при } q_1^* > (N-1)^{s+1-\nu}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Пусть целая величина ν_M определена из условия $(N-1)^{\nu_M} \leq q_1^* < (N-1)^{\nu_M+1}$, тогда

$$S_{\nu-1}^* \left(\left\lceil \frac{q_1^*}{(N-1)^{s+1-\nu}} \right\rceil, N, \alpha \right) \leq \begin{cases} (1+2\zeta(\alpha))^{\nu-1} & \text{при } \nu_M \leq s+1-\nu, \\ \frac{(\nu-1)2\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{\nu-2} + (2\alpha(\ln q_1^*+2))^{\nu-1} \right) N^{(s+1-\nu)(\alpha-1)}}{(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} & \text{при } \nu_M > s+1-\nu. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} S &< \frac{2(2N-1)^s}{N^{\alpha s+1}} + \sum_{\nu=2}^{s+1-\nu_M} \frac{2(2N-1)^{s+1-\nu} (1+2\zeta(\alpha))^{\nu-1}}{N^{\alpha(s+1-\nu)+1}} + \\ &+ \sum_{\nu=s+2-\nu_M}^s \frac{2(2N-1)^{s+1-\nu} (\nu-1)2\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{\nu-2} + (2\alpha(\ln q_1^*+2))^{\nu-1} \right) N^{(s+1-\nu)(\alpha-1)}}{N^{\alpha(s+1-\nu)+1} (\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} = \\ &= \frac{2(1+2\zeta(\alpha))^s}{N} \sum_{\nu=\nu_M}^s \left(\frac{2N-1}{N^{\alpha}(1+2\zeta(\alpha))} \right)^{\nu} + \frac{2}{N(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} \sum_{\nu=s+2-\nu_M}^s \frac{(2N-1)^{s+1-\nu}}{N^{s+1-\nu}} \cdot \\ &\quad \cdot (\nu-1)2\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{\nu-2} + (2\alpha(\ln q_1^*+2))^{\nu-1} \right) \leq \\ &\leq \frac{2(1+2\zeta(\alpha))^s}{N} \frac{\left(\frac{2N-1}{N^{\alpha}(1+2\zeta(\alpha))} \right)^{\nu_M} - \left(\frac{2N-1}{N^{\alpha}(1+2\zeta(\alpha))} \right)^{s+1}}{1 - \frac{2N-1}{N^{\alpha}(1+2\zeta(\alpha))}} + \\ &\quad + \frac{2(s-1)2\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{s-2} + (2\alpha(\ln q_1^*+2))^{s-1} \right) 2^{\nu_M}}{N(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} < \\ &< \frac{6(1+2\zeta(\alpha))^s}{N} \left(\frac{2N-1}{N^{\alpha}(1+2\zeta(\alpha))} \right)^{\nu_M} + \frac{4(s-1)\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{s-2} + (2\alpha(\ln q_1^*+2))^{s-1} \right) 2^{\nu_M}}{N(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Для первой суммы S_1 имеем:

$$S_1 = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{N-1} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_{\nu}^{\alpha}} - \frac{1}{(m_{\nu}+1)^{\alpha}} \right) \sum_{|k_1| \leq m_1, \dots, |k_s| \leq m_s} \varphi(k_1, \dots, k_s) \leq S_{1,s} + S_2 + S_3,$$

где

$$S_{1,s} = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_s=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_{\nu}^{\alpha}} - \frac{1}{(m_{\nu}+1)^{\alpha}} \right) \frac{3(2m_1+1) \dots (2m_s+1)}{q}, \quad (42)$$

$$S_2 = s \sum_{\frac{q-3}{6} < m_s < \frac{N-1}{2}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_{\nu}^{\alpha}} - \frac{1}{(m_{\nu}+1)^{\alpha}} \right) \prod_{\nu=1}^{s-1} (2m_{\nu}+1), \quad (43)$$

$$S_3 = \frac{2s}{N} \sum_{m_s \geq \frac{N-1}{2}}^{N-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_{\nu}^{\alpha}} - \frac{1}{(m_{\nu}+1)^{\alpha}} \right) (2m_{\nu}+1). \quad (44)$$

Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m+1) &= \sum_{m=1}^n \frac{2m+1}{m^\alpha} - \sum_{m=2}^{n+1} \frac{2m-1}{m^\alpha} = \\ &= 1 + 2 \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^\alpha} - \frac{2n+1}{(n+1)^\alpha} < 1 + 2\zeta(\alpha). \end{aligned}$$

При $q_1^* > \left(\frac{N-1}{2}\right)^s$ имеем $S_{1,s} = 0$, $S_2 = 0$ и, пользуясь леммой 5, получим

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{2s}{N} \sum_{m_s \geq \sqrt[s]{q_1^*}}^{N-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1) \leq \\ &\leq \frac{2s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N} \sum_{m_s \geq \sqrt[s]{q_1^*}}^{N-1} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) (2m_s+1) \leq \frac{4s\alpha(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{(\alpha-1)N(q_1^*)^{\frac{\alpha-1}{s}}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Отсюда следует, что

$$S_1 \leq \frac{4s\alpha(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{(\alpha-1)N(q_1^*)^{\frac{\alpha-1}{s}}}. \quad (46)$$

При $\left(\frac{N-1}{2}\right)^s \geq q_1^* > \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$ имеем $S_{1,s} = 0$;

$$\begin{aligned} S_2 &= s \sum_{\sqrt[s]{q_1^*} < m_s < \frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1) \leq \\ &\leq s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1} \sum_{\sqrt[s]{q_1^*} < m_s < \frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) \leq s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{1}{(q_1^*)^{\frac{\alpha}{s}}} - \frac{1}{\left(\frac{N+1}{2}\right)^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{2s}{N} \sum_{m_s \geq \frac{N-1}{2}}^{N-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1) \leq \\ &\leq \frac{2s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}}{N} \frac{2\alpha}{(\alpha-1)\left(\frac{N-1}{2}\right)^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Отсюда следует, что

$$S_1 \leq s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{1}{(q_1^*)^{\frac{\alpha}{s}}} - \frac{2^\alpha}{(N+1)^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(\alpha-1)N(N-1)^{\alpha-1}} \right). \quad (49)$$

При $q_1^* \leq \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$ имеем

$$S_{1,s} = \frac{3s}{q} \sum_{m_s \geq \sqrt[s]{q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu+1), \quad (50)$$

$$S_2 = s \sum_{\frac{q-3}{6} < m_s < \frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1), \quad (51)$$

$$S_3 = \frac{2s}{N} \sum_{m_s \geq \max(\frac{N-1}{2}, \sqrt[s]{q_1^*})}^{N-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_s \geq q_1^*}}^{m_s} \prod_{\nu=1}^s \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1). \quad (52)$$

При $q_1^{**} = \max(\frac{N-1}{2}, \sqrt[s]{q_1^*})$ имеем:

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{2s}{N} (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \sum_{m_s \geq \max(\frac{N-1}{2}, \sqrt[s]{q_1^*})}^{N-1} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) (2m_s + 1) \leq \\ &\leq \frac{2s}{N} (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{2q_1^{**}}{(q_1^{**})^\alpha} + 2 \sum_{m \geq q_1^{**}}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} \right) \leq \\ &\leq 2s (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{2}{(q_1^{**})^{\alpha-1}} + \frac{2}{(\alpha-1)(q_1^{**})^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{4s (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \alpha}{(\alpha-1)(q_1^{**})^{\alpha-1}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Аналогично, получаем

$$S_2 \leq s (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \sum_{\frac{q-3}{6} < m_s < \frac{N-1}{2}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) \leq \frac{s (1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} 6^\alpha}{(q-3)^\alpha}. \quad (54)$$

Перейдем к оценке величины $S_{1,s}$:

$$\begin{aligned} S_{1,s} &= \frac{3}{q} \left(\sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} \geq q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1) \cdot \right. \\ &\cdot \sum_{m_s=1}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) (2m_s + 1) + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} < q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) \cdot \\ &\cdot (2m_\nu + 1) \sum_{m_s \geq \frac{q_1^*}{m_1 \dots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) (2m_s + 1) \Bigg) \leq \\ &\leq \left(3 + \frac{2}{\alpha-1} \right) S_{1,s-1} + S_{4,s}, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} S_{4,s} &= \frac{3}{q} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{s-1}=1, \\ m_1 \dots m_{s-1} < q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{s-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu+1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1) \cdot \\ &\cdot \sum_{m_s \geq \frac{q_1^*}{m_1 \dots m_{s-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_s^\alpha} - \frac{1}{(m_s+1)^\alpha} \right) (2m_s + 1). \end{aligned} \quad (56)$$

