

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-53-73

**Метод решения задачи Дельсарта для взвешенных дизайнов
на компактных однородных пространствах¹**

Д. В. Горбачев

Горбачев Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург); Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики (г. Москва).

e-mail: dv@mail@mail.ru

Аннотация

Предложен метод решения экстремальной задачи Дельсарта A_s для взвешенных дизайнов. Величина A_s равна верхней грани $f(1)$ на классе непрерывных неотрицательных на $[-1, 1]$ функций f , представимых разложением Фурье–Якоби с единичным нулевым коэффициентом и неположительными коэффициентами, начиная с номера $s + 1$. Основное приложение задачи A_s заключается в оценке снизу числа узлов взвешенных s -дизайнов (или квадратурных формул, точных на подпространстве полиномов степени не выше s) на компактных однородных римановых пространствах ранга 1, где зональными функциями являются многочлены Якоби. Метод решения задачи A_s базируется на выпуклом анализе и следует результатам В.В. Арестова и А.Г. Бабенко для случая сферических кодов, а также частным вариантам, полученным И.А. Мартыновым и автором. Метод состоит из нескольких шагов, включая формулировку двойственной задачи для меры Стилтеса, доказательство существования экстремальной функции и меры, выписывание соотношений двойственности, характеристика на их основе экстремальных функции и меры, сведение задачи к полиномиальной системе уравнений, доказательство в конкретных случаях существования в окрестности численного решения единственного действительного аналитического решения системы. Этот шаг делается сертификацией решения при помощи пакета HomotopyContinuation.jl, где реализован интервальный метод Кравчука. Также применяется равномерная оценка многочленов Якоби типа Стилтеса–Бернштейна. Описанным способом в качестве примера было решено две новых задачи Дельсарта. Также в случае, отвечающим проективным пространствам доказано, что экстремальная функция является многочленом. Для случая, отвечающего сфере, это пока открытая проблема. Данные результаты полезны в проблеме дискретизации интегральной нормы при оценке числа узлов дискретных норм.

Ключевые слова: задача Дельсарта, многочлен Якоби, однородное пространство, взвешенный дизайн, полиномиальная система, сертификация решения.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:

Горбачев, Д.В. Метод решения задачи Дельсарта для взвешенных дизайнов на компактных однородных пространствах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 53–73.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта по соглашению № . 075-15-2024-631.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-53-73

Method for solving the Delsarte problem for weighted designs on compact homogeneous spaces²

D. V. Gorbachev

Gorbachev Dmitry Viktorovich — doctor of physical and mathematical sciences, Saint Petersburg State University (St. Petersburg); Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (Moscow).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Abstract

A method for solving the Delsarte extremal problem A_s for weighted designs is proposed. The value of A_s is defined as the supremum of $f(1)$ over the class of continuous nonnegative functions f on $[-1, 1]$ that can be represented by a Fourier–Jacobi expansion with a unit zero coefficient and nonpositive coefficients starting from the $(s + 1)$ th term. The main application of the problem A_s lies in providing a lower bound for the number of nodes of weighted s -designs (or quadrature formulas, exact on a subspace of polynomials of degree at most s) in compact homogeneous Riemannian spaces of rank 1, where the zonal functions are Jacobi polynomials. The method for solving A_s is based on convex analysis and builds on the results of V.V. Arestov and A.G. Babenko for the case of spherical codes, as well as on specific cases developed by I.A. Martyanov and the author. The method involves several steps, including the formulation of a dual problem for the Stieltjes measure, proving the existence of the extremal function and measure, deriving the duality relations, characterizing the extremal function and measure based on these relations, reducing the problem to a polynomial system of equations, and demonstrating the existence of a unique real analytic solution of the system in the vicinity of a numerical solution in the studied cases. This step is carried out by certifying the solution using the HomotopyContinuation.jl package, which implements the Krawczyk interval method. A uniform estimate for Jacobi polynomials of the Stieltjes–Bernstein type is also applied. Using this approach, two new Delsarte problems were solved as examples. Additionally, for the case corresponding to projective spaces, it is proven that the extremal function is a polynomial. For the case corresponding to the sphere, this remains an open problem. These results are useful for the problem of discretizing the integral norm when estimating the number of nodes in discrete norms.

Keywords: Delsarte problem, Jacobi polynomial, homogeneous space, weighted design, polynomial system, certification of the solution.

Bibliography: 30 titles.

For citation:

Gorbachev, D.V. 2024, “Method for solving the Delsarte problem for weighted designs on compact homogeneous spaces”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 53–73.

²The study was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of a scientific project under agreement № . 075-15-2024-631.

Введение

Мы часто без специального указания будем использовать хорошо известные факты из теории ортогональных рядов Фурье–Якоби и гармонического анализа на компактных однородных пространствах ранга 1 (см., например, [1, 2, 3, 4, 5]).

Пусть $t \in [-1, 1]$, $\int = \int_{[-1, 1]}$, $R_k(t) = \frac{P_k^{(\alpha, \beta)}(t)}{P_k^{(\alpha, \beta)}(1)}$ — многочлены Якоби, ортогональные относительно меры $d\sigma(t) = \frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt}{\int_{[-1, 1]} \frac{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta dt}{dt}}$, $d_k \int R_k R_l d\sigma = \delta_{kl}$, $d_0 = 1$, $L^p = L^p([-1, 1]; d\sigma)$. При необходимости будем добавлять (α, β) к величинам, зависящим от этих параметров.

Рассматривается случай $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$. Тогда $|R_k(t)| \leq R_k(1) = 1$. Будут изучаться ортогональные разложения Фурье–Якоби действительных функций $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k$ с коэффициентами $f_k = d_k \int f R_k d\sigma$.

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$, F_s — класс функций $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k \in C[-1, 1]$, таких что $f \geq 0$ на $[-1, 1]$, $f_0 = 1$, $f_k \leq 0$ при $k \geq s+1$. Классы F_s , очевидно, непусты и содержат, например, единичную функцию, неотрицательные на $[-1, 1]$ алгебраические многочлены степени s , $1 - \varepsilon R_{s+1}$ для $\varepsilon \in [0, 1]$. Более сложные примеры функций построены в работах [6, 7, 8].

Экстремальная задача Дельсарта для дизайнов заключается в нахождении величины

$$A(F_s) = \sup_{f \in F_s} f(1). \quad (1)$$

Положим $A_s = A(F_s)$. Ясно, что $A_0 = 1$ с экстремальной функцией $f^* = 1$.

ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ. *Предложена схема решения экстремальной задачи A_s для выбранных параметров (α, β) и s .*

Перед изложением этого результата обоснуем важность задачи A_s и приведем известные результаты по ее решению. Основное приложение (1) заключается в оценке снизу числа узлов квадратурных формул, называемых дизайнами, на компактных однородных римановых пространствах $M = G/H$ ранга 1, где G — группа движений M , H — стационарная подгруппа некоторой фиксированной точки $o \in M$ (см., например, [4]). Эта связь в случае евклидовой сферы была установлена Ф. Дельсартом, Дж. Геталсом и Й. Зейделем [9]. Они же ввели термин дизайн.

На пространствах ранга 1 действует унифицированный гармонический анализ и они полностью классифицированы. Их список состоит из евклидовой сферы $\mathbb{S}^d$ и проективных пространств $\mathbb{P}^d(K)$, где $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \text{Ca}$, $d = \dim M$ (см. табл. 1).

Таблица 1: Компактные пространства ранга 1

Пространство	d	α	β
$\mathbb{S}^d$	$1, 2, 3, \dots$	$\frac{d}{2} - 1$	$\frac{d}{2} - 1$
$\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$	$2, 3, 4, \dots$	$\frac{d}{2} - 1$	$-\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}^d(\mathbb{C})$	$4, 6, 8, \dots$	$\frac{d}{2} - 1$	0
$\mathbb{P}^d(\mathbb{H})$	$8, 12, 16, \dots$	$\frac{d}{2} - 1$	1
$\mathbb{P}^{16}(\text{Ca})$	16	7	3

Пусть $L^2(M) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k$ — стандартное разложение на подпространства гармоник H_k , где $\|f\|_2 = (\int_M |f|^2 d\mu)^{1/2}$, μ — нормированная инвариантная мера на M . Гармоники H_k являются собственными подпространствами оператора Лапласа–Бельтрами Δ_0 , а также инвариантными

подпространствами, на которых действуют неприводимые представления G . Их воспроизводящие ядра выражаются через (зональные) многочлены Якоби с параметрами (α, β) из табл. 1:

$$u(x) = d_k \int_M u(y) R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \rho(x, y)) d\mu(x), \quad d_k = \dim H_k,$$

где ρ — метрика на M , нормированная условием $\text{diam } M = \pi$.

