

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 4.

УДК 511.325

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-5-26

О решении одного уравнения в простых числах

И. Аллаков, Н. С. Музропова

Аллаков Исмаил — доктор физико-математических наук, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан).

e-mail: iallakov@mail.ru

Музропова Наргиза Сайдуллаевна — кандидат физико-математических наук, Термезский государственный университет (г. Термез, Узбекистан)

e-mail: muzrapova-n@mail.ru

Аннотация

В работе доказано, что при некоторых дополнительных условиях каждое достаточно большое целое число представимо в виде суммы двух простых и квадрата третьего простого числа. А также доказана оценка снизу для количества представлений данного целого числа в указанном виде.

Ключевые слова: L -функция Дирихле, характер Дирихле, простые числа, основные интервалы, дополнительные интервалы, оценка, уравнение, разрешимость, нетривиальные нули, исключительный нуль.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Аллаков, И., Музропова, Н.С. О решении одного уравнения в простых числах // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 4, с. 5–26.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 4.

UDC 511.325

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-4-5-26

The solution of some equation in primes

I. Allakov, N. S. Muzropova

Allakov Ismail — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: iallakov@mail.ru

Muzropova Nargiza Saydullayevna — candidate of physical and mathematical sciences, Termez State University (Termez, Uzbekistan).

e-mail: muzrapova-n@mail.ru

Abstract

The work proves that, under some additional conditions, every sufficiently large integer can be represented as the sum of two prime numbers and the square of a third prime number. A lower bound for the quantity of representation of a given integer in the specified form has also been proven.

Keywords: Dirichlet L -function, Dirichlet character, prime numbers, basic intervals, additional intervals, estimate, equation, solvability, non-trivial zeros, exceptional zero.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Allakov, I., Muzropova, N.S. 2024, "The solution of some equation in primes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 4, pp. 5–26.

1. Введение. Формулировка результата

Рассмотрим уравнение

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3^2 = b, \quad (1)$$

где a_1, a_2, a_3, b —целые числа, p_j —простые числа. Ясно, что мы можем предполагать $a_j \neq 0$, ($j = 1, 2, 3$) и

$$\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1. \quad (2)$$

Кроме этого предположим, что для уравнения (1) выполняется условие конгруэнт-разрешимости подобно тому, как в проблеме Тэрри работы Хуа-Ло-Кена (см. стр. 162, [1]). Если $N(q)$ определим с помощью равенства

$$N(q) := \text{card} \{ (n_1, n_2, n_3) \mid 1 \leq n_j \leq q, (n_j, q) = 1, a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3^2 \equiv b \pmod{q} \}, \quad (3)$$

тогда это условие можно написать в виде [2]

$$\text{"для всех } q \geq 1 \text{ выполняется неравенство } N(q) \geq 1\text{"}. \quad (4)$$

Предположим, что a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют условиям (2), (3) и

$$B := \max \{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\},$$

тогда используя эти обозначения, мы можем сформулировать основные результаты настоящей работы в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если a_1, a_2, a_3, b удовлетворяют условиям (2) - (4), то существует эффективная постоянная $A > 0$ такая, что справедливы следующие утверждения:*

(a) *если все a_1, a_2, a_3 положительны и $b \geq B^A$, то уравнение (1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 .*

(b) *если не все a_1, a_2, a_3 имеют одинаковый знак, то уравнение (1) имеет решение в простых числах p_1, p_2, p_3 , которые не превосходят $3|b| + B^A$.*

ТЕОРЕМА 2. *Если N достаточно велико, то количество решений уравнения (1) в простых числах $\frac{N}{B} < p_1, p_2, p_3 \leq N$ не меньше чем $c_8 \frac{N^2}{B^2 Q^{\frac{3}{26}} \ln^6 N}$, где c_8 -положительная постоянная,*

$$B = \max \{2, |a_1|, |a_2|, |a_3|\}, Q = N^\delta.$$

Если в уравнении (1) положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда придем к классической задаче, поставленной Хуа-Ло-Кен'ом [3] в 1938 году.

2. Обозначения и малые дуги

В дальнейшем через p (с индексом или без индекса) обозначаем простое число, $c_1, c_2, \dots$ - эффективные положительные постоянные, δ - достаточно малая положительная, эффективно вычисляемая постоянная, значение которой может зависеть от значений c_j . $\ll$ - символ Виноградова. Не ограничивая общности мы можем предполагать $B \geq 34$.

Пусть $N > 0$ и положим

$$Q := N^\delta, \quad T := Q^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}, \quad L := N B^{-1}. \quad (5)$$

Предположим, что N выбрано достаточно большим относительно B , так чтобы выполнялось

$$B \leq Q^\delta. \quad (6)$$

Пусть $\chi \pmod{q}$ и $\chi_0 \pmod{q}$ соответственно, означает произвольный характер и главный характер Дирихле по модулю q (см. § 4 и 5, [4]). Известно (см. §2, гл. III работы [5]), что существует постоянная c_1 такая, что L - функции $L(s, \chi)$ -могут иметь только один вещественный нуль $\tilde{\beta}$ для одного вещественного характера $\tilde{\chi}$ по модулю $\tilde{r}$ ($\tilde{r} \leq T$), в области $\sigma > 1 - c_1(\ln T)^{-1}$, $|t| \leq T$. Если такой нуль существует, то это — единственный нуль функции $L(s, \tilde{\chi})$. Он называется исключительным нулем $L(s, \chi)$ функции, где $s = \sigma + it$. Кроме того, этот исключительный нуль $\tilde{\beta}$ удовлетворяет соотношению

$$c_2 \left(\tilde{r}^{\frac{1}{2}} \ln^2 \tilde{r} \right)^{-1} \leq 1 - \tilde{\beta} \leq c_1 (\ln T)^{-1}. \quad (7)$$

Далее, для произвольного действительного числа y и положительного целого q определим: $e(y) := e^{2\pi i y}$ и $e_q(y) := e^{2\pi i \frac{y}{q}} = e\left(\frac{y}{q}\right)$; $\Lambda(n)$ — функция Мангольдта. Более того, для произвольного характера $\chi \pmod{q}$, мы вводим следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_j(y) &:= \sum_{L < n_j \leq N} \Lambda(n_j) e(n_j y), \quad j = 1, 2; \quad S_3(y) := \sum_{L < n_3 \leq N} \Lambda(n_3) e(n_3^2 y), \\ S_j(\chi, y) &:= \sum_{L < n_j \leq N} \Lambda(n_j) \chi(n_j) e(n_j y), \quad j = 1, 2; \quad S_3(\chi, y) := \sum_{L < n_3 \leq N} \Lambda(n_3) \chi(n_3) e(n_3^2 y), \\ I_j(y) &:= \int_L^N e(x_j y) dx_j, \quad j = 1, 2; \quad I_3(y) := \int_L^N e(x_3^2 y) dx_3; \\ \tilde{I}_j(y) &= \int_L^N x_j^{\tilde{\beta}-1} e(x_j y) dx_j, \quad j = 1, 2; \quad I_3(y) = \int_L^N x_3^{\tilde{\beta}-1} e(x_3^2 y) dx_3; \\ I_j(\chi, y) &:= \sum'_{|\gamma| \leq T} \int_L^N x_j^{\rho-1} e(x_j y) dx_j, \quad j = 1, 2; \quad I_3(\chi, y) := \sum'_{|\gamma| \leq T} \int_L^N x_3^{\rho-1} e(x_3^2 y) dx_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\sum'_{|\gamma| \leq T}$ - означает, что суммирование ведется по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L(s, \chi)$ в области $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1 - c_1(\ln T)^{-1}$, $|\gamma| \leq T$ (кроме исключительного нуля $\tilde{\beta}$). Пологая

$\tau = T^{\frac{1}{4}}N^{-1}$ интервал $[\tau; 1 + \tau]$ делим на основные и дополнительные под интервалы следующим образом: для взаимно простых целых h и q с условием $1 \leq h \leq q \leq Q$, пусть $m(h, q)$ означает закрытый интервал $\left[\frac{h-\tau}{q}, \frac{h+\tau}{q}\right]$. Нетрудно видеть, что эти интервалы взаимно не пересекаются и лежат в $[\tau; 1 + \tau]$. Объединение всех этих интервалов $m(h, q)$ обозначим через M , то есть $M = \bigcup_{h,q} m(h, q)$, и будем называть большими дугами, а разность $[\tau; 1 + \tau] \setminus M$ обозначим через M' и будем называть малыми дугами (более подробно см. §2, гл. III работы [5]). Пусть

$$I(N) := \sum_{\substack{L < n_1, n_2, n_3 \leq N \\ a_1 n_1 + a_2 n_3 + a_3 n_3^2 = b}} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) \Lambda(n_3), \quad (9)$$

тогда используя обозначения (8), $I(N)$ можем представить в виде

$$I(N) := \int_{\tau}^{1+\tau} e(-bx) S_1(a_1 x) S_2(a_2 x) S_3(a_3 x) dx. \quad (10)$$