Применяя несколько раз неравенство (55), получим

$$S_{1,s} \leq \sum_{r=2}^s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-r} S_{4,r}. \quad (57)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m_r \geq \frac{q_1^{*3}}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m_r^\alpha} - \frac{1}{(m_r + 1)^\alpha} \right) (2m_r + 1) = \\ &= \sum_{m_r \geq \frac{q_1^{*3}}{m_1 \dots m_{r-1}}}^{\frac{q-3}{6}} \frac{2m_r + 1}{m_r^\alpha} - \sum_{m_r \geq \frac{q_1^{*3}}{m_1 \dots m_{r-1}} + 1}^{\frac{q+3}{6}} \frac{2m_r - 1}{m_r^\alpha} \leq \\ &\leq 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(1 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) + 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^\alpha}{(q_1^*)^\alpha} \leq \\ &\leq 2 \frac{(m_1 \dots m_{r-1})^{\alpha-1}}{(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_{4,r} \leq \frac{6}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{r-1}=1, \\ m_1 \dots m_{r-1} < q_1^*}}^{\frac{q-3}{6}} \prod_{\nu=1}^{r-1} \left(\frac{1}{m_\nu^\alpha} - \frac{1}{(m_\nu + 1)^\alpha} \right) (2m_\nu + 1) m_\nu^{\alpha-1}.$$

Так как

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \left(\frac{1}{m^\alpha} - \frac{1}{(m+1)^\alpha} \right) (2m + 1) m^{\alpha-1} < \sum_{m=1}^{\frac{q-3}{6}} \alpha \frac{2m + 1}{m^2} < \\ & < \alpha \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6} \right), \end{aligned}$$

то

$$S_{4,r} < \frac{6}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} S_{1,s} &\leq \sum_{r=2}^s \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{s-r} \frac{6}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \alpha^{r-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{r-1} \leq \\ &\leq \frac{6(s-1) \left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-2}}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2 + \frac{1}{\alpha - 1}\right) \alpha^{s-1} \left(2 + 2 \ln \frac{q-3}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right)^{s-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

при $q_1^* > \left(\frac{N-1}{2}\right)^s$

$$S_1 \leq \frac{4s\alpha(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1}}{(\alpha - 1)N(q_1^*)^{\frac{\alpha-1}{s}}};$$

при $\left(\frac{N-1}{2}\right)^s \geq q_1^* > \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$

$$S_1 \leq s(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} \left(\frac{1}{(q_1^*)^{\frac{\alpha}{s}}} - \frac{2^\alpha}{(N+1)^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1}\alpha}{(\alpha-1)N(N-1)^{\alpha-1}} \right);$$

при $q_1^* \leq \left(\frac{q-3}{6}\right)^s$

$$S_1 \leq \frac{4s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}\alpha}{(\alpha-1)(q_1^{**})^{\alpha-1}} + \frac{s(1+2\zeta(\alpha))^{s-1}6^\alpha}{(q-3)^\alpha} +$$

$$+ \frac{6(s-1)\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{s-2}}{q(q_1^*)^{\alpha-1}} \left(2+\frac{1}{\alpha-1}\right) \alpha^{s-1} \left(2+2\ln\frac{q-3}{6}+\frac{\pi^2}{6}\right)^{s-1}.$$

Объединяя с оценкой для S , получим оценку для $\zeta_H(\Lambda^* \cap M_s | \alpha)$, а применяя обобщённую лемму Коробова, окончательно получим:

$$\zeta_H(\Lambda \cap M_s | \alpha) = \zeta_H(\Lambda^* \cap M_s | \alpha) + \zeta_H(\Lambda^{**} \cap M_s | \alpha) <$$

$$< \min \left(\frac{2s(1+2\zeta(M|\alpha))^{s-1}\zeta(\alpha)}{N^\alpha}, \frac{4s\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{s-1} + (2\alpha(\ln q_2 + 2))^{s-1} \right)}{(\alpha-1)Nq_2^{\alpha-1}} \right) +$$

$$+ \frac{6(1+2\zeta(\alpha))^s}{N} \left(\frac{2N-1}{N^\alpha(1+2\zeta(\alpha))} \right)^{\nu_M} + \frac{4(s-1)\alpha \left((1+2\zeta(\alpha))^{s-2} + (2\alpha(\ln q_1^* + 2))^{s-1} \right) 2^{\nu_M}}{N(\alpha-1)(q_1^*)^{\alpha-1}} + S_1.$$