Пусть $U_s = \bigcup_{k=0}^s H_k$ — подпространство полиномов степени не выше s . Его воспроизводящее ядро $\dim U_s R_s^{(\alpha+1, \beta)} = \sum_{k=0}^s d_k R_k^{(\alpha, \beta)}$, где размерность

$$\dim U_s = \frac{\Gamma(\beta+1)s^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)} (1 + O(s^{-1})), \quad s \rightarrow \infty.$$

Следуя [9] конечное множество узлов и весов $\{x_i, \lambda_i\}_{i=1}^N \subset M \times \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, называется взвешенным дизайном порядка s (или s -дизайном), если для любого движения $g \in G$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i u(gx_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i), \quad \forall u \in U_s.$$

Эквивалентно, данное условие можно записать в виде квадратурной формулы

$$\int_M u(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i), \quad \forall u \in U_s. \quad (2)$$

Отсюда, в частности, следует естественность условия $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$. В свою очередь, формула (2) справедлива тогда и только тогда, когда

$$\int_M \int_M R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \rho(x, y)) d\mu(x) d\mu(y) = \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \rho(x_i, x_j)), \quad k = 0, 1, \dots, s, \quad (3)$$

или

$$\int_M \int_M R_s^{(\alpha+1, \beta)}(\cos \rho(x, y)) d\mu(x) d\mu(y) = \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j R_s^{(\alpha+1, \beta)}(\cos \rho(x_i, x_j)).$$

Дизайны важны в комбинаторной геометрии, теории кодирования, вычислительной математике, гармоническом анализе, например, проблеме дискретизации нормы (см. раздел 4), компьютерной графике. Фундаментальной проблемой является вычисление наименьшего числа точек $N = N^*(s)$ в квадратурной формуле (2). По общей теореме Чакалова [10, гл. 2] (см. также [11, теорема 4.1])

$$N^*(s) \leq \dim U_s. \quad (4)$$

С другой стороны, имеем следующую оценку из работы [9], часто называемую оценкой линейного программирования:

$$N^*(s) \geq A_s. \quad (5)$$

Доказательство (5) базируется на двух-точечном распределении узлов и вытекает из следующей цепочки неравенств для произвольной функции $f \in F_s$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^2 f(1) &\leq \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 f(1) \leq \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j f(\cos \rho(x_i, x_j)) \\ &= f_0 \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j + \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k \sum_{i,j=1}^N \lambda_i \lambda_j R_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \rho(x_i, x_j)) \leq 1, \end{aligned}$$

где мы воспользовались условиями $f \geq 0$, $f_0 = 1$, $f_k \leq 0$ при $k \geq s+1$, равенствами (3) и положительной определенностью многочленов Якоби как зональных функций соответствующего однородного пространства.

Отметим, что отдельное внимание уделяется более сложному случаю равных весов. Если оценка (5) не меняется, то долгое время стоял вопрос об аналоге теоремы Чакалова. Недавно в работах [12] (случай сферы) и [13] (общий случай) была доказана оценка $N^*(s) \leq C_2 \dim U_s$. Однако здесь числовые значения константы C_2 пока не известны, кроме случая $\mathbb{S}^1$.

1. Известные результаты по задаче Дельсарта

Пусть Π_n — множество алгебраических многочленов степени $\leq n$,

$$F_{s,n} = F_s \cap \Pi_n \subset F_s, \quad A_{s,n} = A(F_{s,n}).$$

Ясно, что $A_{s,n} \leq A_s$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. В работах [9] (случай сферы) и [4] (общий случай) доказано, что

$$A_{s,s} = \frac{\binom{[(s+1)/2]+\alpha+\beta+1}{[(s+1)/2]} \binom{[s/2]+\alpha+1}{[s/2]}}{\binom{[(s+1)/2]+\beta}{[(s+1)/2]}}. \quad (6)$$

Отсюда для параметров (α, β) из табл. 1 получается так называемая оценка плотных дизайнов

$$N^*(s) \geq A_{s,s}. \quad (7)$$

Например, для случая окружности $\mathbb{S}^1$ ($\alpha = \beta = -1/2$) имеем $A_{s,s} = s+1$. При этом для любого $u \in U_s$ справедлива формула прямоугольников

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx = \frac{1}{s+1} \sum_{i=1}^{s+1} u\left(\frac{2\pi i}{s+1}\right).$$

Поэтому $N^*(s, \mathbb{S}^1) = s+1$ и вершины правильного $(s+1)$ -угольника с равными весами являются экстремальной конфигурацией. В данном случае U_s — подпространство тригонометрических многочленов и $\dim U_s = 2s+1$. Таким образом, общая оценка (4) в конкретных случаях может быть улучшена в константу число раз.

Активно изучалось описание всех плотных s -дизайнов, на которых достигается граница (7). Данная проблема не решена до конца. В теории дизайнов важны случаи как небольших s (например, для теории алгебраических решеток), так и больших s (например, для теории численного интегрирования). Оценка (7) остается наилучшей универсальной границей для небольших s , соизмеримых с α . Однако при больших s она была усилена следующим образом.

Имеем

$$A_{s,s} = (1/2)^{2\alpha+2} \dim U_s (1 + O(s^{-1})), \quad s \rightarrow \infty.$$

Отсюда, (4), (5) и равенства $d = 2\alpha + 2$ (см. табл. 1) следует, что

$$C_1 \dim U_s \leq N^*(s)(1 + o(1)) \leq C_2 \dim U_s, \quad (1/2)^d \leq C_1 \leq C_2 \leq 1. \quad (8)$$

В работах [6] (случай сферы) и, независимо, [7, 8] (общий случай) была сконструирована функция из класса F_s с малым носителем на $[-1, 1]$ и бесконечным числом слагаемых в разложении Фурье–Якоби, с помощью которой доказывается неравенство Юдина

$$A_s \geq \frac{\int_{-1}^1 d\sigma}{\int_{t'_s}^1 d\sigma}, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

где t'_s — наибольший нуль производной многочлена Якоби $P_{s+1}^{(\alpha, \beta)}$. При $\alpha = \beta = -1/2$ получаем правильную оценку $s + 1$. В общем случае при больших s имеем

$$A_s \geq \Gamma^2(\alpha + 2)(2/q_{\alpha+1})^{2\alpha+2} \dim U_s(1 + O(s^{-1})),$$

где $q_{\alpha+1}$ — первый положительный нуль функции Бесселя $J_{\alpha+1}$,

$$\Gamma^2(\alpha + 2)(2/q_{\alpha+1})^{2\alpha+2} \sim \pi(2\alpha + 2)(2/e)^{2\alpha+2}.$$

Для $\alpha = d/2 - 1$ отсюда получаем наилучшую на сегодня нижнюю оценку

$$C_1 \geq \pi d(2/e)^d \gg (1/2)^d. \quad (9)$$

Отметим, что между верхней и нижней оценками констант остается экспоненциальный зазор.

Для случая сферы $\mathbb{S}^d$ величина $N^*(s)$, вычисленная на основе A_s , известна для следующих пар параметров (d, s) , где веса экстремального дизайна равны:

$$(1, s), (d, 1), (d, 2), (d, 3) \quad (\text{здесь } s \text{ и } d \text{ любые}), \quad (2, 5), (3, 11)^*, (5, 4), (6, 5), (7, 7), (21, 4), (22, 5), (22, 7), (23, 11). \quad (10)$$

Для всех пар достигается оценка плотных дизайнов (7), кроме пары, помеченной звездочкой. Для этого случая, отвечающего сфере $\mathbb{S}^3$ ($\alpha = \beta = 1/2$), в работе [14] доказано, что

$$N^*(11, \mathbb{S}^3) = A_{11}^{(1/2, 1/2)} = A_{11, 17}^{(1/2, 1/2)} = 120,$$

экстремальный 11-дизайн — правильный 120-вершинник. Отметим, что еще ранее, например, в [15] показывалось, что оценка (7) улучшается на многочленах чуть большей чем s степени.

