

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-408-418

**Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде<sup>1</sup>**

Л. А. Толоконников, С. Л. Толоконников

**Толоконников Лев Алексеевич** — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

**Толоконников Сергей Львович** — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

*e-mail: tolst@mail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматривается задача о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой абсолютно жесткий цилиндр, покрытый радиально-неоднородным изотропным упругим слоем. Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, движущейся вдоль образующей цилиндра с постоянной дозвуковой скоростью.

Получено аналитическое решение задачи.

Представлены результаты численных расчетов диаграмм направленности рассеянного акустического поля в дальней зоне при разных законах неоднородности покрытия и значениях числа Маха.

*Ключевые слова:* рассеяние, звуковые волны, цилиндр, неоднородное упругое покрытие, движущаяся идеальная жидкость.

*Библиография:* 15 названий.

**Для цитирования:**

Толоконников, Л. А., Толоконников, С. Л. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с неоднородным упругим покрытием в движущейся среде // Чебышевский сборник, 2024, т.25, вып.3, с. 408–418.

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства просвещения РФ по теме «Теоретико-числовые методы в приближенном анализе и их приложения в механике и физике» (соглашение № 073-00033-24-01 от 09.02.2024).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-408-418

**Scattering of a plane sound wave by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating in a moving medium**

L. A. Tolokonnikov, S. L. Tolokonnikov

**Tolokonnikov Lev Alexeevich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: TolokonnikovLA@mail.ru*

**Tolokonnikov Sergey Lvovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

*e-mail: tolsl@mail.ru*

**Abstract**

In the article the problem of scattering of a plane monochromatic sound wave incident obliquely on a circular absolutely rigid cylinder covered by a radially inhomogeneous isotropic elastic layer is considered. The cylinder is located in a homogeneous ideal compressible fluid moving along forming of the cylinder with a constant subsonic speed.

The results of numerical calculations of directional patterns of a scattered acoustic field in the far zone for different laws of coating heterogeneity and values of the Mach number are presented.

*Keywords:* scattering, sound waves, cylinder, inhomogeneous elastic coating, moving ideal fluid.

*Bibliography:* 15 titles.

**For citation:**

Tolokonnikov, L. A., Tolokonnikov, S. L. 2024, "Scattering of a plane sound wave by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating in a moving medium", *Chebyshevskii sbornik*, vol.25, no.3, pp. 408–418.

**1. Введение**

Рассеяние звуковых волн на телах цилиндрической формы с неоднородными покрытиями рассматривалось в ряде работ. Рассеяние плоской звуковой волны цилиндром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием исследовано в [1, 2]. В [1] рассмотрен случай нормального падения волны на абсолютно жесткий цилиндр, а в [2] — случай наклонного падения на упругий цилиндр. В работе [3] решена задача о рассеянии плоских звуковых волн на дискретно-неоднородном упругом цилиндре. Решение задач о дифракции сферических и цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием получены в [4 – 6]. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием изучено в [7]. В указанных выше работах полагалось, что цилиндрическое тело находится в неподвижной среде. В [8] рассмотрено рассеяние плоской звуковой волны ограниченной цилиндрической оболочкой в движущейся среде в предположении, что края оболочки закреплены в жесткий безграничный цилиндрический экран.

В настоящей работе находится решение задачи о рассеянии плоской монохроматической звуковой волны, падающей наклонно на круговой цилиндр, покрытый радиально-неоднородным упругим слоем и находящийся в движущейся среде.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный абсолютно жесткий цилиндр радиуса  $r_0$ . Цилиндр имеет покрытие в виде неоднородного изотропного упругого слоя, внешний радиус которого равен  $r_1$ . Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y, z$ , ось  $z$  которой совпадает с осью вращения цилиндра. Свяжем с координатами  $x, y, z$  цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$ . Полагаем, что модули упругости  $\lambda$  и  $\mu$  материала неоднородного цилиндрического слоя описываются дифференцируемыми функциями цилиндрической радиальной координаты  $r$ , а плотность  $\rho$  — непрерывной функцией координаты  $r$ . Цилиндр находится в однородной идеальной сжимаемой жидкости, характеризуемой плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c$ . Жидкость движется с постоянной скоростью  $V$ , меньшей скорости звука, вдоль образующей цилиндра в положительном направлении оси  $z$ .

