

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-42-52

Многомерная Фурье-интерполяция и трудоемкость быстрого преобразования Фурье¹

Ю.А. Басалов, В.А. Быковский, Н.Н. Добровольский, В.Н. Чубариков, Н.М. Добровольский

Басалов Юрий Александрович — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: Bykov@tsput.ru

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

Доказано равенство коэффициентов интерполяционного многочлена по параллелепipedальной сетке для многомерной функции коэффициентам интерполяционного многочлена по равномерной сетке для одномерной функции, для получения которых можно применить быстрое преобразование Фурье по различным схемам.

Ключевые слова: Параллелепipedальная сетка, решётка решений линейного сравнения, интерполяционный многочлен, быстрое преобразование Фурье.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Басалов, Ю.А., Быковский, В.А., Добровольский, Н.Н., Чубариков, В.Н., Добровольский, Н.М. Многомерная Фурье-интерполяция и трудоемкость быстрого преобразования Фурье // Чебышевский сборник, 2024, Т. 25, вып. 4, С. 42–52.

¹Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ, тема научного исследования «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике».

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-42-52

Multidimensional Fourier interpolation and complexity of the fast Fourier transform²

Yu.A. Basalov, V.A. Bykovskii, N.N. Dobrovol'skii, V.N. Chubarikov, N.M. Dobrovol'skii

Basalov Yuri Alexandrovich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Bykovskii Viktor Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, corresponding member of the Russian Academy of Sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: Bykov@tspu.ru

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: chubarik2020@mail.ru

Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Abstract

The equality of the coefficients of the interpolation polynomial over a parallelepipedal grid for a multidimensional function to the coefficients of the interpolation polynomial over a uniform grid for a one-dimensional function is proved, for which the fast Fourier transform can be applied according to various schemes.

Keywords: Parallelepipedal grid, linear comparison solution lattice, interpolation polynomial, fast Fourier transform.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

Basalov, Yu.A., Bykovskii, V.A., Dobrovol'skii, N.N., Chubarikov, V.N., Dobrovol'skii, N.M. 2024, "Multidimensional Fourier interpolation and complexity of the fast Fourier transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 42–52.

²The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education of the Russian Federation, the topic of scientific research is "Number-theoretic methods in approximate analysis and their applications in mechanics and physics".

1. Введение

Классическая задача интерполяции функций многих переменных состоит в том, что задана в некоторой области конечная система узлов, которые называются узлами интерполяции, и требуется по значениям функции в этих узлах построить функцию из заданного класса, которая в этих узлах принимает те же значения. Понятно, что задача интерполяции является частным случаем задачи аппроксимации, которая состоит в том, что требуется по значениям функции в заданных узлах построить функцию из заданного класса, которая приближает заданную функцию в заданной области.

Одной из классических задач теории приближений является задача приближения периодической функции многих переменных с периодом единица по каждой переменной с помощью тригонометрического полинома конечного порядка. Таким образом, в строгом смысле, задача интерполирования периодических функций многих переменных по значениям функции в узлах параллелепипедальной сетки состоит в нахождении тригонометрического полинома, который в узлах параллелепипедальной сетки совпадает с интерполируемой функцией.

С этой точки зрения интерполяционные полиномы в работах В. С. Рябенского [14] и монографии Н. М. Коробова [9] являются аппроксимационными полиномами по параллелепипедальной сетке, а конечные ряды Фурье, которые успешно использовал Н. М. Коробов [9], являются интерполяционными полиномами по равномерной сетке.

Естественно, что построение эффективных алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционных полиномов и оценка погрешности интерполирования являются классическими задачами численного анализа. Применение теоретико-числовых подходов позволяет получить в этой области новые результаты [3], [4], [13].

Параллелепипедальная сетка $M(\vec{a}, N)$, введенная Н. М. Коробовым в 1959 г. [6], [7], состоит из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где $\vec{a}$ набор оптимальных коэффициентов и выполнены условия $a_1 = 1$, $(a_\nu, N) = 1$ ($\nu = 1, \dots, s$).