□

4. Оценки погрешности интерполирования на классах функций, порожденных моноидами

В работе [5] была построена теория интерполирования по параллелепипедальной сетке. Сначала приведём необходимые определения, обозначения и результаты из этой работы.

Для решётки Λ рассмотрим ее взаимную решётку Λ^* . По определению взаимная решётка $\Lambda^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^s | \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Отсюда следует, что для любой решётки Λ справедливы равенства $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, $\det \Lambda^* = (\det \Lambda)^{-1}$. Нетрудно видеть, что фундаментальная решётка $\mathbb{Z}^s$ совпадает со своей взаимной решёткой и является подрешёткой взаимной решётки любой целочисленной решётки. Кроме того, если $\Lambda_1 \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^s$, то $\mathbb{Z}^s \subset \Lambda^* \subset \Lambda_1^*$. Для любого $C \neq 0$ $(C\Lambda)^* = \Lambda^*/C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Ясно, что если $\Lambda_1 \subset \Lambda$, то $M(\Lambda) \subset M(\Lambda_1)$.

Если $M \subset \Lambda$ – подрешётка решётки Λ , то величина $D = \det M / \det \Lambda$ называется индексом подрешётки M решётки Λ . Два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ решётки Λ сравнимы по подрешётке M (находятся в одном классе относительно подрешётки M), если $\vec{x} - \vec{y} \in M$. В этом случае пишем $\vec{x} \equiv \vec{y} \pmod{M}$. Индекс D подрешётки M решётки Λ равен числу классов решётки Λ относительно M . Произвольное множество векторов решётки Λ по одному из каждого класса относительно решётки M называется полной системой вычетов решётки Λ относительно M . Каждая полная система вычетов решётки Λ относительно M имеет естественную структуру конечной абелевой группы, изоморфной Λ/M .

Отсюда следует, что для любой целочисленной решётки Λ обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* относительно фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$, т.е. $M(\Lambda) = \Lambda^*/\mathbb{Z}^s$. Таким образом, на обобщенной параллелепипедальной сетке целочисленной решётки определена естественная операция сложения, относительно которой она является конечной абелевой группой.

Обычно, полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ будем обозначать через $M^*(\Lambda)$, хотя она определена неоднозначно. Ниже будут сформулированы дополнительные условия для выбора $M^*(\Lambda)$.

В одномерном случае любая целочисленная решётка имеет вид $p\mathbb{Z}$ и множество чисел $\{-p_1, \dots, 0, \dots, p_2\}$, $p_1 = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor$, $p_2 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$ является наименьшей абсолютной полной системой вычетов одномерной фундаментальной решётки $\mathbb{Z}$ по подрешётке $p\mathbb{Z}$. Дадим многомерный аналог этому понятию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ назовем минимальной гиперболической полной системой вычетов, если минимальный гиперболический крест, содержащий эту полную систему вычетов, имеет минимальное значение своего параметра для всех полных систем вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ , состоящую из представителей классов вычетов с наименьшей усеченной нормой среди всех элементов класса вычетов, назовем абсолютно минимальной гиперболической полной системой вычетов.

Такую полную систему вычетов будем обозначать через $M_H^*(\Lambda)$. Вообще говоря, полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определена неоднозначно. Это видно на примере решётки $N\mathbb{Z}^s$ при четном N . Действительно, $N_2 \equiv -N_2 \pmod{N}$. Уже в одномерном случае две полные системы вычетов $\{-N_1, \dots, 0, \dots, N_2\}$ и $\{-N_2, \dots, 0, \dots, N_1\}$ удовлетворяют определению 7. В s -мерном случае таких систем будет 2^s . Для однозначности выбора $M_H^*(\Lambda)$ можно еще ввести лексикографический линейный порядок на $\mathbb{Z}^s$. Тогда из нескольких возможных элементов с одинаковым значением усеченной нормы выберем наименьший в смысле лексикографического упорядочивания. Тем самым $M_H^*(\Lambda)$ будет определено однозначно.