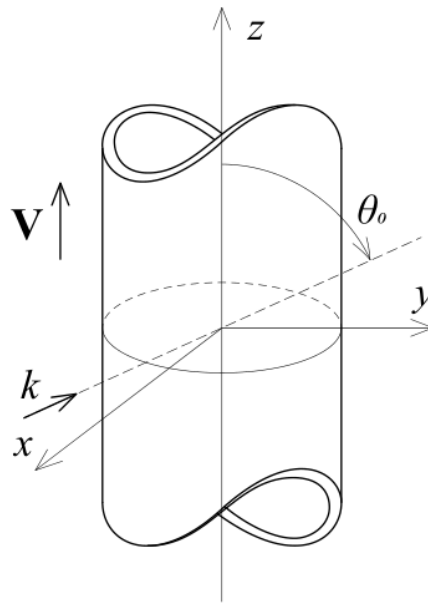


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть на цилиндр наклонно падает плоская монохроматическая звуковая волна давления  $p_i$ . Без ограничения общности будем полагать, что волновой вектор падающей волны  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xOz$  и азимутальный угол падения волны  $\varphi_0 = 0$ . С положительным направлением оси  $z$  волновой вектор составляет полярный угол  $\theta_0$  (рис. 1).

Определим отраженную от цилиндра волну, а также найдем поле смещений в неоднородном слое.

## 3. Аналитическое решение задачи

Распространения звука в однородной, поступательно движущейся среде со скоростью  $\mathbf{V}$  описывается уравнением [9]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \cdot \nabla) (\mathbf{V} \cdot \nabla) p = 0. \quad (1)$$

В случае гармонических колебаний с временной зависимостью  $e^{-i\omega t}$  и при  $\mathbf{V} = (0, 0, V)$  уравнение (1) принимает вид

$$\Delta p + 2iMk \frac{\partial p}{\partial z} - M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0. \quad (2)$$

Здесь  $p$  — звуковое давление во внешней среде;  $k = \omega/c$  — волновое число;  $M = V/c < 1$  — число Маха;  $t$  — время.

Представим падающую плоскую волну в виде

$$p_i = A_0 \exp[i(k_r r \cos \varphi + k_z z - \omega t)], \quad (3)$$

где  $A_0$  — амплитуда волны. В дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

Для падающей волны (3) с отношением  $k_z/k_r = \operatorname{ctg} \theta_0$  из уравнения (2), записанного в цилиндрической системе координат ( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ), получим

$$k_r = \frac{k \sin \theta_0}{1 + M \cos \theta_0}, \quad k_z = \frac{k \cos \theta_0}{1 + M \cos \theta_0}. \quad (4)$$

Давление в полном акустическом поле  $p = p_i + p_s$ , где  $p_s$  — звуковое давление в рассеянной волне. Акустическое поле будет симметрично относительно плоскости  $xOz$ .

Давление  $p_i$  представим в виде [10]

$$p_i(r, \varphi, z) = A_0 e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) i^n J_n(k_r r) \cos n\varphi, \quad (5)$$

где  $J_n$  — цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ .

С учетом условия излучения на бесконечности [10] давление  $p_s$  будем искать в виде

$$p_s(r, \varphi, z) = e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(k_r r) \cos n\varphi, \quad (6)$$

где  $H_n$  — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ . Разложение (6) удовлетворяет уравнению (2) при выполнении соотношений (4).

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в цилиндрической системе координат в случае установившихся колебаний имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r; \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} &= -\omega^2 \rho(r) u_z, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $u_r, u_\varphi, u_z$  — компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  частиц неоднородного слоя;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном изотропном упругом покрытии записываются следующим образом [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \lambda(r) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(r) \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda(r) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(r) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\mu(r) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = \mu(r) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= \mu(r) \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \sigma_{\varphi z} = \mu(r) \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \end{aligned}$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Используя эти соотношения, запишем уравнения (7) через компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$ . Получим

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left( \lambda' + 2\mu' + \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \\
& \quad + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \left( \lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \\
& \quad + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \lambda' \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_r = 0, \\
& \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \left( \mu' + \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \left( \mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \\
& \quad \mu \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi \partial z} + \left( -\frac{\mu'}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \omega^2 \rho \right) u_\varphi = 0, \tag{8} \\
& (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \left( \mu' + \frac{\lambda + \mu}{r} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{(\lambda + \mu)}{r} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \\
& \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left( \mu' + \frac{\mu}{r} \right) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \omega^2 \rho u_z = 0,
\end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ .

Так как неоднородность материала покрытия проявляется лишь в радиальном направлении, то зависимость компонент вектора смещения  $\mathbf{u}$  от координаты  $z$ , согласно закону Снеллиуса, имеет вид  $e^{ik_z z}$ . Компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  в неоднородном упругом слое являются периодическими функциями координаты  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому функции  $u_r(r, \varphi, z)$ ,  $u_\varphi(r, \varphi, z)$  и  $u_z(r, \varphi, z)$  будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(r) \cos n\varphi, & u_\varphi &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(r) \sin n\varphi, \\
u_z &= e^{ik_z z} \sum_{n=0}^{\infty} u_{3n}(r) \cos n\varphi. \tag{9}
\end{aligned}$$

При этом вид зависимостей от  $\varphi$  в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения  $\mathbf{u}$  относительно плоскости  $\varphi = 0, \pi$ .

Подставляя выражения (9) в уравнения (8), получим следующую систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $u_{1n}(r)$ ,  $u_{2n}(r)$  и  $u_{3n}(r)$  для каждого  $n$ :

$$\hat{A}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n \mathbf{U}_n' + \hat{C}_n \mathbf{U}_n = 0, \tag{10}$$

где  $\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T$ ;  $\hat{A}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{B}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{C}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$  — матрицы третьего порядка;

$$a_{n11} = (\lambda + 2\mu)r^2, \quad a_{n22} = a_{n33} = \mu r^2, \quad a_{nij} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$b_{n11} = (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, \quad b_{n12} = n(\lambda + \mu)r, \quad b_{n13} = ik_z(\lambda + \mu)r^2,$$

$$b_{n21} = -n(\lambda + \mu)r, \quad b_{n22} = \mu' r^2 + \mu r, \quad b_{n23} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 b_{n31} &= ik_z(\lambda + \mu)r^2, & b_{n32} &= 0, & b_{n33} &= \mu'r^2 + \mu r, \\
 c_{n11} &= \lambda'r - \lambda - (n^2 + 2 + k_z^2 r^2)\mu + \omega^2 \rho r^2, & c_{n12} &= n(\lambda'r - \lambda - 3\mu), \\
 c_{n13} &= ik_z \lambda' r^2, & c_{n21} &= -n(\mu'r + \lambda + 3\mu), \\
 c_{n22} &= -\mu'r - n^2 \lambda - (2n^2 + k_z^2 r^2 + 1)\mu + \omega^2 \rho r^2, & c_{n23} &= -ink_z(\lambda + \mu)r, \\
 c_{n31} &= ik_z[\mu'r^2 + (\lambda + \mu)r], & c_{n32} &= ink_z(\lambda + \mu)r, \\
 c_{n33} &= -(n^2 + 2k_z^2 r^2)\mu - k_z^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $A_n$  разложения (6) и функции  $u_{1n}(r)$ ,  $u_{2n}(r)$ ,  $u_{3n}(r)$  из разложений (9) подлежат определению из граничных условий.

Граничное условие на внешней поверхности неоднородного слоя (при  $r = r_1$ ), связывающее акустическое давление в жидкости и смещение частиц упругой среды, имеет вид [8, 12, 13]

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \rho \omega^2 \left( 1 + i \frac{M}{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u_r(r_1, \varphi, z). \quad (11)$$

Кроме того, граничные условия при  $r = r_1$  заключаются в равенстве нормального напряжения и акустического давления и в отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1 : \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \quad (12)$$

На внутренней поверхности слоя  $r = r_0$  должен быть равен нулю вектор смещения частиц упругой среды

$$r = r_0 : \quad u_r = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 0. \quad (13)$$

Подставляя (5), (6) и первое выражение (9) в (11), находим коэффициенты  $A_n$ , выраженные через величины  $u_{1n}(r_1)$

$$A_n = \frac{1}{k_r H'_n(k_r r_1)} \left[ -A_0 k_r (2 - \delta_{0n}) i^n J'_n(k_r r_1) + \rho \omega^2 \left( 1 - \frac{M}{k} k_z \right)^2 u_{1n}(r_1) \right] \quad (14)$$

где штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Из оставшихся неиспользованными граничных условий с учетом (14) и выражения для вронскиана  $J_n(x)H'_n(x) - J'_n(x)H_n(x) = \frac{2i}{\pi x}$  получаем шесть краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (10)

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{1}{r^2} \hat{A}_n \mathbf{U}'_n + \hat{D}_n \mathbf{U}_n \right) \Big|_{r=r_1} &= \hat{E}_n, \\
 \mathbf{U}_n \Big|_{r=r_0} &= 0,
 \end{aligned} \quad (15)$$

где элементы матриц  $\hat{D}_n = (d_{nij})_{3 \times 3}$ ,  $\hat{E}_n = (e_{nj})_{3 \times 1}$  определяются следующими выражениями:

$$d_{n11} = \frac{\lambda}{r} + \rho \omega^2 \left( 1 - \frac{M}{k} k_z \right)^2 \frac{H_n(k_r r)}{k_r H'_n(k_r r)}, \quad d_{n12} = \frac{n\lambda}{r}, \quad d_{n13} = ik_z \lambda,$$

$$d_{n21} = -\frac{n\mu}{r}, \quad d_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad d_{n31} = ik_z\mu, \quad d_{n23} = d_{n32} = d_{n33} = 0,$$

$$e_{n1} = -\frac{2i^{n+1}A_0(2 - \delta_{0n})}{\pi k_r r_1 H'_n(k_r r_1)}, \quad e_{n2} = e_{n3} = 0.$$

Краевая задача (10), (15) может быть решена различными методами.

После решения краевой задачи (10), (15) по формуле (14) вычисляются коэффициенты  $A_n$ . В результате получаем аналитическое описание волновых полей вне и внутри упругого покрытия с помощью выражений (6) и (9).

Рассмотрим дальнюю зону рассеянного акустического поля.

Используя асимптотическую формулу для цилиндрической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [14] ( $k_r r \gg 1$ )

$$H_n(k_r r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r}} \exp \left[ i \left( k_r r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

из (6) находим

$$p_s = \sqrt{\frac{r_0}{2r}} \exp \left[ i \left( k_z z + k_r r - \frac{\pi}{4} \right) \right] F(\varphi),$$

где

$$F(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi k_r r_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n A_n \cos n\varphi. \quad (16)$$

Выражения (6), (14) и (16) можно использовать для расчета акустического поля, рассеянного движущимся цилиндром в неподвижной среде. Для этого следует перейти от системы координат  $r, \varphi, z$  к системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$ , движущейся со средой, с помощью соотношений

$$r^1 = r, \quad \varphi^1 = \varphi, \quad z^1 = z + Vt.$$

В системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$  жидкость неподвижна, а цилиндр движется со скоростью  $V$  в направлении, противоположном оси  $z^1$ .

Отметим, что частота колебаний в движущейся системе координат  $r, \varphi, z$  будет отличаться от частоты колебаний в неподвижной системе координат  $r^1, \varphi^1, z^1$  (относительно среды). Если расстояние  $R$  от центра системы  $r, \varphi, z$  до точки наблюдения изменяется не слишком быстро, то частота колебаний  $\omega_1$  для неподвижного относительно среды наблюдателя определятся по формуле [9]

$$\omega_1 = \omega \left( 1 - M \frac{z}{R} \right) / (1 - M^2),$$

выражающей эффект Доплера.

#### 4. Численные исследования

С помощью выражения (16) для амплитуды рассеяния в дальней зоне поля  $|F(\varphi)|$  были рассчитаны диаграммы направленности, позволяющие оценить звукоотражающие свойства тела в различных направлениях.