С учетом того, что $M \cup M' = [\tau, 1 + \tau]$, интеграл правой части равенства (10) можем написать как сумму двух интегралов, то есть в виде

$$I(N) = \left(\int_M + \int_{M'} \right) e(-bx) \prod_{j=1}^3 S_j(a_j x) dx = I_1(N) + I_2(N). \quad (11)$$

В правой части равенства (11) через $I_1(N)$ обозначен интеграл по большим дугам M , а через $I_2(N)$ интеграл по малым дугам M' . Сначала оценим интеграл по малым дугам. Для этого воспользуемся следующей леммой:

ЛЕММА 1. Для произвольного $x \in M'$, при $N \geq N_1(c_3, \delta)$ справедливы оценки:

$$S_j(a_j x) \ll N Q^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \ln^4 N, \quad (j = 1, 2)$$

и

$$S_3(a_3 x) \ll N^{1+\frac{c}{\ln \ln N}} Q^{-\frac{1}{4}} B^{\frac{1}{4}},$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим $S_j(a_j x)$, $(j = 1, 2)$. Согласно теореме Дирихле о приближениях (см. п. 4, §2 гл. VI, [6]) существуют целые числа h и q удовлетворяющие

$$1 \leq q \leq \tau^{-1}, (h, q) = 1, \left| a_j x - \frac{h}{q} \right| < \frac{\tau}{q}. \quad (12)$$

Деля обе части последнего неравенства в (12) на $|a_j|$ получим $\left| x - \frac{h}{|a_j|q} \right| < \frac{\tau}{|a_j|q}$. Отсюда

$$\left| x - \frac{h'}{q'} \right| < \frac{\tau}{q'}, \quad (13)$$

где через q' обозначен положительный делитель числа $a_j q$ и $(h', q') = 1$. Нетрудно видеть, что $q' > Q$. Действительно, если $q' \leq Q$, то из (13) и из того, что $x \in [\tau; 1 + \tau]$ следовало бы $1 \leq h' \leq q'$, то есть $x \in M$, что противоречит нашему предположению $x \in M'$. Таким образом

$$Q|a_j|^{-1} < q \leq \tau^{-1}. \quad (14)$$

Учитывая, это для оценки $S_j(a_jx)$, ($j = 1, 2$) будем пользоваться оценкой (2) пункта 25 работы [4] (см. также §7, [7]), согласно которому имеем: если α действительное число, h и $q \geq 1$ взаимно простые целые числа с условием $|\alpha - hq^{-1}| < q^{-2}$, тогда

$$S(\alpha) \ll \left(Nq^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}q^{1/2} \right) \ln^4 N. \quad (15)$$

Если в (15) возьмём $\alpha = a_jx$ и будем использовать условие (14), тогда при $0 < \delta \leq \frac{1}{16}$, получим

$$S_j(a_jx) \ll \left(NQ^{-1/2}|a_j|^{1/2} + N^{4/5} + N^{1/2}\tau^{-1/2} \right) \ln^4 N \ll NQ^{-1/2}B^{1/2}\ln^4 N.$$

Теперь рассмотрим $S_3(a_3x)$. Будем использовать теорему 2 работы [7], согласно которой имеем: если α действительное число, h и $q \geq 1$ взаимно простые целые числа с условием $|\alpha - hq^{-1}| < q^{-2}$, тогда существует постоянная c_3 такая, что при $N \geq N_0(c_3)$ справедлива оценка $S_3(\alpha) \ll N^{1+\frac{c_3}{\ln \ln N}} (q^{-1} + N^{-1/2} + qN^{-2})^{1/4}$. Отсюда в силу (14) получим

$$S_3(a_3x) \ll N^{1+\frac{c_3}{\ln \ln N}} Q^{-1/4} B^{1/4}.$$

□

Теперь докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Существует постоянная c_4 такая, что если $N \geq N_1(c_3, \delta)$, тогда справедлива оценка*

$$I_2(N) \ll N^{2+\frac{c_3}{\ln \ln N}} Q^{-1/4} B^{1/4} \ln N.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1 из (10) находим

$$\begin{aligned} |I_2(N)| &\leq \max_{x \in M'} |S_3(a_3x)| \left| \int_{M'} e(-bx) S_1(a_1x) S_2(a_2x) dx \right| \ll \\ &\ll N^{1+\frac{c_3}{\ln \ln N}} Q^{-1/4} B^{1/4} \int_{\tau}^{1+\tau} \left\{ |S_1(a_1x)|^2 + |S_2(a_2x)|^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\int_{\tau}^{1+\tau} |S_i(a_ix)|^2 dx = \sum_{L < n \leq N} \Lambda(n)^2 \ll \ln N \cdot \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \ll N \ln N,$$

так как согласно теореме 2.4, [8]

$$\sum_{n \leq N} \Lambda(n) \ll (2 \ln 2)N + O(\ln^2 N) \ll N.$$

Следовательно, из (16) получим утверждение леммы 2.

Пусть $R(N)$ - количество решений уравнения (1) в простых числах, то есть

$$R(N) = \sum_{\substack{L < p_1, p_2, p_3 \leq N \\ b = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3^2}} 1.$$

Из (11) и леммы 2 следует, что

$$I(N) = I_1(N) + O \left(N^{2+\frac{c_3}{\ln \ln N}} Q^{-1/4} B^{1/4} \ln N \right). \quad (17)$$

В силу (9) находим

$$I(N) = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{L < p_1^k, p_2^k, p_3^k \leq N \\ b = a_1 p_1^k + a_2 p_2^k + a_3 p_3^k}} \ln p_1 \ln p_2 \ln p_3 \leq (\ln N)^3 R(N) + O(N^{1/2} \ln N). \quad (18)$$

Из (17) и (18) получим

$$R(N) \geq \frac{I_1(N)}{\ln^3 N} + O\left(N^{2+\frac{c_3}{\ln \ln N}} Q^{-1/4} B^{1/4} (\ln N)^{-2}\right). \quad (19)$$

□

3. Упрощение интеграла по большим дугам

Теперь рассмотрим интеграл $I_1(N)$. В силу (11) имеем

$$I_1(N) = \sum_{q \leq Q} \sum_{h=1}^q \int_{-\tau/q}^{\tau/q} e\left(-b\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) \prod_{j=1}^3 S_j\left(a_j\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) d\eta. \quad (20)$$

Для любого характера $\chi \pmod{q}$ суммы $C_1(\chi, m)$ и $C_2(\chi, m)$ определим следующим образом:

$$C_1(\chi, m) = \sum_{l=1}^q \chi(l) e_q(lm), \quad C_2(\chi, m) = \sum_{l=1}^q \chi(l) e_q(l^2 m). \quad (21)$$

Используя (21) $S_j\left(a_j\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right)$ мы можем написать в виде:

$$S_j\left(a_j\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) = \sum_{L < n_j \leq N} \Lambda(n_j) e\left(a_j n_j \left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right), \quad j = 1, 2$$

$$\text{и при } j = 3, \quad S_3\left(a_3\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) = \sum_{L < n_3 \leq N} \Lambda(n_3) e\left(a_3 n_3^2 \left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right).$$

Отсюда, используя свойства ортогональности характеров (см. §1, гл. VIII, [9]) и обозначение (21) находим

$$\begin{aligned} S_j\left(a_j\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) &= \sum_{L < n_j \leq N} \Lambda(n_j) e\left(a_j n_j \left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi_q} \bar{\chi}_q(l_j) \chi_q(n_j) = \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} C_1(\bar{\chi}, a_j h) \cdot S_j(\chi, a_j \eta) + O(\mathcal{L}^2), \quad j = 1, 2; \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$S_3\left(a_3\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi} C_2(\bar{\chi}, a_3 h) S_3(\chi_q, a_3 \eta) + O(\mathcal{L}^2).$$

Здесь $\bar{\chi}$ характер сопряженный с характером χ , $\mathcal{L} = \ln N$ и использовали оценку

$$\sum_{\substack{m \leq N \\ (m, q) > 1}} \Lambda(n) < (\ln N) \ln q \ll \mathcal{L}^2.$$

Далее, рассмотрим функцию $\psi(x, x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n)$. Согласно явной формуле (см. стр. 115, [4]) имеем

$$\psi(x, \chi) = \delta_{\chi_0} x - \delta_{\bar{\chi}} \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\beta} - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + R(x, q), \quad (23)$$

где

$$R(x, q) \ll NT^{-1} \mathcal{L}^2, \quad (24)$$

$$\delta_{\chi_0} = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi = \chi_0 - \text{главный характер по mod } q; \\ 0, & \text{если } \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

$$\delta_{\tilde{\chi}} = \begin{cases} 1, & \text{если } L(s, \chi) \text{ существует } \tilde{\beta} - \text{вещественный нуль } L \text{ функции } L(s, \tilde{\chi}) \\ & \text{удовлетворяющий условию } \tilde{\beta} > 1 - c_1(\ln T)^{-1}; \\ 0, & \text{если такого исключительного нуля не существует } \tilde{\beta}. \end{cases}$$