Для произвольной целочисленной решётки Λ определим второй и третий гиперболические параметры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Вторым гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наименьшее натуральное число $q_2(\Lambda)$, такое, что гиперболический крест $K(q_2(\Lambda))$ содержит полную систему вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Третьим гиперболическим параметром целочисленной решётки Λ называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda))$ содержатся в полной системе вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ . Другими словами все целые точки этого креста не сравнимы по модулю Λ .

Для дальнейшего нам потребуется модификация понятия третьего гиперболического параметра на случай $\Lambda \cap M_s$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Третьим гиперболическим параметром пересечения целочисленной решётки Λ с многомерным моноидом M_s называется наибольшее натуральное число $q_3(\Lambda \cap M_s)$, такое, что все целые точки гиперболического креста $K(q_3(\Lambda \cap M_s))$ отличные от нулевой содержатся в полной системе классов вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ относительно целочисленной решётки Λ и не содержатся в многомерном моноиде M_s . Другими словами все целые точки этого креста либо не сравнимы по модулю Λ , либо не принадлежат многомерному моноиду M_s .

Ясно, что $q_3(\Lambda) \leq q_3(\Lambda \cap M_s)$.

Произвольную функцию $f(\vec{x})$ на обобщенной параллелепипедальной сетке $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ с $\det \Lambda = N$ можно разложить в конечный ряд Фурье.

ТЕОРЕМА 11. Для любой функции $f(\vec{x})$ на $M(\Lambda)$ справедливо равенство

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i(\vec{x}, \vec{m}_j)},$$

где

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{y}, \vec{m}_j)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6]. $\square$

Из этой теоремы сразу следует, что если известны значения периодической функции $f(\vec{x})$ в узлах обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ целочисленной решётки Λ и выбрана произвольная полная система вычетов $M^*(\Lambda)$ решётки $\mathbb{Z}^s$ по подрешётке Λ , то следующий тригонометрический полином

$$S_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (58)$$

где

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (59)$$

является интерполяционным для функции $f(\vec{x})$.

Формула (58) задает оператор интерполирования I_Λ на пространстве E_s^α , который каждой функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен (58). Таким образом,

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) \left(\frac{1}{N} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x} - \vec{y})} \right). \quad (60)$$

ЛЕММА 10. Для любого тригонометрического полинома $f(\vec{x})$ вида

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \quad (61)$$

справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (62)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [4]. $\square$

Для функций $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ формула (59) переписется следующим образом

$$c_{M(\Lambda), M^*(\Lambda)}(\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\Lambda)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{y})} = \sum_{\vec{n} \in \Lambda, \vec{m} + \vec{n} \in M_s} c(\vec{m} + \vec{n}), \quad (63)$$

Отсюда следует, что если тригонометрический полином $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ имеет вид

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda) \cap M_s} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad (64)$$

то справедливо равенство

$$I_\Lambda f(\vec{x}) = f(\vec{x}). \quad (65)$$

ТЕОРЕМА 12. Для любой целочисленной решетки Λ и абсолютно минимальной гиперболической полной системы вычетов $M_H^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ для любой функции $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ справедлива оценка сверху погрешности интерполирования:

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq \frac{2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{(q_3(\Lambda \cap M_s))^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1}(q_3(\Lambda \cap M_s))}{(s-1)!(\alpha-1)} + O(\ln^{s-2}(q_3(\Lambda))) \right). \quad (66)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любой полной системы вычетов $M^*(\Lambda)$ фундаментальной решетки $\mathbb{Z}^s$ относительно подрешетки Λ и для функции $f(\vec{x}) \in M_s^\alpha$ имеем:

$$f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x})) = \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}, \vec{m} + \vec{n} \in M_s} c(\vec{m} + \vec{n}) \left(e^{2\pi i(\vec{m} + \vec{n}, \vec{x})} - e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} \right). \quad (67)$$