Наряду с проблемой Дельсарта для дизайнов изучается задача Дельсарта для кодов. Рассмотрим ее вариант, в сферическом случае отвечающий оценке контактного числа — максимального числа $M^*(r)$ шаров в $\mathbb{R}^{d+1}$ одинакового радиуса r , которое можно прислонить к фиксированному шару радиуса 1 (шары могут пересекаться только по границам). В классической постановке $r = 1$. Пусть $\tau = \cos(2 \arcsin \frac{r}{1+r})$, G_τ — класс функций $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k R_k \in C[-1, 1]$, таких что $f \leq 0$ на $[-1, \tau]$, $f_0 = 1$, $f_k \geq 0$ при $k \geq 1$. В задаче Дельсарта для кодов требуется найти величину

$$B_\tau = B(G_\tau) = \inf_{f \in G_\tau} f(1).$$

Тогда $M^*(r) \leq B_\tau$, в частности, $M^*(1) \leq B_{1/2}$.

До работы [16] были известны только три значения $B_{1/2}$ в случаях $\mathbb{S}^d$, $d = 1, 7, 23$, когда справедливо равенство $B_{1/2} = M^*(1)$. В [16] было замечено, что задача $B_{1/2}$ является задачей бесконечномерного линейного программирования и к ней можно применить теорию двойственности из книги [17]. На этом пути авторы решили задачу $B_{1/2}$ для $\mathbb{S}^3$:

$$B_{1/2}^{(1/2, 1/2)} = B(G_{1/2}^{(1/2, 1/2)} \cap \Pi_9) = 25.55842 \dots$$

Отсюда следует, что $M^*(1, \mathbb{S}^3) \leq 25$, в то время как гипотеза была $M^*(1, \mathbb{S}^3) = 24$. Она была доказана в работе [20] за счет модификации метода Дельсарта (после появилось полностью аналитическое доказательство на основе полуопределенного программирования). Несмотря на то, что здесь решение задачи Дельсарта не дало точный ответ, данный результат важен, например, в контексте оценки плотности сферической упаковки. Метод [16] был развит в работах [18, 19], где задача Дельсарта $B_{1/2}$ была решена для сфер $\mathbb{S}^d$ размерности $d \leq 172$. Во всех известных случаях экстремальной функцией оказывался многочлен (кроме $d = 1$).

В работах [21, 22] предпринята попытка перенести результаты [16] для сферических кодов на случай сферических дизайнов. В результате удалось решить задачу A_s для пар $(2, 4)$ ($\alpha = \beta = 0$) и $(3, 4)$:

$$A_4^{(0,0)} = A_{4,22}^{(0,0)} = 9.31033\dots,$$

$$A_4^{(1/2,1/2)} = A_{4,7}^{(1/2,1/2)} = 14.56031\dots$$

В первом случае существует взвешенный дизайн из 10 узлов с неравными весами, поэтому $N^*(4, \mathbb{S}^2) = 10$ [23]. Во втором случае получаем оценку $N^*(4, \mathbb{S}^2) \geq 15$, в то время как гипотеза состоит в том, что $N^*(4, \mathbb{S}^3) = 16$.

В [21, 22] был использован упрощенный подход без формулировки двойственной задачи в терминах мер Стильбеса. Здесь мы, следуя [16], дадим полную формулировку двойственной задачи (на основе книг [17, 24]), установим существование экстремальной функции в прямой задаче A_s (с использованием леммы Мазура) и экстремальной меры в двойственной задаче (при помощи [24]). Как следствие, по аналогии с [16] с помощью соотношений двойственности и асимптотики многочленов Якоби доказывается, что в случае $\alpha > \beta$, отвечающем проективным пространствам, экстремальной функцией будет многочлен. Для сферы это еще открытая проблема. Шаги, связанные с компьютерными вычислениями, мы сохраняем, продолжая для сертификации численного решения использовать HomotopyContinuation.jl.

2. Схема решения задачи A_s

Схема состоит из пяти шагов. Вначале теоретические шаги.

1. Постановка двойственной задачи. Доказательство существования экстремальной функции f^* и меры ρ^* .

2. Применение соотношений двойственности.

Дальше начинаются шаги, использующие компьютерные вычисления и системы компьютерной алгебры.

3. Нахождение кандидатов на роль f^* и ρ^* .

4. Выписыванием полиномиальной системы для кандидатов и получение численного решения с большой точностью.

5. Сертификация численного решения и проверка принадлежности f^* и ρ^* соответствующим классам.

Так как случай $s = 0$ сделан, далее считаем $s \in \mathbb{N}$.

Шаг 1. Двойственная задача

Установим некоторые свойства задачи (1). Ясно, что классы F_s увеличиваются с ростом s , соответственно величина A_s не убывает по s и ограничена снизу величиной (6). Множество F_s выпуклое и непустое. Нетрудно видеть, что A_s — задача бесконечномерного линейного программирования.

Для функций $f \in F_s$ имеем $0 \leq f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Отсюда

$$\sum_{k=s+1}^{\infty} |f_k| = - \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k \leq \sum_{k=0}^s f_k,$$

поэтому $(f_k) \in l_1$. Кроме того,

$$f(1) \leq \sum_{k=0}^s f_k \leq \sum_{k=0}^s |f_k| \leq \sum_{k=0}^s d_k \int f d\sigma = \sum_{k=0}^s d_k = D_s,$$

откуда $A_s \leq D_s$. Для пространств ранга 1 будем иметь $A_s \leq \dim U_s$. Такая же оценка следует из теоремы Чакалова (4) с учетом неравенства (5). Еще дадим оценку нормы

$$\|f\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| \leq 2 \sum_{k=0}^s |f_k| = 2D_s. \quad (11)$$

ЛЕММА 1. *Экстремальная функция $f^* \in F_s$, для которой $f^*(1) = A_s$, существует. Она имеет нули на $[-1, 1]$, которые сосредоточены на $[-1, 1 - \delta]$ для некоторого малого $\delta > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Авторы [16] в своей задаче использовали общие результаты из [17]. Мы воспользуемся идеей из работы [25, раздел 6]. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset F_s$ — последовательность функций, для которой $f_n(1) = A_s(1 + o(1))$ при $n \rightarrow \infty$. В силу (11) имеем $\|f_n\|_2 \leq 2D_s$, поэтому последовательность f_n сходится к некоторой функции $f^* \in L^2$ слабо. По лемме Мазура найдется последовательность f'_n выпуклых комбинаций элементов f_n , которая сходится к f^* сильно. Так как множество F_s выпуклое, то $\{f'_n\} \subset F_s$. Ясно, что $f'_n(1) = A_s(1 + o(1))$. Выберем из f'_n подпоследовательность f''_n , которая сходится к f почти всюду. Теперь снимем штрихи. В итоге, имеем последовательность $\{f_n\} \subset F_s$, $f_n(1) = A_s(1 + o(1))$, которая сходится сильно в L^2 и почти всюду к функции f^* . Отсюда $(f_n)_k \rightarrow f^*_k$ при $n \rightarrow \infty$, $f^*_0 = 1$, $f^*_k \leq 0$, $k \geq s + 1$, $f^* \geq 0$ почти всюду на $[-1, 1]$.

Осталось показать, что $(f^*_k) \in l_1$, откуда будет $f^* \in C[-1, 1]$ и $f^*(1) = A_s$. Воспользуемся сверткой Фурье–Якоби, положительной при $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ [2, 3]. Для произвольного малого $\varepsilon > 0$ возьмем непрерывную неотрицательную функцию φ_ε с неотрицательными коэффициентами $(\varphi_\varepsilon)_k$, такую что $\int \varphi_\varepsilon d\sigma = 1$, $\int \varphi_\varepsilon R_k d\sigma \rightarrow 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $k \geq 1$. Функция φ_ε стандартно строится из гладкой функции с малым носителем $[1 - \varepsilon, 1]$ при помощи свертки. Тогда с учетом $|f_k| \leq d_k$, $\int \varphi_\varepsilon R_k d\sigma \leq 1$ получим

$$0 \leq (f * \varphi_\varepsilon)(1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int \varphi_\varepsilon R_k d\sigma, \quad \sum_{k=s+1}^{\infty} |f_k| \int \varphi_\varepsilon R_k d\sigma \leq D_s.$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $(f_k) \in l_1$. Существование экстремальной функции f^* доказано.