$\sum'_{|\gamma| \leq T}$ - означает, что суммирование ведется по всем нулям $\rho = \sigma + i\gamma$ в прямоугольнике $0 < \sigma < 1$, $|t| \leq T$, кроме исключительного нуля. Используя функции $\psi(x, \chi)$ мы можем $S_j(\chi, a_j\eta)$, ($j = 1, 2$) и $S_3(\chi, a_3\eta)$ представить в виде (см. [4] и [10]):

$$S_j(\chi, a_j\eta) = \int_L^N e(x_j a_j \eta) d\psi(x, \chi), \quad j = 1, 2 \text{ и } S_3(\chi, a_3\eta) = \int_L^N e(x_3^2 a_3 \eta) d\psi(x, \chi). \quad (25)$$

Из (23), (24) и (25) следует

$$\begin{aligned} S_j(\chi, a_j\eta) &= \delta_{\chi_0} \int_L^N e(x a_j \eta) dx - \delta_{\tilde{\chi}} \int_L^N e(x a_j \eta) x^{\tilde{\beta}-1} dx - \sum'_{|\gamma| \leq T} \int_L^N x^{\rho-1} e(x a_j \eta) d\eta + \\ &\quad + \int_L^N e(x a_j \eta) dR(x, q). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$\left| \int_L^N e(x a_j \eta) dR(x, q) \right| \ll \frac{N \mathcal{L}^2}{T} + \frac{N \mathcal{L}^2}{T} \int_L^N \left| \frac{d}{dx} e(x a_j \eta) \right| dx. \quad (27)$$

Учитывая неравенство

$$\int_L^N \left| \frac{d}{dx} e^{2\pi i x a_j \eta} \right| dx \leq 2\pi |a_j| \eta N,$$

из (26), (27) и (8) находим

$$S_j(\chi, a_j\eta) = \delta_{\chi_0} I(a_j\eta) - \delta_{\tilde{\chi}_0} \tilde{I}(a_j\eta) - I_\chi(a_j\eta) + O\left((1 + |a_j\eta| N) \frac{N}{T} \mathcal{L}^2\right). \quad (28)$$

Так как $|a_j| \leq B$, $|\eta| < \frac{\tau}{q}$, $\tau = \frac{T^{1/4}}{N}$, то остаточный член в (28) не больше чем $O(BNT^{-3/4}q^{-1}\mathcal{L}^2)$. Учитывая это, из (22) и (28) получим:

$$\begin{aligned} S_j\left(a_j\left(\frac{h}{q} + \eta\right)\right) &= \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ C_1(\chi_0, a_j h) I(a_j\eta) - \delta_{\tilde{\chi}} C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_j h) \tilde{I}(a_j\eta) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\chi} C_1(\bar{\chi}, a_j h) I_\chi(a_j\eta) + O\left(\sum_{\chi} |C_1(\bar{\chi}, a_j h)| \frac{BN\mathcal{L}^2}{T^{3/4}q}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} G_j(h, q, \eta) &:= \sum_{\chi} C_1(\bar{\chi}, a_j h) I_\chi(a_j\eta), \quad j = 1, 2 \\ H_j &= H_j(h, q, \eta) := C_1(\chi_0, a_j h) I(a_j\eta) - \delta_{\tilde{\chi}} C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_j h) \tilde{I}(a_j\eta) - G_j(h, q, \eta). \end{aligned} \quad (30)$$

Принимая во внимание оценку $\sum_{\chi_q} |C_1(\bar{\chi}_q, a_j h)| \leq \varphi^2(q)$ и обозначение (30), равенство (29) можно написать в виде

$$S_j(a_j x) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ H_j(h, q, \eta) + O\left(\frac{\varphi(q) N B \mathcal{L}^2}{T^{3/4}}\right) \right\}, \quad (j = 1, 2).$$

Проведя то же рассуждение, что и в случае $S_j(a_j x)$, $(j = 1, 2)$ получим

$$S_3(a_3 x) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ H_3(h, q, \eta) + O\left(\frac{B N \varphi(q) \mathcal{L}^2}{T^{3/4}}\right) \right\},$$

где

$$\left. \begin{aligned} G_3(h, q, \eta) &:= \sum_{\chi} C_2(\bar{\chi}, a_3 h) I_{\chi}(a_3 \eta), \\ H_3 &= H_3(h, q, \eta) := C_2(\chi_0, a_3 h) I(a_3 \eta) - \delta_{\bar{\chi}} C_2(\bar{\chi} \chi_0, a_3 h) \tilde{I}(a_3 \eta) - G_3(h, q, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Таким образом, имеем

$$S_i(a_i x) = \frac{1}{\varphi(q)} \{H_i + R\}, \quad i = 1, 2, 3$$

где $R \ll B N \varphi(q) T^{-3/4} \mathcal{L}^2$ и согласно (27) и (28) работы [10] $H_i \ll \varphi^2(q) N$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда

$$S_1(a_1 x) S_2(a_2 x) S_3(a_3 x) = \frac{1}{\varphi^3(q)} \left\{ H_1 H_2 H_3 + O\left(\frac{\varphi^5(q) B N^3 \mathcal{L}^2}{T^{3/4}}\right) \right\}. \quad (32)$$

Из (20) и (33) следует, что

$$I_1(N) = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\tau/q}^{\tau/q} e(-b\eta) \left\{ H_1 H_2 H_3 + O\left(\frac{\varphi^5(q) B N^3 \mathcal{L}^2}{T^{3/4}}\right) \right\} d\eta. \quad (33)$$

Для остаточного члена в (33) справедлива оценка:

$$\ll \left| \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\tau/q}^{\tau/q} e(-b\eta) \frac{\varphi^5(q) B N^3 \mathcal{L}^2}{T^{3/4}} d\eta \right| \ll \frac{N^2 B \mathcal{L}^2}{T^{1/2}} Q^3 \ll N^2 Q^{-1}.$$

Поэтому из (33) получим

$$I_1(N) = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\tau/q}^{\tau/q} e(-b\eta) H_1 H_2 H_3 d\eta + O(N^2 Q^{-1}). \quad (34)$$

Теперь предел интегрирования $\left[-\frac{\tau}{q}, \frac{\tau}{q}\right]$ расширим до $(-\infty; \infty)$. Произведение $H_1 H_2 H_3$ есть сумма $(\varphi(q) + 2)^3$ членов. Каждый из этих членов имеет вид $\prod_{j=1}^3 E_j$, где E_j ($j = 1, 2$) равен или $C_1(\chi_0, a_j h) I(a_j \eta)$, или $-\delta_{\bar{\chi}} C_1(\bar{\chi} \chi_0, a_j h) \tilde{I}(a_j \eta)$, или же $C_1(\bar{\chi}, a_j h) I_{\chi}(a_j \eta)$ ($j = 1, 2$). При $j = 3$, E_3 равен одному из следующих выражений $C_2(\chi_0, a_3 h) I(a_3 \eta)$, $-\delta_{\bar{\chi}} C_2(\bar{\chi} \chi_0, a_3 h) \tilde{I}(a_3 \eta)$ или $C_2(\bar{\chi}, a_3 h) I_{\chi}(a_3 \eta)$. Если $|\eta| > \frac{\tau}{q}$, тогда $|a_j \eta| > N^{-1} T^{1/4} Q^{-1} > N^{-1} Q > N^{-1}$. Для того, чтобы оценить $I(a_j \eta)$, $\tilde{I}(a_j \eta)$ и $I_{\chi}(a_j \eta)$ воспользуемся леммой 3.3 работы [10].

ЛЕММА 3. Для произвольного действительного числа y справедливы оценки:

$$I(y) \ll \min \left(N; ||y||^{-1} \right), \tilde{I}(y) \ll \min \left(N^{\tilde{\beta}}, |y|^{-\tilde{\beta}} \right)$$

и

$$I_{\chi}(y) \ll \begin{cases} N, & \text{если } y \text{ произвольное действительное число;} \\ N(L|y|)^{-1/2}, & \text{если } N^{-1} < |y| \leq \frac{T}{\pi L}; \\ |y|^{-1}, & \text{если } \frac{T}{\pi L} < |y|. \end{cases} \quad (35)$$

Полагая $y = a_j \eta$ используем вторую оценку (35) (потому что среди оценок приведенных в лемме самой слабой является вторая оценка в (35)). Так как $|a_j \eta| \leq B \cdot \frac{\tau}{q} = B \cdot \frac{T^{1/4}}{Nq} < (\pi L)^{-1}$.