Отсюда следует, что

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq 2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \in M^*(\Lambda)} \sum_{\vec{n} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}, \vec{m} + \vec{n} \in M_s} \frac{1}{(\overline{m_1} + n_1 \dots \overline{m_s} + n_s)^\alpha}. \quad (68)$$

Теперь воспользуемся включением $K(q_3(\Lambda \cap M_s)) \subset M_H^*(\Lambda)$. Правая часть (68) только увеличится, если суммирование провести по всем целым точкам, не попавшим в гиперболический крест $K(q_3(\Lambda \cap M_s))$. Получим

$$\|f(\vec{x}) - I_\Lambda(f(\vec{x}))\|_C \leq 2\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m} \notin K(q_3(\Lambda \cap M_s))} \frac{1}{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^\alpha}. \quad (69)$$

Применяя к правой части (69) соотношения

$$\|f(\vec{x})\|_{l_2} \leq \|f(\vec{x})\|_C, \quad \|f(\vec{x})\|_C \leq \|f(\vec{x})\|_{l_1}, \quad \|f(\vec{x})\|_{l_1} \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} (1 + 2\zeta(\alpha))^s. \quad (70)$$

и для функции

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}. \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \|f(\vec{x})\|_{l_1} &\leq \frac{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right. \\ &\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^s C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^s C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \end{aligned} \quad (72)$$

при $t = q_3(\Lambda \cap M_s)$, получим утверждение теоремы. $\square$

5. Заключение

В данной статье удалось применить подходы, ранее развитые при анализе погрешности на классах E_s^α . Было бы интересно привлечь к решению этой проблемы модификацию множеств и сумм Быковского.

Выражаем свою благодарность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). С. 185 — 223.
2. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82 — 90.
3. М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О точности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 35–40.
4. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток // Деп. в ВИНТИ 24.08.84. — № 6090–84.
5. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122 – 143.
6. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.
7. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110 — 152.
8. Добровольский Н. Н. О гиперболическом параметре сетки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 6 — 18.
9. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.
10. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.
11. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.
12. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе // М.: Физматгиз, 1963.
13. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) // М.: МЦНМО, 2004. 288 с.
14. Н. М. Коробов, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками II // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24, вып. 4, С. 345–353.
15. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях // Чебышевский сборник, 2022, Т. 23, вып. 5, С. 130–144.
16. Н. К. Тер-Гукасова, М. Н. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О числе точек решетки решений линейного сравнения в прямоугольных областях II // Чебышевский сборник, 2023, Т. 24, вып. 4, С. 9–22.

17. К. Чандрасекхаран. Введение в аналитическую теорию чисел. / М.: Из-во "МИР", 1974.

REFERENCES

1. Dobrovol'skaya, L.P., Dobrovol'skii, N.M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.
2. Dobrovol'skii, M.N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", *Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 9, no. 1, pp. 82–90.
3. Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M. 2023, "On the accuracy of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 35–40.
4. Dobrovol'skii, N.M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", *Dep. v VINITI*, no. 6090–84.
5. N. M. Dobrovolsky, A. R. Yesayan, O. V. Andreeva, N. V. Zaitseva, 2004, "Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
6. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.
7. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.
8. Dobrovol'skii, N. N. 2013, "On the hyperbolic parameter of the grid", *Bulletin of Tula State University. Natural sciences. Issue 2. Part 1. P. 6 — 18.*
9. Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M., Rebrova, I.Yu., Rodionov, A.V. 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.
10. Korobov, N. M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
11. Korobov, N. M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
12. Korobov, N. M. 1963, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", *Fizmat-giz, Moscow, Russia.*
13. Korobov, N. M. 2004, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis]", 2nd ed, *MTSNMO, Moscow, Russia.*
14. Korobov, N.M., Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M. 2023, "On the estimation of the error of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 345–353.
15. Ter-Gukasova, N.K., Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.N. Dobrovol'skii, N.M. 2022, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 23, no. 5, pp. 130–144.

-
16. Ter-Gukasova, N.K., Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M. 2023, "On the number of lattice points of linear comparison solutions in rectangular areas II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 4, pp. 9–22.
 17. Chandrasekharan, K. 1974, "Introduction to Analytical Number Theory", *M.: Publishing House MIR*.

Получено: 15.05.2024

Принято в печать: 24.12.2024