Были проведены расчеты  $|F(\varphi)|/A_0$  для цилиндра, находящегося в воде ( $\rho_1 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1485$  м/с), при нормальном падении плоской волны ( $\theta_0 = \pi/2$ ). Полагалось, что отношение внешнего радиуса цилиндрического слоя  $r_1$  к внутреннему радиусу  $r_0$  равно 1.1, а  $r_0 = 1$  м. Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью  $\bar{\rho} = 1.07 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и модулями упругости  $\bar{\lambda} = 3.9 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\bar{\mu} = 9.8 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> (поливинил), так и

для неоднородного покрытия, механические характеристики которого менялись по толщине цилиндрического слоя по законам

$$\rho = \bar{\rho}f(r), \quad \lambda = \bar{\lambda}, \quad \mu = \bar{\mu},$$

$$f_1(r) = 5 - 4 \left( \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} \right)^2, \quad f_2(r) = 5 - 4 \left( \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)^2.$$

Зависимости  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  выбраны такими, что их графики являются зеркальным отображением друг друга относительно прямой  $r = (r_0 + r_1)/2$ . При этом на внешней поверхности покрытия функция  $f_1(r)$  достигает максимума, а на внутренней поверхности покрытия — минимума. Функция  $f_2(r)$  достигает тех же максимальных и минимальных значений, но уже на внутренней и внешней поверхностях покрытия.

На рис. 2 – 4 представлены диаграммы направленности, рассчитанные для волнового размера цилиндра  $kr_0 = 5$  при разных значениях числа Маха  $M$ .

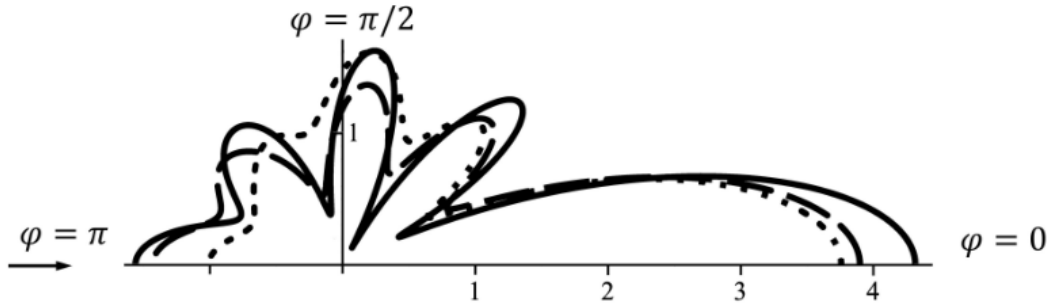


Рис. 2: Диаграммы направленности при  $M = 0$

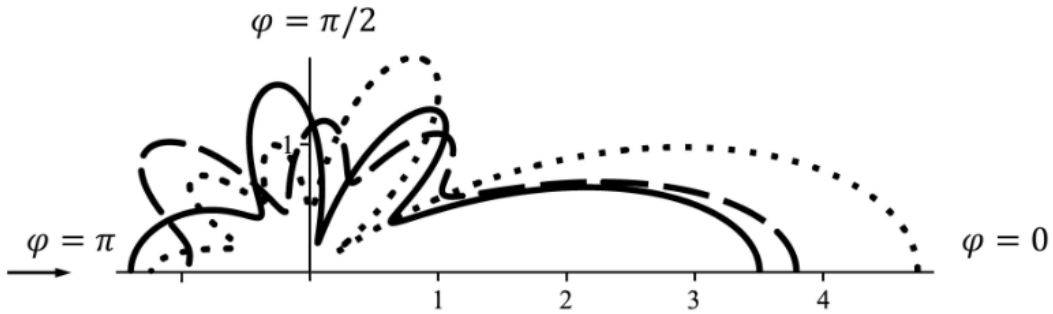
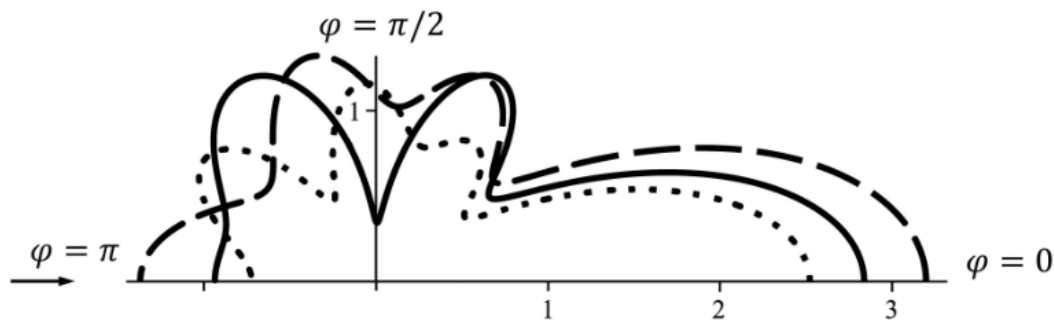