Поэтому

$$\int_{R \setminus \left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]} \prod_{j=1}^3 E_j d\eta \ll \frac{\varphi(q) (NB)^{1/2}}{|a_3 \tau q^{-1}|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |E_1 E_2| d\eta. \quad (36)$$

Здесь мы использовали следующую оценку, вытекающую из (35)

$$|I_{\chi}(a_j \eta)| \ll N(L|a_j \eta|)^{-1/2} \ll N^{1/2} B^{1/2} |a_j \eta|^{-1/2}.$$

Для оценки интеграла в правой части (36) будем использовать следствие 3.4 работы [10]. Согласно которому имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |I(y)|^2 dy \ll N, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{I}(y)|^2 dy \ll N^{2\tilde{\beta}-1} \text{ и } \int_{-\infty}^{\infty} |I_{\chi}(y)|^2 dy \ll N^2 L^{-1} \mathcal{L}.$$

Применяя следствие 3.4 работы [10] находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E_1 E_2| d\eta \ll \varphi^2(q) B N \mathcal{L}.$$

Таким образом, из (36) получим

$$\int_{R \setminus \left[-\frac{\tau}{q}; \frac{\tau}{q}\right]} \prod_{j=1}^3 E_j d\eta \ll \varphi^3(q) N^{3/2} B^{3/2} \mathcal{L} \left(\frac{\tau}{q} \right)^{-1/2}.$$

Теперь мы можем (34) написать в виде:

$$I_1(N) = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q{}' e_q(-bh) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) H_1 H_2 H_3 d\eta + O(N^2 Q^{-1}). \quad (37)$$

4. Исследование сингулярного ряда и сингулярного интеграла задачи

Сингулярный ряд задачи исследован нами в работах [11, 12]. Поэтому для удобства ограничимся с формулированием в виде полученных результатов в этих работах.

ЛЕММА 4. Пусть $\chi \pmod{p^\alpha}$ произвольный характер, $\alpha \geq 0$, тогда справедливы следующие утверждения:

(а) если χ -примитивный характер по модулю p^α , $\alpha \geq 0$ и $p \nmid a$, тогда

$$C_j(\chi, a) = 0, \quad (j = 1, 2);$$

(б) если χ_0 главный характер по модулю p^t , $p \nmid a$, $t \geq \theta + \max\{\theta, \alpha\}$, (где $\theta = 1 + \left[\frac{2}{p}\right]$), то $C_j(\chi\chi_0, a) = 0$, $(j = 1, 2)$.

(с) $|C_j(\chi, a)| \leq j(2, p)(a, p^\alpha)^{1/2} p^{\alpha/2}$, $(j = 1, 2)$.

Доказательство см. [11].

В дальнейших рассуждениях нам необходима информация о следующих суммах:

$$Z(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) := \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_1; a_1 h) C_1(\chi_2; a_2 h) C_2(\chi_3; a_3 h) \quad (38)$$

и

$$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) := \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_1; a_1 h) C_1(\chi_2; a_2 h) C_2(\chi_3; a_3 h), \quad (39)$$

здесь χ_1, χ_2, χ_3 характеры по модулю q . Если ясно, какие характеры имеются ввиду, то (38) и (39) будем обозначать через $Z(q)$ и $Y(q)$ соответственно.

$Y(q)$ можно написать как следующую сумму:

$$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = q \sum_{(q)} \chi_1(l_1) \chi_2(l_2) \chi_3(l_3), \quad (40)$$

где суммирование ведется по всем l_1, l_2, l_3 удовлетворяющие условиям $1 \leq l_1, l_2, l_3 \leq q$, $(l_j, q) = 1$ и $a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3^2 = b \pmod{q}$.

Случай $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 = \chi_0 \pmod{q}$ играет важную роль. В этом случае в силу (4) имеем $Y(q; \chi_0, \chi_0, \chi_0) = q \sum_{(q)} 1 = qN(q)$. Для удобства в записи положим

$$A(q) := \varphi(q)^{-3} Z(q; \chi_0, \chi_0, \chi_0) = \frac{1}{\varphi(q)^3} \sum_{h=1}^q e_q(-hb) C_1(\chi_0; a_1 h) C_1(\chi_0; a_2 h) C_2(\chi_0; a_3 h). \quad (41)$$

Теперь приведем несколько лемм, которые содержат этих суммы.

ЛЕММА 5. Оба функции $Z(q)$ и $Y(q)$ являются мультипликативными функциями в следующем смысле: если $q = q_1 q_2 \dots q_t$, $(q_i, q_j) = 1$ при $i \neq j$ и для каждого

$$\chi_j \pmod{q} = \prod_{i=1}^t \chi_{ji} \pmod{q_j}, \quad \text{тогда } Z(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = \prod_{i=1}^t Z(q_i; \chi_{1i}, \chi_{2i}, \chi_{3i}),$$

$Y(q; \chi_1, \chi_2, \chi_3) = \prod_{i=1}^t Y(q_i; \chi_{1i}, \chi_{2i}, \chi_{3i})$. В частности $N(q)$ и $A(q)$ являются мультипликативными функциями по q .

Доказательство см. лемма 3.2 работы [13].

Лемма 5 позволяет привести рассмотрение функции $Z(q)$ к рассмотрению $Z(p^\alpha)$, где p —простое число.

ЛЕММА 6. Для любого положительного целого q имеем $\frac{Z(q)}{\varphi^3(q)} \ll \frac{1}{q} B^{3/2}$.

ЛЕММА 7. Пусть $\chi_j \pmod{p^{\alpha_j}}$, $(j = 1, 2, 3)$ примитивные характеры и $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$. Для произвольного $t \geq \alpha$ $Z(p^t) = Z(p^t; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0)$, где χ_0 главный характер по модулю p^t . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) $Z(p^\alpha) = Y(p^\alpha)$,

b) $Z(p^t) = 0$, $t \geq \theta + \max\{\theta, \alpha\}$, где $\theta = 1 + \left[\frac{2}{p}\right]$;

c) для любого $\eta \geq \alpha$ справедливо равенство $\sum_{\nu=\alpha}^{\eta} \varphi(p^\nu)^{-3} Z(p^\nu) = \varphi(p^\eta)^{-3} Y(p^\eta)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. a) если $p \geq 3$, $\alpha \geq 2$ то $A(p^\alpha) = 0$ и если $\alpha \geq 4$, то $A(2^\alpha) = 0$;

b) если $p \geq 3$, $\eta \geq 1$, то $p^\eta \varphi(p^\eta)^{-3} N(p^\eta) = p \varphi(p)^{-3} N(p)$;

c) если $\eta \geq 3$, то $2^\eta \varphi(2^\eta)^{-3} N(2^\eta) = 2^3 \varphi(2^3)^{-3} N(2^3)$.

Учитывая следствие 2 введем еще следующие обозначения

$$s(2) = 2^3 \varphi(2^3)^{-3} N(2^3) = 1 + A(2) + A(2^2) + A(2^3), \quad (42)$$

$$s(p) = p \varphi(p)^{-3} N(p) = 1 + A(p), \quad \text{при } p \geq 3. \quad (43)$$

Теперь покажем, что условие (4) можно заменить с условием

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \sum_{j=1}^3 a_j \equiv b \pmod{24}, \\ b) \text{ для любого } p \geq 5 \text{ из четырех чисел } a_1, a_2, a_3, b \text{ самый больше два из них} \\ \text{делится на } p. \end{array} \right. \quad (44)$$

ЛЕММА 8. Пусть $p(p \geq 5)$ – простое число. Если не более двух чисел из набора a_1, a_2, a_3, b не делится на p , то $N(p) \geq 1$.

ЛЕММА 9. Справедливы следующие утверждения:

a) для всех простых имеем $|A(p)| \leq 2$ и для простых $p \nmid a_1 a_2 a_3$ выполняется неравенство $|A(p)| \leq 10p^{-2}$;

b) произведение $\prod_p s(p)$ абсолютно сходится и $\prod_p s(p) \gg B^{-6}$;

c) $\sum_{\substack{q=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} A(q) = \prod_{p \nmid r} s(p)$;

d) $\sum_{q \geq y}^{\infty} |A(q)| \ll y^{-1} B^{\frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10}(y+2)$, для всех $y > 0$.

ЛЕММА 10. Если $\chi_j \pmod{r_j}$, $j = 1, 2, 3$ примитивные характеры и $r = [r_1, r_2, r_3]$, тогда справедливы следующие утверждения:

a) $\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \varphi(q)^{-3} Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) \ll r^{-1} B^{\frac{3}{2}} \ln Q$;

b) $\sum_{\substack{q \leq Q \\ r \nmid q}} \varphi(q)^{-3} Z(q; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) = \varphi(\sigma r)^{-3} Y(\sigma r; \chi_1 \chi_0, \chi_2 \chi_0, \chi_3 \chi_0) \prod_{p \nmid r} s(p) +$

$$+ O\left(Q^{-1} B^{\frac{5}{2}} \ln^{11} Q\right),$$

где $\sigma = 1, 4, 2$ соответственно смотря на то, что какое из этих соотношений $2 \nmid r$, $2 \mid r$, $4 \mid r$ выполняется.

Доказательство леммы 6-10 и следствие 2 см. [12].

Теперь рассмотрим сингулярный интеграл. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 11. Для произвольных комплексных чисел ρ_j , $0 < \operatorname{Re} \rho_j \leq 1$, $j = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \left(\prod_{j=1}^N \int_L^N x^{\rho_j-1} e(a_j x \eta) dx \right) \left(\int_L^N x^{\rho_3-1} e(a_3 x^2 \eta) dx \right) d\eta = \\ & = N^2 (2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (N^2 x_3)^{\frac{\rho_3-1}{2}} \cdot (N x_1)^{\rho_3-1} (N x_2)^{\rho_2-1} dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (45)$$

где

$$x_3 = (bN^{-2} - a_1x_1 - a_2x_2) a_3^{-1}$$

и

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \mid LN^{-1} \leq x_1, x_2 \leq 1, \left(\frac{L}{N} \right)^2 \leq x_3 \leq 1 \right\}. \quad (46)$$

Кроме того, если: 1) не все a_j имеют одинаковый знак и $N^2 > 4|b|$ или 2) если все a_j положительные и $N^2 = b$, тогда (46)

$$\int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 \gg B^{-2}.$$

Лемма 11 следует из леммы 3.9 работы [13] и лемма 4.7 работы [10].