Перевод теории оптимальных коэффициентов на язык решёток, сделанный Э. Главкой в 1962 г. [15], позволяет для решётки $\Lambda = \Lambda(\vec{a}, N)$ решений линейного сравнения

$$m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N},$$

рассмотреть параллелепипедальную сетку, как пересечение взаимной решётки с единичным s -мерным кубом

$$\Lambda^*(\vec{a}, N) = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda(\vec{a}, N), (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\},$$

$$M(\vec{a}, N) = \Lambda^*(\vec{a}, N) \cap G_s, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Определения и основные свойства параллелепипедальных сеток изложены в [11].

Впервые для приближения функций эти сетки были применены В. С. Рябенским в 1960 г. [14]. О применении параллелепипедальных сеток с точки зрения теории приближений дано подробное изложение в [17].

В работе [1] впервые было предложено сведение многомерной Фурье-интерполяции к одномерной.

Цель данной работы — получить с помощью параллелепипедальных сеток оценки трудоемкости алгоритмов вычисления коэффициентов интерполяционных полиномов.

2. Сведение многомерной Фурье интерполяции по параллелепипедальной сетки к одномерной

Рассмотрим теоретико-числовые конструкции, раскрывающие красоту объекта, открытого Н. М. Коробовым, параллелепипедальные сетки. Очевидно, что существует счётное множество различных параллелепипедальных сеток.

Каждая параллелепипедальная сетка обладает в силу взаимно простоты коэффициентов с модулем тем свойством, что проекция на любую координатную ось и на любую координатную плоскость состоит из N различных точек.

Кроме того, каждую параллелепипедальную сетку можно записать s различными способами

$$M_{k,\nu} = \left(\left\{ \frac{b_{\nu,1}k}{N} \right\}, \left\{ \frac{b_{\nu,2}k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{b_{\nu,s}k}{N} \right\} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (2)$$

где $b_{\nu,\mu} = N \left\{ \frac{a_\mu b_{\nu,\nu}}{N} \right\}$ ($\mu = 1, \dots, s$), $a_\nu b_{\nu,\nu} \equiv 1 \pmod{N}$ ($\nu = 1, \dots, s$), такими, что ровно один коэффициент равен 1. Заметим, что множество точек сетки остается неизменным, а нумерация их меняется.

Нетрудно видеть, что решётки $\Lambda(\vec{a}, N)$ и $\Lambda(\vec{b}_\nu, N)$ совпадают ($\nu = 1, \dots, s$). Действительно, решётка $\Lambda(\vec{b}_\nu, N)$ является решёткой решений сравнения

$$b_{\nu,1}m_1 + b_{\nu,2}m_2 + \dots + b_{\nu,s}m_s \equiv 0 \pmod{N},$$

но оно эквивалентно сравнению

$$b_{\nu,\nu}(m_1 + a_2m_2 + \dots + a_sm_s) \equiv 0 \pmod{N},$$

что доказывает равенство решёток, так как $(b_{\nu,\nu}, N) = 1$.

Каждый из этих s различных способов записи параллелепипедальной сетки позволяет задать свою функцию одной переменной, которая совпадает в узлах равномерной сетки с исходной функцией s переменных в соответствующих узлах параллелепипедальной сетки:

$$f_\nu(x) = f(\{b_{\nu,1}x\}, \{b_{\nu,2}x\}, \dots, \{b_{\nu,s}x\}), \quad f_\nu\left(\frac{k}{N}\right) = f(M_{k,\nu}) \quad (k = 1, \dots, N), \quad (\nu = 1, \dots, s). \quad (3)$$

Решётку $\Lambda(\vec{a}, N)$ можно задать счётным числом способов. Действительно, если целое s взаимно просто с N и целые $c_1, \dots, c_s$ удовлетворяют условиям

$$ca_\nu \equiv c_\nu \pmod{N} \quad (\nu = 1, \dots, s),$$

то сравнение

$$c_1m_1 + \dots + c_sm_s \equiv 0 \pmod{N}$$

эквивалентно сравнению

$$a_1m_1 + \dots + a_sm_s \equiv 0 \pmod{N}.$$

Отсюда следует, что $\Lambda(\vec{a}, N) = \Lambda(\vec{c}, N)$.