Имеем $R_1 = 1 - a + at$, $a \in (1/2, 1]$, поэтому, если $f^* \geq \varepsilon$ на $[-1, 1]$ для $\varepsilon > 0$, то функция $f^* + \varepsilon R_1 \in F_s$ и $f^*(1) + \varepsilon > f^*(1)$. Поэтому f^* имеет нули на $[-1, 1]$. Их нет в некоторой окрестности $[1 - \delta, 1]$, так как f^* непрерывна и $f^*(1) > 0$. Лемма доказана. $\square$

Далее воспользуемся результатами [24, раздел 8.6], [17, гл. 2, § 2]. Сформулируем прямую задачу в виде, удобном для постановки двойственной задачи. Пусть $f \in F_s$. Введем бесконечный вектор $x = (x'_1, x''_1, \dots, x'_s, x''_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots) \in l_1 = X$ и положим

$$f_k = x'_k - x''_k, \quad 1 \leq k \leq s, \quad f_k = -x_k, \quad k \geq s + 1.$$

Тогда $x \geq 0$ (все координаты неотрицательные),

$$f(t) = (Gx)(t) = -\left(\sum_{k=1}^s (x'_k - x''_k) R_k(t) - \sum_{k=s+1}^{\infty} x_k R_k(t)\right) \in C[-1, 1] = Z.$$

Оператор $G: X \rightarrow Z$ — линейный, поэтому выпуклый.

На основе (1) выписываем прямую задачу

$$A_s = 1 + \sup \left(\sum_{k=1}^s (x'_k - x''_k) - \sum_{k=s+1}^{\infty} x_k \right), \quad Gx \leq 1, \quad x \geq 0.$$

Имеем $Gx_0 < 1$ для $x_0 = 0$ (справедливо условие Слейтера) и $A_s \leq D_s$ (ограниченность). Из леммы 1 следует существование экстремального x^* , отвечающего коэффициентам f^* .

Двойственное к Z пространство состоит из интегральных функционалов вида $Q_\lambda(f) = \int f d\lambda$, где λ — функция ограниченной вариации, определяющая меру Стильтьеса. Сопряженный к G оператор находится из равенства

$$\begin{aligned} (Gx, \lambda) &= \int Gx d\lambda = - \int \left(\sum_{k=1}^s (x'_k - x''_k) R_k - \sum_{k=s+1}^{\infty} x_k R_k \right) d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^s (x'_k - x''_k) (-Q_\lambda(R_k)) + \sum_{k=s+1}^{\infty} x_k Q_\lambda(R_k) = (x, G^* \lambda), \end{aligned}$$

где

$$G^* \lambda = (-Q_\lambda(R_1), Q_\lambda(R_1), \dots, -Q_\lambda(R_s), Q_\lambda(R_s), Q_\lambda(R_{s+1}), Q_\lambda(R_{s+2}), \dots).$$

В итоге, двойственная задача записывается в виде

$$A_s^* = 1 + \inf Q_\lambda(1), \quad G^* \lambda \geq (1, -1, \dots, 1, -1, -1, -1, \dots), \quad d\lambda \geq 0.$$

Условие на $G^* \lambda$ эквивалентно

$$-1 \leq Q_\lambda(R_k) \leq -1 \quad \text{или} \quad Q_\lambda(R_k) = -1, \quad 1 \leq k \leq s,$$

$$Q_\lambda(R_k) \geq -1, \quad k \geq s+1.$$

Неотрицательность $d\lambda \geq 0$ означает, что λ — неубывающая ограниченная функция.

Положим $\rho = \delta_1 + \lambda$, где δ_1 — мера Дирака в точке $t = 1$, $\int f d\delta_1 = f(1)$. Тогда с учетом [24, теорема 1, раздел 8.6] приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. *Двойственная задача Дельсарта имеет вид*

$$A_s^* = \inf Q_\rho(1), \quad Q_\rho(R_k) \begin{cases} = 0, & 1 \leq k \leq s, \\ \geq 0, & k \geq s+1, \end{cases} \quad \rho = \delta_1 + \lambda, \quad d\lambda \geq 0.$$

Экстремальная мера Стильтьеса $\rho^ = \delta_1 + \lambda^*$ существует. Справедливо равенство $A_s = A_s^*$ или $f^*(1) = Q_{\rho^*}(1)$, а также соотношения двойственности*

$$\int f^* d\lambda^* = \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k^* Q_{\rho^*}(R_k) = 0, \tag{12}$$

где f^* — экстремальная функция в задаче A_s .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Оценка $A_s \leq A_s^*$ получается просто:*

$$f(1) \leq f(1) + \int f d\lambda = \int f d\rho = Q_\rho(1) + \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k Q_\rho(R_k) \leq Q_\rho(1).$$

Основная сложность состоит в доказательстве обратного неравенства и существования экстремальной меры. Здесь и потребовались глубокие сведения из выпуклого анализа.

Шаг 2. Соотношения двойственности

Из соотношений двойственности (12) и условий на f^* , ρ^* вытекают следующие факты: для $t \in [-1, 1]$

$$\begin{cases} \lambda^*(\{t\}) = 0, & f^*(t) > 0, \\ f^*(t) = 0, & \lambda^*(\{t\}) > 0, \end{cases} \quad (13)$$

и для $k \geq s + 1$

$$\begin{cases} Q_{\rho^*}(R_k) = 0, & f_k^* < 0, \\ f_k^* = 0, & Q_{\rho^*}(R_k) > 0. \end{cases} \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. (а) В силу (13) имеем $\lambda^* = 0$ на промежутке $[1 - \delta, 1]$, где δ такое же, как в лемме 1.

(б) Если экстремальная функция f^* имеет только конечное число нулей

$$-1 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m < 1,$$

где $\tau_i > -1$ имеют четную кратность, то экстремальная мера ρ^* будет функцией скачков (дискретная): для произвольной функции $f \in C[-1, 1]$

$$Q_{\rho^*}(f) = f(1) + \int f d\lambda^* = f(1) + \sum_{i=1}^m \rho_i f(\tau_i), \quad \rho_i = \lambda^*(\{\tau_i\}) \geq 0. \quad (15)$$

Покажем, что следствие 1 (б) верно при $\alpha > \beta$ (см. также [16]).

ТЕОРЕМА 1. Если $\alpha > \beta \geq -1/2$, то экстремальная функция f^* — многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что в условиях теоремы $|R_k(t)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно на промежутке $[-1, 1 - \delta]$. Поэтому $Q_{\rho^*}(R_k) = 1 + Q_{\lambda^*}(R_k) > 0$ для всех достаточно больших k . Отсюда и из (14) имеем $f_k^* = 0$ для таких k и f^* — многочлен. Теорема доказана. $\square$

Для многочленов Якоби при $\alpha = \beta$ имеем $R_k(-t) = (-1)^k R_k(t)$. Поэтому доказательство теоремы 1 не работает для нечетных k . Однако можно утверждать, что $Q_{\rho^*}(R_k) > 0$ для всех достаточно больших четных k и $f_k^* = 0$ для таких k . Тем не менее выдвинем следующее предположение, базирующиеся на известных примерах и свойствах многочленов Якоби.

Гипотеза. При всех $\alpha \geq \beta \geq -1/2$, $(\alpha, \beta) \neq (-1/2, -1/2)$, экстремальной функцией f^* будет многочлен вида

$$f^*(t) = \omega(t)g^*(t), \quad \omega(t) = \begin{cases} (t+1) \prod_{i=2}^m (t - \tau_i)^2, & \tau_1 = -1, \\ \prod_{i=1}^m (t - \tau_i)^2, & \tau_1 > -1, \end{cases} \quad (16)$$

где корни многочлена g^* лежат в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Соответствующая экстремальная мера ρ^* — дискретная вида (15). Кроме того, $\|f^*\|_\infty = f^*(1)$.

Заметим, что при $\alpha = \beta = -1/2$ есть две экстремальные функции — многочлен из класса $F_{s,s}$ и функция Юдина из класса F_s . Их выпуклая комбинация также экстремальная.

Шаг 3. Нахождение кандидатов

Далее мы во многом следуем результатам [21, 22], делая их более строгими и общими. В свете теоремы 1 и гипотезы естественно искать решение на подклассе многочленов $f \in F_{s,n}$ вида (16) для некоторого $n \geq s + 1$. Укажем два способа решить задачу $A_{s,n}$ численно.