5. Большие дуги и завершение доказательства теоремы 1 и 2

Упрощение $I_1(N)$. Мы можем теперь завершить доказательство нашего основного результата показав, что $I_1(N)$ доминирует над остаточным членом в (19). Из (30) видно что $\prod_{j=1}^3 H_j(h, q, \eta)$, есть сумма $3^3 = 27$ слагаемых (если $\delta_{\tilde{\chi}} = 0$, то сумма $2^3 = 8$ слагаемых), которые можно разбить на следующие три категории:

(T_1) : $C_1(\chi_0, a_1h) C_1(\chi_0, a_2h) C_2(\chi_0, a_3h) I(a_1\eta) I(a_2\eta) I(a_3\eta)$;

(T_2) : 19 членов (в случае $\delta_{\tilde{\chi}} = 0$, тогда 7) которые содержат по крайней мере один множитель $G_j(h, q, \eta)$;

(T_3) : оставшиеся 7 членов (в случае $\delta_{\tilde{\chi}} = 0$, тогда $T_3 = 0$).

Для удобства положим

$$M_i = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{(h,q)=1} e_q(-bh) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \{ \text{сумма членов в } (T_i) \} d\eta, \quad i = 1, 2, 3. \quad (47)$$

Ввиду (37) имеем

$$I_1(N) = M_1 + M_2 + \delta_x M_3 + O(N^2 Q^{-1}), \quad (48)$$

Для чисел $1 \leq m_1 < m_2 < \dots \leq 3$ определим,

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots) = (\sigma \tilde{r})^{-1} Y(\sigma \tilde{r}; \chi_1, \chi_2, \chi_3), \quad (49)$$

где $\sigma = 1, 2$ и 4 смотря $2 \nmid \tilde{r}$, $4 \mid \tilde{r}$, $2 \parallel \tilde{r}$ соответственно и $\chi_j = \tilde{\chi} \chi_0 \pmod{\sigma \tilde{r}}$ для $j \in \{m_1, m_2, \dots\}$, $\chi_j = \chi_0 \pmod{\sigma \tilde{r}}$ в остальных случаях. В виду (40)

$$\mathcal{G}(m_1, m_2, \dots) = \sum_{(\sigma \tilde{r})} \tilde{\chi}(n_{m_1}) \tilde{\chi}(n_{m_2}) \dots \quad (50)$$

Аналогично, пусть

$$\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots) = N^2 (2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (Nx_{m_1})^{\tilde{\beta}-1} \cdot (Nx_{m_2})^{\tilde{\beta}-1} \cdot (Nx_{m_3})^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2, \quad (51)$$

где D область определенная в (46).

Например.

$$\mathcal{G}(2) = \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(n_2), \quad \mathcal{G}(2, 3) = \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(n_2) \tilde{\chi}(n_3)$$

и

$$\mathcal{P}(1) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_1)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2,$$

$$\mathcal{P}(2, 3) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2.$$

Пусть

$$\mathcal{P}_0 = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2. \quad (52)$$

Ясно, что из (46) имеем

$$|\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots)| \leq \mathcal{P}_0 \ll N^2 B. \quad (53)$$

Из (51) и (52) следует, что $|\mathcal{P}(m_1, m_2, \dots)| \leq \mathcal{P}_0$. Далее $|\mathcal{P}_0| \leq \left| N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 \right| \ll \ll N^2 B$, поскольку $L = NB^{-1}$, $B^{-2} \leq x_3 \leq 1$.

ЛЕММА 12. Имеем $M_1 = \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 Q^{-1} B^{1+\frac{c_3}{\ln \ln B}} \ln^{10}(Q+2)\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (47) имеем

$$M_1 = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\chi_0, a_1 h) C_1(\chi_0, a_2 h) C_2(\chi_0, a_3 h) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \left(\int_L^N e(a_1 x \eta) dx \right) \left(\int_L^N e(a_2 x \eta) dx \right) \left(\int_L^N e(a_3 x^2 \eta) dx \right) d\eta \quad (54)$$

Используя обозначение (41) на правой части равенства (54), M_1 можем написать в виде

$$M_1 = \sum_{q \leq Q} A(q) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \prod_{j=1}^2 \left(\int_L^N e(a_j x \eta) dx \right) \left(\int_L^N e(a_3 x^2 \eta) dx \right) d\eta.$$

Теперь используя равенство (44), при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ отсюда получим

$$M_1 = \sum_{q \leq Q} A(q) (N^2 2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 =$$

$$= \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 \right) \left(\sum_{q=1}^{\infty} A(q) - \sum_{q>Q} A(q) \right).$$

Применяя части с) и d) леммы 9 и принимая во внимание обозначение (41), а также оценки (53), находим

$$M_1 = \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 Q^{-1} B^{1+\frac{c_9}{\ln \ln N}} \ln^{10} Q\right),$$

что и требовалось доказать. $\square$

ЛЕММА 13. Если существует исключительный нуль, тогда:

$$\begin{aligned} \text{a) } M_3 &= \frac{\sigma\tilde{r}}{\varphi(\sigma\tilde{r})^3} \prod_{p|\tilde{r}} s(p) \left\{ - \sum_{i=1}^3 \mathcal{G}(i) \mathcal{P}(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \mathcal{G}(1, 2, 3) \mathcal{P}(1, 2, 3) + \right. \\ &+ O(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q) \} \\ \text{b) } M_3 &\ll N^2 \tilde{r}^{-1} B^{5/2} \ln Q. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В виду (31) 7 членов входящие в (T_3) можно группировать в три типа, в соответствие количества множителей $F_1^{(2)} = C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_1 h) \tilde{I}(a_1 \eta)$, $F_2^{(2)} = C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_2 h) \tilde{I}(a_2 \eta)$, $F_3^{(2)} = C_2(\tilde{\chi}\chi_0, a_3 h) \tilde{I}(a_3 \eta)$. Эти множители будут присутствовать в трех членах $(F_1^{(1)} F_2^{(2)} F_3^{(1)}, F_1^{(2)} F_2^{(1)} F_3^{(1)}, F_1^{(1)} F_2^{(1)} F_3^{(2)})$ один раз, в трех членах $(F_1^{(2)} F_2^{(2)} F_3^{(1)}, F_1^{(1)} F_2^{(2)} F_3^{(2)}, F_1^{(2)} F_2^{(1)} F_3^{(2)})$ два раза и в одном члене $(F_1^{(2)} F_2^{(2)} F_3^{(2)})$ три раза. Здесь $F_1^{(1)} = C_1(\chi_0, a_1 h) I(a_1 \eta)$, $F_2^{(1)} = C_1(\chi_0, a_2 h) I(a_2 \eta)$, $F_3^{(1)} = C_2(\chi_0, a_3 h) I(a_3 \eta)$. В первой группе указанные первый и второй член оцениваются одинаково.

Поэтому рассмотрим

$$\begin{aligned} M_{3,1} &= - \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_2 h) \tilde{I}(a_2 \eta) C_1(\chi_0, a_1 h) I(a_1 \eta) \times \\ &\times C_2(\chi_0, a_3 h) I(a_3 \eta) d\eta = \left(\sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_2 h) C_1(\chi_0, a_1 h) C_2(\chi_0, a_3 h) \right) \times \\ &\times \left(- \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \tilde{I}(a_2 \eta) I(a_1 \eta) I(a_3 \eta) d\eta \right) = -W_1 U_1. \end{aligned}$$

Интеграл U_1 согласно (45) и (51) равен $\mathcal{P}(2) = N^2 (2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2$. Для $M_{3,2}$ это остается справедливым, но только a_1 и a_2 необходимо менять местами $M_{3,2} = -W_2 U_2$, где

$$W_2 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_1 h) C_1(\chi_0, a_2 h) C_2(\chi_0, a_3 h) \text{ и}$$

$$U_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \tilde{I}(a_1 \eta) I(a_2 \eta) I(a_3 \eta) d\eta.$$

Рассмотрим $M_{3,3}$. Предыдущие рассуждения здесь приводят нас к равенству $M_{3,3} = -W_3 U_3$, где

$$W_3 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) C_1(\chi_0, a_1 h) C_1(\chi_0, a_2 h) C_2(\tilde{\chi}\chi_0, a_3 h) \text{ и}$$

$$U_3 = \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) I(a_1 \eta) I(a_2 \eta) \tilde{I}(a_3 \eta) d\eta.$$

Здесь интеграл U_3 согласно (45) и (51) равен

$$\mathcal{P}(3) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2.$$

В виду (38) имеем.