Решётка $\Lambda(\vec{a}, N)$ имеет базис

$$\vec{\lambda}_1 = (N, 0, \dots, 0), \vec{\lambda}_2 = (-a_2, 1, 0, \dots, 0), \dots, \vec{\lambda}_s = (-a_s, 0, \dots, 0, 1)$$

и базисную матрицу

$$A(\vec{a}, N) = \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_s & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Базисной матрицей взаимной решётки $\Lambda^*(\vec{a}, N)$ будет матрица

$$A^*(\vec{a}, N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \frac{a_2}{N} & \cdots & \frac{a_s}{N} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если целое c^* удовлетворяет соотношению $cc^* \equiv 1 \pmod{N}$, то базисную матрицу решётки $\Lambda(\vec{c}, N) = \Lambda(\vec{a}, N)$ можно записать в виде

$$A(\vec{c}, N) = \begin{pmatrix} N & 0 & \cdots & 0 \\ -N \left\{ \frac{c^* c_2}{N} \right\} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -N \left\{ \frac{c^* c_s}{N} \right\} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

а базисную матрицу взаимной решётки можно записать в виде

$$A^*(\vec{c}, N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & \left\{ \frac{c^* c_2}{N} \right\} & \cdots & \left\{ \frac{c^* c_s}{N} \right\} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что сама параллелепипедальная сетка будет иметь вид

$$M_k(\vec{c}, N) = \left(\left\{ \frac{c^* c_1 k}{N} \right\}, \left\{ \frac{c^* c_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{c^* c_s k}{N} \right\} \right) = \left(\left\{ \frac{k}{N} \right\}, \left\{ \frac{a_2 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \\ (k = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что каждый из этих различных способов записи параллелепипедальной сетки позволяет задать свою функцию одной переменной, которая совпадает в узлах равномерной сетки с исходной функцией s переменных в соответствующих узлах параллелепипедальной сетки:

$$f_{\vec{c}}(x) = f(\{c^* c_1 x\}, \{c^* c_2 x\}, \dots, \{c^* c_s x\}), \quad f_{\vec{c}}\left(\frac{k}{N}\right) = f(M_k(\vec{c}, N)) \quad (k = 1, \dots, N). \quad (5)$$

В соответствии с работами [3], [4] рассмотрим $\mathbb{Z}^s / \Lambda(\vec{a}, N)$. Взяв по одному представителю из каждого класса, получаем полную систему вычетов $M^*(\Lambda)$. Очевидно, что существует счётное множество различных полных систем вычетов $M^*(\Lambda)$. В работах [4] и [13] выделяется абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$. При определенных дополнительных условиях абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^*(\Lambda)$ определяется однозначно (см. [13]).

В работе [1] было дано принципиально важное определение пронумерованной полной системы вычетов.

Введем следующее определение:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пронумерованной полной системой вычетов будем называть

$$M^{**}(\Lambda) = \{\vec{m}_t \mid \vec{m}_t \in M^*(\Lambda), t \equiv m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_s m_s \pmod{N}, 0 \leq t < N\}.$$

Аналогично определяется пронумерованная абсолютно минимальная гиперболическая полная система вычетов $M_H^{**}(\Lambda)$.

Необходимо отметить, что каждой полной системе вычетов $M^*(\Lambda)$ соответствует своя пронумерованная полная система вычетов $M^{**}(\Lambda)$, которые как множество точек совпадают, а отличие состоит в том, что задана каноническая нумерация точек полной системы вычетов. Кроме этого, точки из различных пронумерованных полных систем вычетов с одинаковым номером принадлежат одному и тому же классу вычетов фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ по целочисленной подрешётке $\Lambda(\vec{a}, N)$.