1. Первый способ годится для быстрой оценки кандидатов. Он восходит к [26] и использовался разными авторами, в частности [16]. В этом случае $A_{s,n}$ сводится к конечномерной

задаче линейного программирования за счет замены непрерывного условия $f(t) \geq 0$ на $[-1, 1]$ сеточным условием $f(t_j) \geq 0$, где $-1 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ на достаточно густой сетке размера $N \gg n$. Положим $t_j = \cos \theta_{N-j}$, где $\theta_j = \frac{\pi j}{N}$. Тогда

$$A_{s,n}^N = \max_{f_k} f(1), \quad f(t) = 1 + \sum_{k=1}^n f_k R_k(t),$$

$$f(t_j) \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad f_k \leq 0, \quad s+1 \leq k \leq n.$$

ЛЕММА 3. Пусть многочлен f^N — решение задачи $A_{s,n}^N$ с дополнительным условием

$$f(t_j) \leq 2D_s, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (17)$$

отвечающим (11). Тогда f^N стремится равномерно к экстремальному многочлену f^* задачи $A_{s,n}$ и $A_{s,n}^N \rightarrow A_{s,n}$ при $N \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что отрицательные минимумы многочленов f задачи $A_{s,n}^N$ достаточно близки к нулю при достаточно большом N . Пусть $\mu = \min_{[-1,1]} f < 0$. Удобно сделать тригонометрическую подстановку и оценивать четный тригонометрический многочлен $f(\cos \theta)$ степени n на $[0, \pi]$. Пусть $\mu = f(\cos \theta_*)$ и θ_{j*} — ближайшая к θ_* точка сетки $\{\theta_j\}$, $|\theta_* - \theta_{j*}| \leq \frac{\pi}{2N}$. Тогда, учитывая неотрицательность $f(\cos \theta)$ на сетке, теорему о среднем значении, неравенство Бернштейна и неравенство Марцинкевича–Зигмунда

$$\|f\|_\infty \leq 2 \max_{0 \leq j \leq N} |f(\cos \theta_j)| \leq 4D_s, \quad (18)$$

получаем

$$|\mu| = -f(\cos \theta_*) \leq f(\cos \theta_{j*}) - f(\cos \theta_*) \leq \frac{\pi \|(f(\cos \theta))'\|_\infty}{2N} \leq \frac{\pi n \|f\|_\infty}{2N} \leq \frac{2\pi D_s n}{N}. \quad (19)$$

Ясно, что $A_{s,n} \leq A_{s,n}^N = f^N(1)$. С другой стороны, если $\mu^N \leq 0$ — минимум f^N , то многочлен $\frac{f^N - \mu^N}{1 - \mu^N} \in F_{s,n}$, поэтому

$$\frac{f^N(1) - \mu^N}{1 - \mu^N} \leq A_{s,n} \leq f^N(1).$$

Отсюда, (19) и из равномерной ограниченности (18) приходим к утверждению леммы. $\square$

На практике задача $A_{s,n}^N$ решается без дополнительного условия (17). Тогда ее двойственная проблема имеет вид

$$A_{s,n}^{N*} = \min_{g_j} Q_g(1), \quad Q_g(f) = f(1) + \sum_{j=0}^{N-1} g_j f(t_j),$$

$$Q_g(R_k) \begin{cases} = 0, & 1 \leq k \leq s, \\ \geq 0, & s+1 \leq k \leq n, \end{cases} \quad g_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Она отвечает дискретному варианту двойственной проблемы из леммы 2. Из теории двойственности для конечномерных задач имеем $A_{s,n}^N = A_{s,n}^{N*}$ и справедливы условия дополняющей нежесткости (конечномерные соотношения двойственности)

$$\sum_{j=0}^{N-1} g_j^N f^N(t_j) = \sum_{k=s+1}^n f_k^N Q_{g^N}(R_k) = 0.$$

Данные задачи можно решить одновременно прямо-двойственным методом линейного программирования. В итоге, находим решения f_k^N и g_j^N . На практике проводится серия вычислительных экспериментов с увеличением степени n . Признаком окончания является неизменность индексов ненулевых значений векторов f_k^N и g_j^N .

По найденным f_k^N путем отбрасывания нулевых в рамках погрешности значений (округления) находим кандидат

$$f^* = 1 + \sum_{k \in K^*} f_k^* R_k, \quad K^* = \{1, \dots, s\} \cup \{s+1 \leq k \leq n: f_k^* < 0\}. \quad (20)$$

В качестве округленных корней $\tau_i \in [-1, 1)$ можно взять локальные минимумы f^* на этом промежутке, которые близки к нулю в рамках погрешности. Сумма элементов кластеров из ненулевых координат g_j и соответствующих средних значений точек t_j отвечают округленным скачкам ρ_i кандидата ρ^* и нулям τ_i экстремального многочлена f^* соответственно. Таким образом, можно дополнительно убедиться в правильности расчета τ_i . Еще одной проверкой правильности расчета ρ_i , τ_i будут вытекающие из соотношений двойственности и (15) равенства (с точностью до округления)

$$Q_{\rho^*}(R_k) = 1 + \sum_{i=1}^m \rho_i R_k(\tau_i) = 0, \quad k \in K^*. \quad (21)$$

2. Второй способ напрямую сводит решение задачи $A_{s,n}$ к проблеме полуопределенного программирования (см. [19, 21]). Без ограничения общности считаем $n = 2n_0 + 1$. По теореме Люкача [1] неотрицательный на $[-1, 1]$ многочлен f имеет представление

$$f(t) = (1-t)q_1^2(t) + (1+t)q_2^2(t),$$

где q_j — многочлены степени n_0 . Имеем $q_j^2 = \langle Q_j z, z \rangle$, где $z = (1, t, \dots, t^{n_0})$ — вектор мономов, $Q_j \succcurlyeq 0$ — симметричные неотрицательно определенные матрицы. Введем блочную матрицу $X = Q_1 \otimes Q_2$. Из тождества

$$\sum_{k=0}^n f_k R_k(t) = (1-t)\langle Q_1 z, z \rangle + (1+t)\langle Q_2 z, z \rangle$$

приравниванием при одинаковых степенях t находим $f_k = \langle D_k, X \rangle$, где D_k — некоторые числовые матрицы. Определим матрицу C из равенства $f(1) = 2q_2^2(1) = \langle C, X \rangle$. В итоге, имеем

$$A_{s,n} = \max_X \langle C, X \rangle, \quad \langle D_0, X \rangle = 1, \quad \langle D_k, X \rangle \leq 0, \quad s+1 \leq k \leq n, \quad X \succcurlyeq 0.$$

Для решения данной проблемы применяется прямо-двойственный метод внутренней точки, позволяющий выписать экстремальный многочлен f^* в прямой задаче $A_{s,n}$ и соответствующую ему экстремальную дискретную меру ρ^* в двойственной задаче $A_{s,n}^*$. В настоящее время доступны солверы (например, SDPA-GMP), которые эффективно решают подобные задачи численно. Они учитывают блочную структуру матриц и используют расширенную арифметику, что необходимо при работе с сильно осциллирующими многочленами (см., например, работу [27] и ссылки в ней, где в том числе есть существенное продвижение в проблеме доказательства оптимальности многомерных сферических кодов на основе трех-точечного распределения кода).

Шаг 4. Полиномиальная система

Как только есть кандидаты f^* (см. (20)) и ρ^* (см. (15)) на решение, найденные на предыдущем шаге, из (21) и учета кратности нулей τ_i выписываем следующую полиномиальную систему, которой удовлетворяют параметры f_k^* , ρ_i , τ_i :

$$\begin{aligned} Q_{\rho^*}(R_k) &= 1 + \sum_{i=1}^m \rho_i R_k(\tau_i) = 0, \quad k \in K^*, \\ f^*(\tau_i) &= 1 + \sum_{k \in K^*} f_k^* R_k(\tau_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ (f^*)'(\tau_i) &= \sum_{k \in K^*} f_k^* R_k'(\tau_i) = 0, \quad i = \begin{cases} 2, \dots, m, & \tau_1 = -1, \\ 1, \dots, m, & \tau_1 > -1. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Всего имеем $|K^*|$ неизвестных f_k^* и столько же уравнений в первой пачке (22), $2m$ (если $\tau_1 > -1$) или $2m - 1$ (если $\tau_1 = -1$) неизвестных ρ_i , τ_i и столько же уравнений во второй и третьей пачке (22). Для рациональных α и β коэффициенты многочленов Якоби рациональные, поэтому в этом случае коэффициенты системы также будут рациональными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\alpha = \beta$ (для сферы), когда $R_k(-t) = (-1)^k R_k(t)$, появляется следующий случай: $\rho_1 = 1$, $\tau_1 = -1$ и симметрично $\rho_i = \rho_{m-i+2}$, $\tau_i = -\tau_{m-i+2}$, $i = 2, \dots, (m+1)/2$, где m — нечетное. Тогда автоматически $Q_{\rho^*}(R_k) = 0$ для всех нечетных k . Поэтому в системе нужно вычеркнуть все уравнения с нечетными k , оставив при этом с учетом симметрии только переменные ρ_i , τ_i , $i = 2, \dots, (m+1)/2$. Далее нужно убедиться в совместности системы. Например, все это верно для пары (2, 5) (см. список (10)), когда решением задачи A_5 является многочлен $f^*(t) = (3/8)(t+1)(5t^2-1)^2$, $\rho_2 = \rho_3 = 5$ и имеем систему из 7 уравнений для 7 неизвестных.