$$W_1 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\chi_0, \tilde{\chi}\chi_0, \chi_0)}{\varphi(q)^3}; \quad W_2 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\tilde{\chi}\chi_0, \chi_0, \chi_0)}{\varphi(q)^3}; \quad W_3 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\chi_0, \chi_0, \tilde{\chi}\chi_0)}{\varphi(q)^3}.$$

Теперь рассмотрим вторую группу членов $M_{3,4}$, $M_{3,5}$, $M_{3,6}$:

Для $M_{3,4}$ имеем

$$M_{3,4} = \left\{ \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q e_q(-bh) C_1(\tilde{\chi}\chi_0, a_i h) C_2(\chi_0, a_3 h) \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \tilde{I}(a_i \eta) I(a_3 \eta) = W_4 U_4, \quad i = 1, 2.$$

Здесь интеграл U_4 согласно (45) и (51) равен

$$\mathcal{P}(1, 2) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (N x_1)^{\tilde{\beta}-1} (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2.$$

Для W_4 в силу (38) имеем

$$W_4 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\tilde{\chi}_1 \chi_0, \tilde{\chi}_2 \chi_0, \chi_0)}{\varphi(q)^3}.$$

Аналогично, для $M_{3,5}$ и $M_{3,6}$ имеем $M_{3,5} = W_5 U_5$, где

$$U_5 = \mathcal{P}(2, 3), \quad \mathcal{P}(2, 3) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2, \quad W_5 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\chi_0, \tilde{\chi}_2 \chi_0, \tilde{\chi}_3 \chi_0)}{\varphi(q)^3};$$

$M_{3,6} = W_6 U_6$, где

$$U_6 = \mathcal{P}(1, 3) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}(1, 3) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (N x_1)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2, \quad W_6 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\tilde{\chi}_1 \chi_0, \chi_0, \tilde{\chi}_3 \chi_0)}{\varphi(q)^3}.$$

Остается рассмотреть $M_{3,7}$. Имеем $M_{3,7} = -W_7 U_7$, где

$$U_7 = \mathcal{P}(1, 2, 3) = N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (N x_1)^{\tilde{\beta}-1} (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2,$$

$$W_7 = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{Z(\tilde{\chi}_1 \chi_0, \tilde{\chi}_2 \chi_0, \tilde{\chi}_3 \chi_0)}{\varphi(q)^3}.$$

В силу леммы 10 б) имеем

$$W_7 = \frac{Y(\sigma r, \tilde{\chi}_1 \chi_0, \tilde{\chi}_2 \chi_0, \tilde{\chi}_3 \chi_0)}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right).$$

Учитывая (49) отсюда получим

$$W_7 = \frac{\sigma \tilde{r} \mathcal{G}(1, 2, 3)}{\varphi^3(\sigma \tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right).$$

Комбинируя полученные результаты находим:

$$M_3 = -(W_1 U_1 + W_2 U_2 + W_3 U_3) + (W_4 U_4 + W_5 U_5 + W_6 U_6) - W_7 U_7 = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi^3(\sigma \tilde{r})} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \times \\ \times \left\{ -\sum_{i=1}^3 \mathcal{G}(i) \mathcal{P}(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \mathcal{G}(1, 2, 3) \mathcal{P}(1, 2, 3) \right\} + O\left(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q\right).$$

Докажем утверждение б). Из леммы 10 (а) следует $W \ll \tilde{r}^{-1} B^{3/2} \ln Q$. Отсюда учитывая (53) находим, $M_{3,k} = WP \ll \tilde{r}^{-1} B^{5/2} N^2 \ln Q$. $\square$

ЛЕММА 14. Имеем $M_1 + M_3 \geq \Omega^3 \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 B^{7/2} Q^{-2/5} \ln^{11} Q\right)$, где

$$\Omega = \begin{cases} (1 - \tilde{\beta}) \ln T, & \text{если существует } \tilde{\beta}, \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$, тогда M_3 не будет участвовать и лемма следует из леммы 12

$$M_1 = \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 Q^{-1} B^{\frac{c_3}{\ln B}} \ln^{10} Q\right) \geq \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 Q^{-2/5} B^{7/2} \ln^{11} Q\right).$$

Теперь предположим, что существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$. В силу определения σ , $\sigma = 1, 2$ и 4 для $2 \nmid \tilde{r}$, $4 \nmid \tilde{r}$ $2 \mid \tilde{r}$ соответственно. Отсюда следует, что или $2 \nmid \sigma \tilde{r}$ или $2^3 \nmid \sigma \tilde{r}$. Следовательно, используя (42), (43), следствие 2 б), с) и мультипликативность $N(q)$, выводим

$$\prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) = \prod_{p \nmid \tilde{r}} \varphi(p)^{-3} p N(p) = \tilde{r} \varphi(\sigma \tilde{r})^{-3} N(\tilde{r}) = \sigma \tilde{r} \varphi(\sigma \tilde{r})^{-3} N(\sigma \tilde{r}) = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} N(\sigma \tilde{r}), \quad (56)$$

где $\tilde{r}$ -простое число или $2, 4, 8$.

Ввиду (56), (40) и (39), главный член M_1 в лемме 12 можно написать в виде

$$M_1 = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} N(\sigma \tilde{r}) \mathcal{P}_0 \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) = \frac{1}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} Y(\sigma \tilde{r}; \chi_0, \chi_0, \chi_0) \mathcal{P}_0 \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} \sum_{(\sigma \tilde{r})} \mathcal{P}_0 \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p).$$

Комбинируя, это с главным членом M_3 в лемме 13 а) получим:

$$M_1 + M_3 = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \sum_{(\sigma \tilde{r})} \mathcal{P}_0 + O\left(N^2 B^{1 + \frac{c_3}{\ln B}} Q^{-1} \ln^{10} Q\right) + \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \times \\ \times \left\{ -\sum_{i=1}^3 \mathcal{G}(i) \mathcal{P}(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \mathcal{G}(1, 2, 3) \mathcal{P}(1, 2, 3) \right\} + O\left(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q\right) = \\ = \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \left\{ \sum_{(\sigma \tilde{r})} \mathcal{P}_0 + \left[-\sum_{i=1}^3 \mathcal{G}(i) \mathcal{P}(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \mathcal{G}(i, j) \mathcal{P}(i, j) - \mathcal{G}(1, 2, 3) \mathcal{P}(1, 2, 3) \right] \right\} + \\ + O\left(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q\right).$$

Используя (50), (51) и (52) в правой части, последнего равенство находим

$$\begin{aligned}
M_1 + M_3 = & N^2(2|a_3|)^{-1} \frac{\sigma\tilde{r}}{\varphi(\sigma\tilde{r})^3} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \cdot \left\{ \sum_{(\sigma\tilde{r})} N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 - \right. \\
& - \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_j) \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2 \right) \right) - \\
& - \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_3) \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2 \right) + \\
& + \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_1) \tilde{\chi}(l_2) \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_1)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2 \right) + \\
& + \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_1) \tilde{\chi}(l_3) \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_1)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2 \right) - \\
& - \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_2) \tilde{\chi}(l_3) \cdot \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2 \right) - \\
& - \sum_{(\sigma\tilde{r})} \tilde{\chi}(l_1) \tilde{\chi}(l_2) \tilde{\chi}(l_3) \left(N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D (Nx_1)^{\tilde{\beta}-1} (Nx_2)^{\tilde{\beta}-1} (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} dx_1 dx_2 \right) \Big\} + \\
& + O(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q).
\end{aligned} \tag{57}$$

Выражение в фигурной скобке не меньше чем

$$\geq \sum_{(\sigma\tilde{r})} \int_D x_3^{-1/2} \prod_{j=1}^2 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \right) \left(1 - \tilde{\chi}(l_3) (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} \right) dx_1 dx_2.$$

Так как в области D выполняются условия $\frac{L}{N} \leq x_1, x_2 \leq 1$, то имеем $\left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \right) \geq 1 - L^{\tilde{\beta}-1}$ и $\left(\frac{L}{N} \right)^2 \leq x_3 \leq 1$, то $\left(1 - \tilde{\chi}(l_3) (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} \right) \geq 1 - L^{\tilde{\beta}-1}$, поэтому

$$\prod_{j=1}^2 \left(1 - \tilde{\chi}(l_j) (Nx_j)^{\tilde{\beta}-1} \right) \left(1 - \tilde{\chi}(l_3) (N^2 x_3)^{\frac{\tilde{\beta}-1}{2}} \right) \geq \left(1 - L^{\tilde{\beta}-1} \right)^3.$$

Из (5) и (6) находим $L = \frac{N}{B} \geq \frac{N}{Q^\delta} = N^{1-\delta^2} > \sqrt{N}$. Следовательно, используя (5) и (55) получим

$$1 - L^{\tilde{\beta}-1} \geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} (1 - \tilde{\beta}) \ln N\right) \geq \Omega.$$