Как было уже отмечено выше, параллелепипедальную сетку $M(\vec{a}, N)$ можно записать s различными способами: $M(\vec{a}, N) = M(\vec{b}_\nu, N)$, $(\nu = 1, \dots, s)$. В определении пронумерованной полной системы вычетов номер t у точки $\vec{m}_t$ существенно зависит от набора коэффициентов $\vec{b}_\nu$, поэтому с данной полной системой вычетов можно связать s пронумерованных полных систем вычетов. А именно, полагаем

$$M_\nu^{**}(\Lambda) = \{\vec{m}_{t,\nu} | \vec{m}_{t,\nu} \in M^*(\Lambda), t \equiv b_{\nu,1}m_1 + b_{\nu,2}m_2 + \dots + b_{\nu,s}m_s \pmod{N}, 0 \leq t < N\}.$$

Аналогично, для любого набора коэффициентов $\vec{c}$ можно задать пронумерованную полную систему вычетов $M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)$ с помощью равенства

$$M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda) = \{\vec{m}_{t,\vec{c}} | \vec{m}_{t,\vec{c}} \in M^*(\Lambda), t \equiv c_1m_1 + c_2m_2 + \dots + c_sm_s \pmod{N}, 0 \leq t < N\}.$$

В соответствии с работой [13] сформулируем теорему, позволяющую перейти к одномерной Фурье интерполяции.

ТЕОРЕМА 1. *Для интерполяционного многочлена функции $f(\vec{x})$ в узлах параллелепипедальной сетки $M(\vec{c}, N)$ по пронумерованной системы вычетов $M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)$*

$$S_{M(\vec{c}, N), M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}_{t,\vec{c}} \in M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{c}, N), M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{t,\vec{c}}) e^{2\pi i(\vec{m}_{t,\vec{c}}, \vec{x})},$$

где

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{c}, N), M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{t,\vec{c}}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{c}, N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{t,\vec{c}}, \vec{y})} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{c_1 k}{N}\right\}, \left\{\frac{c_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{c_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(c_1 m_{t,\vec{c},1} + c_2 m_{t,\vec{c},2} + \dots + c_s m_{t,\vec{c},s})k}{N}}, \end{aligned}$$

справедливо равенство коэффициентов Фурье с одномерным интерполяционным многочленом для функции $f_{\vec{c}}(x) = f(\{c_1 x\}, \{c_2 x\}, \dots, \{c_s x\})$ по равномерной сетке на отрезке $[0, 1]$:

$$S(f_{\vec{c}}(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x},$$

где

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{\vec{c}}\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}, \quad c_{M(\vec{c}, N), M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{t,\vec{c}}) = c_t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим полную пронумерованную систему вычетов

$$M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda) = \{(0, \dots, 0), (c^*, 0, \dots, 0), \dots, (c^* \cdot (N-1), 0, \dots, 0)\},$$

где $c^*c_1 \equiv 1 \pmod{N}$.

Интерполяционный многочлен функции $f(\vec{x})$ в узлах параллелепipedальной сетки $M(\vec{c}, N)$ по пронумерованной системе вычетов $M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)$ будет

$$\begin{aligned} S_{M(\vec{c},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{x}) &= \sum_{\vec{m}_{t,\vec{c},1} \in M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)} c_{M(\vec{c},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{t,\vec{c},1}) e^{2\pi i(\vec{m}_{t,\vec{c},1}, \vec{x})} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{c},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{k,\vec{c},1}) e^{2\pi i c^* c_1 x_1} = \sum_{k=0}^{N-1} c_{M(\vec{c},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{k,\vec{c}}) e^{2\pi i k x_1}, \end{aligned}$$

где

$$c_{M(\vec{c},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{k,\vec{c}}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{c},N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{k,\vec{c}}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{\vec{c}}\left(\frac{j}{N}\right) e^{-2\pi i \frac{j}{N} k}.$$

Легко заметить, что системы вычетов $M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)$ и $M_{\vec{c}}^{**}(\Lambda)$ различаются на сдвиги по решётке Λ , а значит и коэффициенты Фурье при соответствующих гармониках совпадают.

Действительно,

$$\begin{aligned} c_{M(\vec{a},N),M_{\vec{c},1}^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_{1,t}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{y} \in M(\vec{a},N)} f(\vec{y}) e^{-2\pi i(\vec{m}_{1,t}, \vec{y})} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{t}{N} k} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}, \left\{\frac{a_2 k}{N}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(m_{t,1} + m_{t,2} a_2 + \dots + m_{t,s} a_s) k}{N}} = c_{M(\vec{a},N),M^{**}(\Lambda)}(\vec{m}_t). \end{aligned}$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 1 из работы [1], хотя она является более общей чем в работе [1].