Если кандидаты подобраны удачно, то используя найденные на шаге 3 их параметры в качестве начального приближения удастся быстро и с большой точностью решить систему (22) численно. Дополнительной проверкой является двойственное равенство $f^*(1) = Q_{\rho^*}(1)$. Чтобы утверждать, что в окрестности этого решения найдется единственное действительное аналитическое решение (сертификация) применяется следующий заключительный шаг.

Шаг 5. Сертификация решения

Следуя [21, 22] для сертификации решения мы применяем функцию `certify` из пакета `HomotopyContinuation.jl` для Julia [28], где реализован интервальный метод Кравчука [29]. Для этого в нее передается система (22) (с рациональными коэффициентами для рациональных α , β) и найденное с большой точностью численное решение. Удачная сертификация доказывает существование аналитического решения, такого что

$$f^* = 1 + \sum_{k \in K^*} f_k^* R_k = \omega g^*, \quad Q_{\rho^*}(R_k) = 0, \quad k \in K^*.$$

Чтобы отсюда сделать вывод об экстремальности f^* , ρ^* осталось убедиться, что: (а) многочлен $g^* > 0$ на $[-1, 1]$ и (б) $Q_{\rho^*}(R_k) > 0$ для $k \notin K^*$ (в случае из замечания 2 нужно проверить только четные k).

Для проверки (а) находим корни численного многочлена g^* и убеждаемся, что они лежат в комплексной плоскости на отдалении от $[-1, 1]$ (что будет верно и для аналитического g^*).

В случае (б) используем численные скачки ρ_i и по-возможности наилучшую равномерную оценку типа Стильтьеса–Бернштейна для многочленов Якоби (см., например, [1, (7.3.8)]).

В [30] доказана общая оценка для $\alpha, \beta \geq 0$, $t \in (-1, 1)$ (авторы отмечают, что она близка к оптимальной при больших α, β):

$$|R_k(t)| \leq B_k(t) = \frac{12C_k^{1/2}}{(2k + \alpha + \beta + 1)^{1/4}} \frac{2^{(\alpha+\beta)/2}\Gamma(\alpha+1)}{(1-t)^{(2\alpha+1)/4}(1+t)^{(2\beta+1)/4}},$$

где

$$C_k = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)} \leq \frac{1}{(k(k+\beta))^\alpha}, \quad k > 0.$$

Если $t = -1$, то в качестве $B_k(-1)$ добавим оценку

$$|R_k(-1)| = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+\alpha+1)} \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)(k+\beta)^{\alpha-\beta}}.$$

Отсюда

$$Q_{\rho^*}(R_k) = 1 + \sum_{i=1}^m \rho_i R_k(\tau_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^m \rho_i B_k(\tau_i).$$

Если $\tau_1 > -1$, то при всех достаточно больших $k \geq k^* > \max K^*$ сумма будет близка к нулю. Для меньших $k < k^*$, $k \notin K^*$, проверка этого условия выполняется на компьютере. Также действуем для $\tau_1 = -1$ в случаях: $\alpha > \beta$; $\alpha = \beta$, $\rho_1 < 1$; $\alpha = \beta$, $\rho_1 = 1$ и справедливо замечание 2, где достаточно проверить только четные индексы k .

3. Примеры

Приведем два новых примера. Вычисления проводились с точностью 100 знаков после десятичной точки на шаге 3 и 200 знаков на шаге 4. Для сертификации использовалось решение системы (22) с 50-ю знаками. Для сокращения записи даем только несколько значащих десятичных цифр.

1. Рассмотрим случай сферы $\mathbb{S}^4$ ($\alpha = \beta = 1$), $s = 4$ (пара (4, 4) для списка (10)). Имеем $A_{4,4} = 20$, оценка Юдина 15.93019.

Применение описанной схемы решения задачи A_4 дает $K^* = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ и следующее численное решение системы (22):

$$f_{k \in K^*}^* = 3.13271, 6.72155, 5.78843, 6.34225, -2.43142,$$

$$\rho_{1,2,3} = 5.88719, 2.13822, 11.52811, \quad \tau_{1,2,3} = -0.57933, -0.35269, 0.27452.$$

Данное решение было успешно сертифицировано функцией certify:

```
CertificationResult
=====
```

- 1 solution candidates given
- 1 certified solution intervals (1 real, 0 complex)
- 1 distinct certified solution intervals (1 real, 0 complex)

```
SolutionCertificate[SolutionCertificate:
```

```
solution_candidate = [
  3.1327115863615176,
  6.721555419737311,
  5.788436670764458,
  6.34225955302029,
  -2.4314216578484307,
  5.887196296605264,
  2.1382278846521845,
  11.528117390777696,
```

```

-0.5793332436957191,
-0.35269514573351424,
0.2745280096389719,
]
is_certified = true
certified_solution_interval = [
[3.13271158636151741383693 +/- 8.27e-24] + [+/- 5.28e-24]im,
[6.7215554197373113345267 +/- 5.21e-23] + [+/- 8.47e-24]im,
[5.7884366707644577199442 +/- 3.25e-23] + [+/- 8.34e-24]im,
[6.3422595530202903304483 +/- 4.02e-23] + [+/- 1.14e-23]im,
[-2.4314216578484306789865 +/- 5.33e-23] + [+/- 2.76e-23]im,
[5.887196296605264441870 +/- 6.06e-22] + [+/- 1.78e-22]im,
[2.138227884652184471951 +/- 2.58e-22] + [+/- 1.87e-22]im,
[11.5281173907776972059481 +/- 2.35e-23] + [+/- 1.21e-23]im,
[-0.57933324369571914018026 +/- 3.29e-24] + [+/- 3.08e-24]im,
[-0.3526951457335142322878 +/- 2.81e-23] + [+/- 1.24e-23]im,
[0.27452800963897187393629 +/- 4.12e-24] + [+/- 5.19e-25]im,
]
precision = 128
is_real = true
index = 1]

```

Многочлен g^* имеет простой корень 1.31500, $k^* = 133$. Итоговое значение

$$A_4^{(1,1)} = 20.55354 \dots$$

2. Рассмотрим случай комплексного проективного пространства $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$ ($\alpha = 2$, $\beta = 1$), $s = 5$. Имеем $A_{5,5} = 200$, оценка Юдина 193.13500.

Применение описанной схемы решения задачи A_4 дает $K^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $\tau_1 = -1$ и следующее численное решение системы (22):

$$f_{k \in K^*}^* = 10.62193, 36.82044, 70.50535, 83.20204, 52.44819, -23.68550, -11.37421,$$

$$\rho_{1,2,3,4} = 19.45257855, 36.79850734, 115.4741632, 46.81301413,$$

$$\tau_{2,3,4} = -0.90366, -0.56103, 0.14360.$$

Данное решение было успешно сертифицировано функцией certify:

```

CertificationResult
=====
• 1 solution candidates given
• 1 certified solution intervals (1 real, 0 complex)
• 1 distinct certified solution intervals (1 real, 0 complex)
SolutionCertificate[SolutionCertificate:
solution_candidate = [
10.621936066699822,
36.82044345053555,
70.50535620928123,
83.20204953093817,
52.44819883644073,
-23.685505702060727,
-11.374215150485474,
19.45257855139251,
36.798507340321706,
115.47416321931313,
46.81301413032194,
-0.9036671939471579,
-0.5610386849528965,
0.14360373079749017,
]