Поэтому главный член в (57) не меньше чем

$$\begin{aligned}
& \geq \Omega^3 N^2(2|a_3|)^{-1} \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \frac{\sigma\tilde{r}}{\varphi(\sigma\tilde{r})^3} \sum_{(\sigma\tilde{r})} \int_D x_3^{-1/2} dx_1 dx_2 = \Omega^3 P_0 \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) \left(\frac{\sigma\tilde{r}}{\varphi(\sigma\tilde{r})^3} \sum_{(\sigma\tilde{r})} 1 \right) = \\
& = \Omega^3 P_0 \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p).
\end{aligned} \tag{58}$$

Из (57) и (58) получим утверждение леммы 14. □

ЛЕММА 15. *Справедлива оценка*

$$M_2 \ll \Omega^3 \exp\left(-\frac{c_5}{\sqrt{\delta}}\right) P_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 B^{7/2} Q^{-1} \ln^{11} Q\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (47) имеем

$$M_2 = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) \{ \text{сумма членов в } (T_2) \} d\eta. \quad (59)$$

Здесь (T_2) - есть сумма 19 членов, каждый из которых содержат по крайней мере один множитель $G_j(h, q, \eta)$. В силу (30) и (32) имеем

$$\begin{aligned} T_2 = & F_1^{(1)} G_2 F_3^{(1)} - F_1^{(2)} G_2 F_3^{(1)} - G_1 F_2^{(1)} F_3^{(1)} + G_1 F_2^{(2)} F_3^{(1)} + G_1 G_2 F_3^{(1)} + F_1^{(1)} G_2 F_3^{(2)} - F_1^{(2)} G_2 F_3^{(2)} + \\ & + G_1 F_1^{(1)} F_3^{(2)} - G_1 F_2^{(2)} F_3^{(2)} - G_1 G_2 F_3^{(2)} - F_1^{(1)} F_2^{(1)} G_3 + F_1^{(1)} F_2^{(2)} G_3 + F_1^{(1)} G_2 G_3 + \\ & + F_1^{(2)} F_3^{(1)} G_3 - F_1^{(2)} F_2^{(2)} G_3 - F_1^{(2)} G_2 G_3 + G_1 F_2^{(1)} G_3 - G_1 F_3^{(2)} G_3 - G_1 G_2 G_3 = \sum_{s=1}^{19} X_s, \end{aligned}$$

где

$$F_j^{(1)} = C_1(\chi_0, a_j h) I(a_j \eta), \quad F_j^{(2)} = C_1(\tilde{\chi} \chi_0, a_j h) \tilde{I}(a_j \eta), \quad G_j(h, q, \eta) = \sum_{\chi} C_1(\tilde{\chi}, a_j h) I_{\chi}(a_j \eta),$$

при $j = 1, 2$ и $F_3^{(1)} = C_2(\chi_0, a_3 h) I(a_3 \eta)$, $F_3^{(2)} = C_2(\tilde{\chi} \chi_0, a_3 h) \tilde{I}(a_3 \eta)$,
 $G_3(h, q, \eta) = \sum_{\chi} C_2(\tilde{\chi}, a_3 h) I_{\chi}(a_3 \eta)$.

Оценим вклад этих членов в M_2 . Для конкретности оценим вклад одного из этих членов, например типичного члена

$$X_{12} = \delta_{\tilde{\chi}} C_1(\chi_0, a_1 h) I(a_1 \eta) C_1(\tilde{\chi} \chi_0, a_2 h) \tilde{I}(a_2 \eta) G_3(h, q, \eta).$$

Согласно (30), (32), (8) и (59), имеем

$$\begin{aligned} X_{12} = & \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) \int_{-\infty}^{\infty} e(-b\eta) C_1(\chi_0, a_1 h) C_1(\tilde{\chi} \chi_0, a_2 h) I(a_1 \eta) \tilde{I}(a_2 \eta) \times \\ & \times G_3(h, q, \eta) d\eta = \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) C_1(\chi_0, a_1 h) C_1(\tilde{\chi} \chi_0, a_2 h) \left(\sum_{\chi} C_2(\tilde{\chi}, a_3 h) \sum_{|\gamma| \leq T} {}' \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_L^N e(a_1 \eta x_1) dx_1 \right) \left(\int_L^N x^{\tilde{\beta}-1} e(a_2 \eta x_2) dx_2 \right) \left(\int_L^N x^{\rho-1} e(a_3 \eta x_3^2) dx_3 \right) d\eta. \end{aligned}$$

Здесь интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \dots d\eta$ равен $N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (N^2 x_3)^{\frac{\rho_3-1}{2}} (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} dx_1 dx_2$. Известно, что каждый характер индуцируется единственным примитивным характером и следовательно для каждого примитивного характера $\chi^*(\text{mod } r)$ и каждой q делимой с r существует единственный характер $\chi(\text{mod } q)$, который индуцируется с χ^* . Кроме того L -функции $L(s, \chi^*)$ и $L(s, \chi)$ имеют одинаковое множество нетривиальных нулей с положительной вещественной частью. Таким образом мы можем перегруппировать члены в X_{12} следующим образом:

$$\begin{aligned} X_{12} = & N^2(2|a_3|)^{-1} \int_D x_3^{-1/2} (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} \cdot \sum_{r \leq Q} \sum_{\chi(\text{mod } r)} {}' \sum_{|\gamma| \leq T} (N^2 x_3)^{\frac{\rho_3-1}{2}} \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \setminus q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} \times \\ & \times \sum_{h=1}^q {}' e_q(-bh) C_1(\chi_0, a_1 h) C_1(\tilde{\chi} \chi_0, a_2 h) C_2(\tilde{\chi}_3, a_3 h) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь $\sum_{\chi(\bmod r)}^*$ — означает суммирование по всем примитивным характерам по модулю r и $\chi_0(\bmod q)$. Ввиду (38) внутренняя сумма $\sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}}$ в (60) равно

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} Z(q; \chi_0, \tilde{\chi}\chi_0, \tilde{\chi}_3\chi_0).$$

Следовательно, в силу леммы 10 (b) равен

$$\varphi(\sigma r)^{-3} Y(\sigma r) \prod_{p \nmid r} s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right).$$

Используя тривиальную оценку $|Y(\sigma r)| \leq \sigma r N(\sigma r)$ (см. (40)) и ввиду (56) заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{q \leq Q \\ \tilde{r} \nmid q}} \frac{1}{\varphi^3(q)} Z(q; \chi_0, \tilde{\chi}\chi_0, \tilde{\chi}_3\chi_0) \right| &\leq \frac{\sigma \tilde{r}}{\varphi(\sigma \tilde{r})^3} N(\sigma \tilde{r}) \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right) = \\ &= \prod_{p \nmid \tilde{r}} s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right). \end{aligned}$$

Подставляя это в (60) получим

$$\begin{aligned} |X_{12}| &\leq \left(\prod_p s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right) N^2 (2|a_3|)^{-1} \right) \times \\ &\times \int_D x_3^{-1/2} (N x_2)^{\tilde{\beta}-1} \sum_{r \leq Q} \sum_{\chi(\bmod r)}^* \sum_{|\gamma| \leq T} (N^2 x_3)^{\frac{\rho_3-1}{2}} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (61)$$

В лемме 6.2 работы [9] доказана, что для некоторого подходящего c_5 и для любого вещественного $y \geq \sqrt{N}$ справедлива оценка

$$\sum_{q \leq T} \sum_{\chi(\bmod r)}^* \sum_{|\gamma| \leq T} y^{\beta-1} \ll \Omega^3 \exp\left(\frac{-c_5}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Применяя это кратным суммам в (61) и замечая, что $(N^2 x_3)^{1/2} \geq L \geq \sqrt{N}$ и $Nx > \sqrt{N}$ для $(x_1, x_2) \in D$ получим

$$|X_{12}| \leq \left(\Omega^3 \exp\left(\frac{-c_5}{\sqrt{\delta}}\right) \right)^2 \left(\prod_p s(p) + O\left(Q^{-1} B^{5/2} \ln^{11} Q\right) \right) \mathcal{P}_0.$$

Ввиду (53), для X_{12} и следовательно для M_2 справедливы указанные в лемме 15 ограничения, т.е.

$$M_2 \ll \Omega^3 \exp\left(\frac{-c_5}{\sqrt{\delta}}\right) \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O\left(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q\right).$$

□

Теперь, комбинируя все наши оценки можем получить необходимое нужное ограничение для $I_1(N)$. Рассмотрим два случая: 1) Пусть не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ или

существует и $\tilde{r}$ модуль исключительного характера $\tilde{\chi}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{r} > Q^{0,7}$. Тогда согласно (48), леммам 12 и 13 б) и 15 при достаточно малом δ имеем:

$$I_1(N) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2 Q^{-1}) = \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O(N^2 Q^{-1} B^{\frac{c_3}{\ln \ln B}} \ln^{10} Q) + O(r^{-1} N^2 B^{5/2}) + \\ + O\left(\Omega^3 \exp\left(\frac{-c_5}{\sqrt{\delta}}\right) \mathcal{P}_0 \prod_p s(p)\right) + O(N^2 Q^{-1} B^{7/2} \ln^{11} Q) \geq \frac{1}{2} \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O(N^2 Q^{-0,1} B^{5/2}).$$