3. О быстром преобразование Фурье

Задача интерполяции сводится к получению коэффициентов тригонометрического многочлена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i k x}$$

в точках $x_j = \frac{j}{N}, j = 0 \dots N-1$. Одним из эффективных способов получения коэффициентов c_k является алгоритм быстрого дискретного преобразования Фурье.

Как известно [12], дискретным преобразованием Фурье называется вычисление значений многочлена в комплексных корнях из единицы:

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

а обратным дискретным преобразованием Фурье называется операция – интерполяция коэффициентов по значениям y_j

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2\pi i \frac{kj}{N}},$$

В работах [5, 10, 2] были предложены алгоритмы построения оптимальных коэффициентов для $N = 2^n$. При использовании таких коэффициентов, можно достичь асимптотической сложности вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \log N)$ операций.

Известно, что с помощью схему Кули-Тьюки [12], для составного $N = \prod_{i=1}^n p_i$, можно получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O\left(N \sum_{i=1}^n p_i\right)$ операций. Например, этого можно достичь с помощью следующих алгоритмов.

Algorithm 1 Алгоритм Кули-Тьюки получения прямого преобразования Фурье

```

function FFT( $c_1, \dots, c_k; w_k$ )    ▷ принимает массив и n-ый корень из единицы, и заменяет
его на значения в корнях
  if  $k = 1$  then
    конец.
  end if
  for  $i = 1, i < n/2, i = i + 1$  do                                ▷ разделяем массив на четный и нечетный
     $a_i = c_{2i}$ 
     $b_i = c_{2i+1}$ 
  end for
  FFT ( $a, w_k^2$ )                                                    ▷ рекурсивно считаем БПФ
  FFT ( $b, w_k^2$ )
   $w = 1$                                                             ▷ объединяем результат по формуле
  for  $i = 1, i < n/2, i = i + 1$  do
     $c_i = a_i + w \cdot b_i$ 
     $c_{i+n/2} = a_i - w \cdot b_i$ 
     $w* = w_k$ 
  end for
end function

```

Algorithm 2 Алгоритм получения обратного преобразования Фурье

```

function INV_FFT( $y_1, \dots, y_n$ )    ▷ принимает массив значений  $y_i$  и возвращает массив
коэффициентов  $c_i$ 
   $inv = \text{FFT} (y_1, \dots, y_n, e^{-2\pi/n})$ 
  for  $i = 0, i < n, i++$  do
     $res_i = \frac{inv_i}{n}$ 
  end for
  return  $res$ 
end function

```

Для простого N можно использовать схемы Радера [16]. По определению

$$y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{2\pi i \frac{kj}{N}},$$

Рассмотрев g – первообразный корень по модулю N , имеем $k \equiv g^q(\text{mod } N)$, для всех k и различных $q = 0, \dots, N-2$. Аналогично можно выразить $j \equiv g^{-p}(\text{mod } N)$ для и различных $p = 0, \dots, N-2$. Тогда

$$X_0 = \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

$$X_{g^{-p}} = x_0 + \sum_{q=0}^{N-2} x_{g^q} e^{-\frac{2\pi i}{N} g^{-(p-q)}} \quad p = 0, \dots, N-2,$$

что приводит нас к циклической свертке a_q и b_q , где

$$a_q = x_{g^q}, \quad b_q = e^{-\frac{2\pi i}{N} g^{-q}}.$$

Данная свертка может быть найдена с помощью функции (1) дополнив длину свертки до 2^n . Такой подход позволяет также получить асимптотическую сложность вычисления дискретного преобразования Фурье в $O(N \log N)$ операций.