```

```

is_certified = true
certified_solution_interval = [
  [10.621936066691743010521 +/- 8.73e-22] + [ +/- 3.76e-22]im,
  [36.82044345048885152352 +/- 4.96e-21] + [ +/- 1.45e-21]im,
  [70.50535620919814758550 +/- 5.48e-21] + [ +/- 2.80e-21]im,
  [83.20204953087037170850 +/- 7.31e-21] + [ +/- 3.54e-21]im,
  [52.44819883640761229932 +/- 4.03e-21] + [ +/- 2.47e-21]im,
  [-23.68550570192005425089 +/- 7.61e-21] + [ +/- 4.52e-21]im,
  [-11.37421515032199603154 +/- 6.29e-21] + [ +/- 4.20e-21]im,
  [19.4525785513561947763 +/- 5.32e-20] + [ +/- 1.02e-20]im,
  [36.79850734043346561351 +/- 2.36e-21] + [ +/- 2.22e-21]im,
  [115.47416321930580960371 +/- 6.38e-21] + [ +/- 5.67e-21]im,
  [46.813014130319205851448 +/- 6.82e-22] + [ +/- 2.82e-22]im,
  [-0.9036671939471118299666 +/- 7.54e-23] + [ +/- 6.24e-23]im,
  [-0.5610386849527061077391 +/- 5.45e-23] + [ +/- 1.82e-23]im,
  [0.14360373079758792962700 +/- 6.65e-24] + [ +/- 5.85e-24]im,
]
precision = 128
is_real = true
index = 1]

```

Многочлен g^* имеет простой корень 1.39227 , $k^* = 49$. Итоговое значение

$$A_4^{(2,0)} = 219.53826 \dots$$

Отметим, что отсюда $N^*(4) \geq 220$, что заметно лучше оценки плотных дизайнов $N^*(4) \geq 200$.

4. Финальные замечания

1. Пусть $K = \{k_1, \dots, k_s\}$ — набор целых чисел $0 < k_1 < \dots < k_s$. Изучается следующее обобщение понятия дизайна:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i u(gx_i) = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i), \quad \forall u \in \bigcup_{k \in \{0\} \cup K} H_k.$$

Классическому случаю отвечает $k_j = j$. Аналогом задачи A_s будет задача A_K о супремуме величины $f(1)$ на классе неотрицательных функций $f \in C[-1, 1]$, для которых $f_0 = 1$ и $f_k \leq 0$ при $k \notin \{0\} \cup K$. Ясно, что схема, изложенная в работе обобщается на этот случай заменой в рассуждениях $\{1, \dots, s\}$ на K .

2. Оценка линейного программирования Дельсарта $N^*(s) \geq A_s$ важна в проблеме дискретизации нормы (см. [11]). Пусть $U \subset C(M)$ — действительное подпространство, $q \in \mathbb{N}$. Задача заключается в построении следующей формулы

$$\int_M u(x)^q d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i)^q, \quad \forall u \in U. \quad (23)$$

Для четных q получаем дискретную формулу для вычисления нормы. Данная проблема важна в гармоническом анализе, можно отметить ее связь с неравенствами Марцинкевича–Зигмунда типа (18). Ясно, что при $q = 1$ данная задача эквивалентна построению взвешенного дизайна.

В работе [11] решен вопрос о существовании формул (23) в достаточно общей ситуации и доказана оценка на число узлов $N \leq \binom{\dim U + q - 1}{q}$, что равно $O((\dim U)^q)$ для большой размерности. При $q > 1$ для однородных пространств M , $\dim M = d$, и подпространств полиномов U_s , $\dim U_s = O(s^d)$, данная оценка уточняется, так как $u^q \in U_{qs}$ для $u \in U_s$ и в качестве узлов и весов в (23) можно взять взвешенный дизайн для U_{qs} . В результате, для больших s будем

иметь $N \leq \dim U_{qs} = O((qs)^d)$, что заметно лучше $O(s^{qd})$. Возможность такого уточнения отмечается авторами [11].

3. Из теоремы Чакалова следует оценка $N^*(s) \leq \dim U_s$. Однако она неконструктивна. Простой пример взвешенного дизайна может быть получен произведением гауссовских квадратур. Рассмотрим случай сферы $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$. Тогда любой полином $u \in U_s$ является сужением на сферу алгебраического многочлена

$$u(x) = \sum_{j_1 + \dots + j_{d+1} \leq s} a_{j_1 \dots j_{d+1}} x_1^{j_1} \dots x_{d+1}^{j_{d+1}}.$$

В сферических координатах

$$x_1 = \sin \theta_d \dots \sin \theta_2 \sin \theta_1, \quad x_2 = \sin \theta_d \dots \sin \theta_2 \cos \theta_1, \quad \dots, \quad x_d = \sin \theta_d \cos \theta_{d-1}, \quad x_{d+1} = \cos \theta_d$$

имеем $u(x) = t_s(\theta_1, \dots, \theta_d)$ — тригонометрический многочлен степени не выше s по каждой координате. Соответственно, интеграл

$$\int_{\mathbb{S}^d} u d\mu = b_d \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi t_s(\theta_1, \dots, \theta_d) \sin^{d-1} \theta_d \dots \sin \theta_2 d\theta_1 \dots d\theta_d,$$

где b_d — нормировочная константа. По координате θ_1 берем формулу прямоугольников из $s+1$ узлов, а по остальным θ_j — тригонометрическую гауссовскую квадратуру для веса $\sin^{j-1} \theta_j$ из расчета, что на степень s достаточно $[s/2] + 1$ узлов. Из всех этих покоординатных узлов формируем $N \sim s^d/2^{d-1}$ узлов многомерного дизайна, весами которого будут произведения весов одномерных квадратур. При больших d это число грубое, так как $\dim U_s \sim \frac{2s^d}{\Gamma(d+1)}$. Однако при $d \leq 3$ получаем уточнение. Для $d = 2$ есть гипотеза, что можно ограничиться приблизительно $s^2/3$ узлами, что подтверждается лебедевскими кубатурами. В случае равных весов здесь гипотеза состоит в существовании дизайна из приблизительно $s^2/2$ узлов.

4. В работе [19], посвященной задаче Дельсарта для контактного числа, предложен метод решения полиномиальной системы уравнений, родственной (22), при помощи специального телескопического базиса Грёбнера. Этот базис строится в системе компьютерной алгебры. Он позволяет последовательно вычислить все параметры соответствующих f^* и ρ^* , начиная со старшего на $[-1, 1/2)$ нуля экстремального многочлена. Наши первые эксперименты показали, что для многочленов большой степени данный подход вычислительно затратнее, поэтому было отдано предпочтение интервальному методу. Однако представляет интерес продолжить развивать метод телескопического базиса Грёбнера в проблемах типа Дельсарта, так как интервальный метод также имеет ограничения.

Еще один интересный способ доказательства получения аналитического решения из численного см. в работе [27], посвященной доказательству оптимальности сферических кодов при помощи оценки полуопределенного программирования и полиномиальной оптимизации.

5. Укажем некоторые интересные и сложные на наш взгляд проблемы, связанные с задачей Дельсарта для взвешенных дизайнов.

1. Доказать или опровергнуть, что для $N^*(s, \mathbb{S}^2) \approx s^2/3$ в случае произвольных весов и $\approx s^2/2$ в случае равных весов.

2. В неравенствах (8) уточнить оценку константы C_2 на экспоненциально убывающий с ростом размерности d множитель.

3. Уточнить оценку C_1 в (9) на экспоненциальный растущий с d множитель.

4. Привести аналитический взвешенный 4-дизайн из 16 узлов для сферы $\mathbb{S}^3$.