Отсюда в силу 4.7 (б), формулы (3.18) работе [12] и (52) находим

$$I_1(N) \gg \mathcal{P}_0 B^{-6} + O(N^2 Q^{-0,1} B^{5/2}) \gg N^2 B^{-8} (2|a_3|)^{-1} + O(N^2 Q^{-0,1} B^{5/2}) \gg N^2 B^{-8}. \quad (62)$$

2) Пусть теперь существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ и $\tilde{r}$ модуль исключительного характера $\tilde{\chi}$ удовлетворяет условию $\tilde{r} \leq Q^{0,7}$. В этом случае мы используем равенство (48), леммы 14 и 15, тогда при достаточно малом δ получим:

$$I_1(N) = M_1 + M_2 + M_3 + O(N^2 Q^{-1}) \geq \Omega^3 \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O(N^2 B^{7/2} Q^{-2/5} \ln^{11} Q) + M_2 \gg \\ \gg \Omega^3 \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) - \Omega^3 \exp\left(\frac{-c_5}{\sqrt{\delta}}\right) \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + O(N^2 B^{7/2} Q^{-2/5} \ln^{11} Q) \gg \frac{1}{2} \Omega^3 \mathcal{P}_0 \prod_p s(p) + \\ + O(N^2 Q^{-39/100}).$$

Согласно (55), (7) и (5) имеем

$$\Omega \geq (1 - \tilde{\beta}) \ln T \geq c_2 (\tilde{r}^{1/2} \ln^2 \tilde{r})^{-1} \ln T \gg (Q^{7/20} \ln^2 Q)^{-1} \ln T \gg (Q^{7/20} \ln Q)^{-1}.$$

Подобно тому как в случае (1) отсюда выводим

$$I_1(N) \gg Q^{\frac{-21}{20}} (\ln Q)^{-3} N^2 B^{-8} (2|a_3|)^{-1}. \quad (63)$$

Поэтому если не существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ или существует и модуль $\tilde{r}$ исключительного характера $\tilde{\chi}$ удовлетворяет неравенству $\tilde{r} > Q^{\frac{1}{13}}$, тогда из (19) и (62) получим

$$R(N) \geq c_4 \frac{N^2}{B^8 \ln^3 N} - c_5 \frac{N^{2+\frac{c_3}{\ln \ln N}} B^{1/4}}{Q^{1/4} \ln^2 N} = \frac{N^2}{B^8 \ln^3 N} \left(c_4 - c_5 \frac{N^{\frac{c_3}{\ln \ln N}} B^{33/4} \ln N}{Q^{1/4}} \right) \geq \\ \geq \frac{N}{B^8 \ln^3 N} \left(c_4 - c_5 \frac{B^{33/4} \ln N}{N^{0.15\delta}} \right) \geq c_3 \frac{N}{B^8 \ln^3 N} \quad (64)$$

Во втором случае, т.е. если существует исключительный нуль $\tilde{\beta}$ и модуль $\tilde{r}$ исключительного характера $\tilde{\chi}$ удовлетворяет условию $\tilde{r} \leq Q^{1/13}$, то из (19) и (63) получим:

$$R(N) \geq c_4 \frac{N^2}{B^8 Q^{\frac{3}{26}} \ln^3 Q \ln^3 N} - c_5 \frac{N^{2+\frac{c_3}{\ln \ln N}} B^{1/4}}{Q^{1/4} \ln^2 N} \geq \frac{N^2}{B^8 Q^{\frac{3}{26}} \ln^6 N} \left(c_7 - c_5 \frac{N^{\frac{c_3}{\ln \ln N}} B^{\frac{33}{4}} \ln^4 N}{Q^{\frac{1}{4}-\frac{3}{26}}} \right) \geq \\ \geq \frac{N^2}{B^8 Q^{\frac{3}{26}} \ln^6 N} \left(c_7 - \frac{c_5}{Q^{\frac{1}{13}}} \right) \geq c_8 \frac{N^2}{B^2 Q^{\frac{3}{26}} \ln^6 N}. \quad (65)$$

Из (64) и (65) сразу следует, что $R(N) > 0$, то есть уравнение (1) имеет решение в простых числах $\frac{N}{L} \leq p_1, p_2, p_3 \leq N$. Теорема доказана.

Отметим, что оценка (65) является слабее чем оценка (64). Поэтому можно утверждать что для всех $\frac{N}{L} \leq p_1, p_2, p_3 \leq N$ справедлива оценка (65). Отсюда следует и справедливость теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел // Труды Матем. инс. им. В.А.Стеклова. 1947. с. 3–179 .
2. Аллаков, И. Об условиях разрешимости системы линейных диофантовых уравнений в простых числах // Известия ВУЗов. математика. 2006. № 9. с. 10-16.
3. Hua Lo-Ken. Some results in the additive prime number theory // Quart. J. Math. Oxford. 1938, pp. 68-80.
4. Davenport, H. Multiplicative Number Theory. Second edition // New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag. 1997. 178 p.
5. Аллаков, И. Оценка тригонометрических сумм и их приложения к решению некоторых аддитивных задач теории чисел // Surhon nashr. Термез. 2021. 160 с.
6. Нестеренко, Ю.В. Теория чисел // М:Издательский центр Академия. 2008. 272 с.
7. Ghosh, A. The distribution of αp^2 modulo 1 // Proc. London Math. № 42. -1981. pp. 252–269.
8. Montgomery, H.L., Vaughan, R.C. Multiplicative number theory: I // Classical theory United States of America by Cambridge. 2006. 552 p.
9. Карацуба, А.А. Основы аналитической теории чисел // Москва. Наука. 1983. 240 с.
10. Liu, M.C., Tsang, K.M. Small prime solutions of linear equations // Number Theory. 1989. pp. 595–624.
11. Аллаков, И., Музропова, Н., Джураева, З. Об оценке суммы Раманауджана // Материалы международной конференции «Современные проблемы математики», посвящённой 50-летию Института математики им. А.Джураева Национальной академии наук Таджикистана. Душанбе. -2023. с. 22-23.
12. Музропова, Н.С. Исследование особого ряда задачи о представлении чисел суммой двух простых и квадрата третьего простого числа // Научный вестник НамГУ. № 5. 2024. pp. 38–46.
13. Ming-Chit Liu, Kai-Man Tsang. Small prime solutions of same additive equations // Mh. Math. 111. 1991. pp. 147–169.
14. Vaughan, R.C. The Hardy-Littlewood Method. Second edition // Cambridge Univ.Press, 1997. 232 p.
15. Виноградов, И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Москва, Наука, 1980. 144 с.

REFERENCES

1. Hua Lo-Ken. 1947, “Additive theory of prime numbers”, *Proceedings Mat. ins. them. V.A. Steklova* pp. 3–179.
2. Allakov, I. 2006, “On conditions for the solvability of a system of linear Diophantine equations in prime numbers”, *Izv. universities Mat.*, vol.9. pp. 10–16.

3. Xua Lo-Ken., 1938 “Some results in the additive prime number theory”, *Quart. J. Math. Oxford.*, pp. 68–80.
4. Davenport, H. 1997, “Multiplicative Number Theory”, *New York Heidelberg Berlin, Springer-Verlag*, 178 p.
5. Allakov, I. 2021, “Estimation of trigonometric sums and their applications to the solution of certain additive problems in number theory”, *Surhon nashr, Termez*, 160 p.
6. Nesterenko, Yu.V. 2008, “Number theory”, *Moscow, Academy Publishing Center*. 272 p.
7. Ghosh, A. 1981, “The distribution of αp^2 modulo 1”, *Proc. London Math.*, vol. 42. pp. 252–269.
8. Montgomery, H.L., Vaughan, R.C. 2006, “Multiplicative number theory: I. Classical theory”, *United States of America by Cambridge*. 552 p.
9. Karatsuba, A.A. 1983, “Fundamentals of analytic number theory”, *Main editorial office of physical and mathematical literature publishing house, Nauka, Moscow.*, 240 p.
10. Liu, M. C., Tsang, K. M. 1989, “Small prime solutions of linear equations”, *Proc. Intern. Number. Th. Conf. 1987. Laval University. Cand. Math. Soc. Berlin-New York.*, pp. 595–624.
11. Allakov, I., Muzropova, N., Juraeva, Z. 2023, “On estimating the Ramanujan sum”, *Materials of inter international conference “Modern problems of mathematics” dedicated to the 50-th anniversary Institute of Mathematics named after. A. Juraev National Academy of Sciences of Tajikistan. Dushanbe*, pp. 22–23.
12. Muzropova, N.S. 2024, “Study of a special series of the problem of representing numbers by the sum of two primes and the square of the third prime number”, *Scientific Bulletin of NamSU*, vol.5. pp. 38–46.
13. Liu, M. C., Tsang, K. M. 1991, “Small prime solutions of same additive equations”, *Mh. Math.* 111., pp. 147–169.
14. Vaughan, R.C. 1997, “The Hardy-Littlewood Method. Second edition”, *Cambridge Univ.Press*. 232 p.
15. Vinogradov, I.M. 1980, “Method of trigonometric sums in number theory”, *Nauka, Moscow*. 144 p.

Получено: 14.06.2024

Принято в печать: 24.12.2024