4. Заключение

Важной проблемой, на которую будут направлены наши дальнейшие исследования, является вопрос о том, какому классу функций будет принадлежать функция, полученная переходом от функции многих переменных к функции одной переменной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. А. Басалов, Н. Н. Добровольский, В. Н. Чубариков. Многомерная Фурье-интерполяция и быстрые преобразования Фурье // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 517 (2024) С. 41–43.
2. Бочарова Л. П., Ванькова В. С., Добровольский Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Матем. заметки, 1991, Т. 49, №2, с. 23–28.
3. Быковский В. А. Дискретное преобразование Фурье и циклическая свертка на целочисленных решетках // Мат. сб. 136(178). 4(8). 1988. С. 451–467
4. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Андреева О. В., Зайцева Н. В. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Чебышевский сборник, 2004, Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 122–143.
5. Добровольский Н. М., Клепикова Н. Л. Таблица оптимальных коэффициентов для приближенного вычисления кратных интегралов // Препринты ИПФ АН СССР, 1990, №63, 29 с.
6. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.
7. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.
8. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР 132. 1960. № 5. С. 1009–1012.
9. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
10. Коробов Н. М. О вычислении оптимальных коэффициентов // Докл. АН СССР, 1982, Т. 267, №2, с. 289–292.
11. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

12. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления свертки. – М.: Радиосвязь, 1985.
13. Родионов А. В., Добровольский М. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М. Интерполяция для системы концентрических сеток // Чебышевский сборник, 2023, 24(3) С. 95–121.
14. Рябенский В. С. О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса // Докл. АН СССР, 131:5 (1960), 1025–1027.
15. Hlawka E. Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale // Monatshefte für Mathematik, 66 (1962), 140–151.
16. Rader C. Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Points is Prime // Proc. IEEE 56, 1968, pp. 1107–1108.
17. Temlyakov V. Multivariate approximation // Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., 32, Cambridge University Press, Cambridge, 2018, 550 pp.

REFERENCES

1. Basalov, Yu.A., Dobrovol'skii, N.N. & Chubarikov, V.N. 2024, "Multidimensional Fourier interpolation and fast Fourier transforms", *Dokl. Math.*,
2. Bocharova, L.P., Van'kova, V.S. & Dobrovol'skii, N.M. 1991, "On the calculation of optimal coefficients", *Matematicheskie zametki*, vol. 49, no. 2, pp. 23–28.
3. Bykovskij, V.A 1988, "Discrete Fourier transform and cyclic convolution on integer lattices", *Matematicheskij sbornik*, vol. 136(178), no. 4(8), pp. 451–467.
4. Dobrovol'skii, N.M., Yesayan, A.R., Andreeva, O.V., Zaitseva, N.V. 2004, "Multidimensional number-theoretic Fourier interpolation", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 5, iss. 1(9), pp. 122–143.
5. Dobrovol'skii, N.M. & Klepikova, N.L. 1990, "Table of optimal coefficients for approximate calculation of multiple integrals", *Institut obshchej fiziki AN SSSR, Moscow, USSR*.
6. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.
7. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", *Vestnik Moskovskogo universiteta*, no. 4, pp. 19–25.
8. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.
9. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], *Mashgiz, Moscow, Russia*.
10. Korobov, N.M. 1982, "On the calculation of optimal coefficients", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 267, no. 2, pp. 289–292.
11. Korobov, N.M. 2004, "Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize", [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, *MTSNMO, Moscow, Russia*.
12. Nussbaumer, H., 1985, "Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms", *M.: Radio-communication*.

13. Rodionov, A.V., Dobrovol'skii, M.N., Dobrovol'skii, N.N., Dobrovol'skii, N.M. 2023, "Interpolation for a system of concentric grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 24, no. 3, pp. 95–121.
14. Ryaben'kij, V.S., 1960, "On tables and interpolation of functions from a certain class", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 131, no. 5, pp. 1025–1027.
15. Hlawka, E., 1962, "Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale", *Monatshefte für Mathematik*, 66, pp. 140–151.
16. Rader, C., 1968, "Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Points is Prime", *Proc. IEEE* 56, pp. 1107–1108.
17. Temlyakov, V., 2018, "Multivariate approximation", *Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math.*, 32, Cambridge University Press, Cambridge, 550 pp.

Получено: 15.05.2024

Принято в печать: 24.12.2024