5. Доказать, что во взвешенном случае $N^*(4, \mathbb{S}^3) = 16$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
2. Koornwinder T. The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. 1973. Vol. 25, №2. P. 236–246.
3. Koornwinder T. Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974. Vol. 5, №1. P. 125–137.
4. Levenshtein V. On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size // Discrete Math. 1998. Vol. 192, №1–3. P. 251–271.
5. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Лекции о квадратурных формулах и их применении в экстремальных задачах. Тула: Изд-во ТулГУ, 2022.
6. Юдин В. А. Нижние оценки для сферических дизайнов // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Том 61, №3. С. 213–223.
7. Горбачев Д. В. Об оценках снизу мощностей дизайнов на проективных пространствах // Изв. ТулГУ. Сер. Информатика. 1999. Том 5, №3. С. 33–37.
8. Lyubich Y. I. Lower bounds for projective designs, cubature formulas and related isometric embeddings // European J. Combin. 2009. Vol. 30, №4. P. 841–852.
9. Delsarte P., Goethals J. M., Seidel J. J. Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. Vol. 6. P. 363–388.
10. Мысовских И. П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
11. Дай Ф., Примак А., Темляков В. Н., Тихонов С. Ю. Дискретизация интегральной нормы и близкие задачи // УМН. 2019. Том 74, №4(448). С. 3–58.
12. Bondarenko A., Radchenko D., Viazovska M. Optimal asymptotic bounds for spherical designs // Ann. of Math. 2013. Vol. 178, №2. P. 443–452.
13. Etayo U., Marzo J., Ortega-Cerdà J. Asymptotically optimal designs on compact algebraic manifolds // Monatsh. Math. 2018. Vol. 186, №2. P. 235–248.
14. Андреев Н. Н. Минимальный дизайн 11-го порядка на трехмерной сфере // Матем. заметки. 2000. Том 67, №4. С. 489–497.
15. Boyvalenkov P., Nikova S. Improvements of the lower bounds on the size of some spherical designs // Mathematica Balkanica. 1998. Vol. 12. P. 151–160.
16. Арестов В. В., Бабенко А. Г. О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Труды МИАН. 1997. Том 219. С. 44–73.
17. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971.
18. Штром Д. В. Метод Дельсарта в задаче о контактных числах евклидовых пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2002. Том 8, №2. С. 162–189.
19. Куклин Н. А. Метод Дельсарта в задаче о контактных числах пространств больших размерностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Том 18, №4. С. 224–239.

20. Musin O.R. The kissing number in four dimensions // *Ann. of Math. (2)*. 2008. Vol. 168, №1. P. 1–32.
21. Мартыянов И. А. Решение задачи Дельсарта для 4-дизайнов на сфере S^2 // *Чебышевский сборник*. 2021. Том 22, №3. С. 154–165.
22. Горбачев Д. В., Мартыянов И. А. Задача Дельсарта для 4-дизайнов на единичной 3-сфере // *Чебышевский сборник*. 2022. Том 23, №4. С. 157–161.
23. Бондаренко А. В., Горбачев Д. В. Минимальные взвешенные 4-дизайны на сфере S^2 // *Матем. заметки*. 2012. Том 91, №5. С. 787–790.
24. Luenberger D. G. Optimization by vector space methods. John Wiley & Sons, 1997.
25. Gonçalves F., Oliveira e Silva D., Steinerberger S. Hermite polynomials, linear flows on the torus, and an uncertainty principle for roots // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. Vol. 451, №2. P. 678–711.
26. Odlyzko A. M., Sloane N. J. A. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // *J. Combin. Theory Ser. A*. 1979. Vol. 26, №2. P. 210–214.
27. Cohn H., de Laat D., Leijenhorst N. Optimality of spherical codes via exact semidefinite programming bounds // *arXiv:2403.16874*. 2024.
28. Breiding P., Rose K., Timme S. Certifying zeros of polynomial systems using interval arithmetic // *ACM Trans. Math. Software*. 2023. Vol. 49, №1. Art. id. 11.
29. Krawczyk R. Newton-algorithmen zur bestimmung von nullstellen mit fehlerschranken // *Computing*. 1969. Vol. 4, №3. P. 187–201.
30. Haagerup U., Schlichtkrull H. Inequalities for Jacobi polynomials // *Ramanujan J.* 2014. Vol. 33. P. 227–246.

REFERENCES

1. Szegő, G. 1975, “Orthogonal polynomials”, 4th ed., *Providence, RI, Amer. Math. Soc.*
2. Koornwinder, T. 1973, “The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics”, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 25, no. 2, pp. 236–246.
3. Koornwinder, T. 1974, “Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula”, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 5, no. 1, pp. 125–137.
4. Levenshtein, V. 1998, “On designs in compact metric spaces and a universal bound on their size”, *Discrete Math.*, vol. 192, no. 1–3, pp. 251–271.
5. Gorbachev, D. V. & Ivanov, V. I. 2022, “Lectures on quadrature formulas and their application in extremal problems”, Tula, Tula State University. (In Russ.)
6. Yudin, V. A. 1997, “Lower bounds for spherical designs”, *Izv. Math.*, vol. 61, no. 3, pp. 673–683.
7. Gorbachev, D. V. 2000, “On lower bounds for the cardinalities of designs in projective spaces”, *Izvestiya of the Tula State University. Ser. Math.*, vol. 5, no. 3, pp. 33–37. (In Russ.)
8. Lyubich, Y. I. 2009, “Lower bounds for projective designs, cubature formulas and related isometric embeddings”, *European J. Combin.*, vol. 30, no. 4, pp. 841–852.

9. Delsarte, P., Goethals, J. M. & Seidel, J. J. 1977, "Spherical codes and designs", *Geom. Dedicata*, vol. 6, pp. 363–388.
10. Mysovskikh, I. P. 1981, "Interpolation cubature formulas", *Moscow, Nauka*. (In Russ.)
11. Dai, F., Prymak, A., Temlyakov, V. N. & Tikhonov, S. Yu. 2019, "Integral norm discretization and related problems", *Russian Math. Surveys*, vol. 74, no. 4, pp. 579–630.
12. Bondarenko, A., Radchenko, D. & Viazovska, M. 2013, "Optimal asymptotic bounds for spherical designs", *Ann. of Math.*, vol. 178, no. 2, pp. 443–452.
13. Etayo, U., Marzo, J. & Ortega-Cerdà, J. 2018, "Asymptotically optimal designs on compact algebraic manifolds", *Monatsh. Math.*, vol. 186, no. 2, pp. 235–248.
14. Andreev, N. N. 2000, "A minimal design of order 11 on the 3-sphere", *Math. Notes*, vol. 67, no. 4, pp. 417–424.
15. Boyvalenkov, P. & Nikova, S. 1998, "Improvements of the lower bounds on the size of some spherical designs", *Mathematica Balkanica*, vol. 12, pp. 151–160.
16. Arestov, V. V. & Babenko, A. G. 1997, "On Delsarte scheme of estimating the contact numbers", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 36–65.
17. Gol'shtein, E. G. 1971, "Theory of duality in mathematical programming and its applications". Moscow, Nauka. (In Russ.)
18. Shtrom, D. V. 2002, "The Delsarte method in the problem of the contact numbers of Euclidean spaces of high dimensions", *Proc. Steklov Inst. Math.*, Suppl. 2, pp. S162–S189.
19. Kuklin, N. A. 2014, "Delsarte method in the problem on kissing numbers in high-dimensional spaces", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, vol. 284, suppl. 1, pp. 108–123.
20. Musin, O. R. 2008, "The kissing number in four dimensions", *Ann. of Math. (2)*, vol. 168, no. 1, pp. 1–32.
21. Martyanov, I. A. 2021, "Solving the Delsarte problem for 4-designs on the sphere S^2 ", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 22, no. 3, pp. 154–165. (In Russ.)
22. Gorbachev, D. V. & Martyanov, I. A. 2022, "Delsarte problem for 4-designs on the unit 3-sphere", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 23, no. 4, pp. 157–161. (In Russ.)
23. Bondarenko, A. V. & Gorbachev, D. V. 2012, "Minimal weighted 4-designs on the sphere S^2 ", *Math. Notes*, vol. 91, no. 5, pp. 738–741.
24. Luenberger, D. G. 1997, "Optimization by vector space methods", *John Wiley & Sons*.
25. Gonçalves, F., Oliveira e Silva, D. & Steinerberger S. 2017, "Hermite polynomials, linear flows on the torus, and an uncertainty principle for roots", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 451, no. 2, pp. 678–711.
26. Odlyzko, A. M. & Sloane, N. J. A. 1979, "New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions", *J. Combin. Theory Ser. A.*, vol. 26, no. 2, pp. 210–214.
27. Cohn, H., de Laat, D. & Leijenhorst, N. 2024, "Optimality of spherical codes via exact semidefinite programming bounds", *arXiv:2403.16874*.

-
28. Breiding, P., Rose, K. & Timme, S. 2023, “Certifying zeros of polynomial systems using interval arithmetic”, *ACM Trans. Math. Software*, vol. 49, no. 1, art. id. 11.
 29. Krawczyk, R. 1969, “Newton-algorithmen zur bestimmung von nullstellen mit fehlerschranken”, *Computing*, vol. 4, no. 3, pp. 187–201.
 30. Haagerup, U. & Schlichtkrull, H. 2014, “Inequalities for Jacobi polynomials”, *Ramanujan J.*, vol. 33, pp. 227–246.

Получено: 22.07.2024

Принято в печать: 24.12.2024