Рис. 3: Диаграммы направленности при  $M = 0.3$

На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния  $|F|/A_0$ , вычисленной для соответствующих значений угла  $\varphi$ . Ввиду симметрии рассеянного акустического поля при нормальном падении плоской волны диаграммы приведены для значений  $\varphi$  из интервала  $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ . На рисунках сплошная линия соответствует однородному покрытию, штриховая — неоднородному покрытию вида  $f_1(r)$ , пунктирная — неоднородному покрытию вида  $f_2(r)$ . Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны.

Расчеты показали, что диаграммы направленности рассеянного поля в дальней зоне существенно изменяются при различных значениях числа  $M$  для разных законов неоднородности упругого покрытия.

Рис. 4: Диаграммы направленности при  $M = 0.6$ 

## 5. Заключение

В настоящей работе получено аналитическое решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны, наклонно падающей на абсолютно жесткий цилиндр с неоднородным упругим покрытием, расположенный в движущейся идеальной жидкости. Исследовано рассеянное акустическое поле в дальней зоне. Проведенные численные расчеты выявили характерные черты влияния различных законов неоднородности материала покрытия и значений числа Маха на дифракционную картину.

С помощью покрытий в виде непрерывно неоднородного упругого слоя можно изменить звукоотражающие свойства цилиндрического тела. Такой слой легко реализовать с помощью системы тонких однородных упругих слоев. Получить требуемые характеристики рассеяния можно, если найти соответствующие зависимости для параметров неоднородного упругого слоя. Для этого следует решить обратную задачу об определении законов неоднородности покрытия, например, используя подход, предложенный в работе [15].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850-857.
2. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
3. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242-250.
4. Толоконников Л. А. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 4. С. 215-226.
5. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. Вып. 1. С. 460-472.
6. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние упругим цилиндром с неоднородным покрытием звуковых волн, излучаемых произвольно расположенным линейным источником // Математическое моделирование. 2024. Т. 36. № 1. С. 71-84.

7. Толоконников Л. А., Ефимов Д. Ю. Рассеяние звуковых волн упругим цилиндром конечной длины с неоднородным покрытием // Математическое моделирование. 2023. Т. 35. № 4. С. 3-23.
8. Лямшев Л. М. Отражение звука цилиндрической оболочкой в движущейся среде // Акуст. журн. 1963. Т. 9. № 3. С. 329—335.
9. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 208 с.
10. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
11. Новацкий В. Теория упругости. Т. 2. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Morse P. M., Ingard K. U. Linear acoustical theory. Berlin — Gottingen — Heidelberg: Handbuch der Physik. Band XI/1. 1961, 128 p.
13. Шендеров Е. Л. Излучение звука в движущуюся среду // Акуст. журн. 1966. Т. 12. № 1. С. 98—104.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
15. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // Прикладная механика и техническая физика. 2017. № 4. С. 189-199.

## REFERENCES

1. Romanov, A. G., Tolokonnikov, L. A. 2011, “The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
2. Tolokonnikov, L. A. 2013, “Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering”, *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274, [in Russian].
3. Larin, N. V., Tolokonnikov, L. A. 2015, “The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering”, *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
4. Tolokonnikov, L. A. 2018, “Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226, [in Russian].
5. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2021, “Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with an radially inhomogeneous coating”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 1, pp. 460-472, [in Russian].
6. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2024, “Scattering by an elastic cylinder with an inhomogeneous coating of sound waves”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 16, no. 3, pp. 373-382.
7. Tolokonnikov, L. A., Efimov, D. Yu. 2023, “Scattering of sound Waves by a finite length elastic cylinder with an inhomogeneous coating”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, vol. 15, no. 5, pp. 863-876.
8. Lyamshev, L. M. 1963, “Reflection of sound by a cylindrical shell in a moving medium”, *Akust. Zhurnal*, vol. 9, no. 3, pp. 329—335, [in Russian].

9. Blohintsev, D.I. 1981, "Acoustics of an inhomogeneous moving medium", *Nauka*, Moscow, 208 p., [in Russian].
10. Shenderov, E.L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", *Sudostroenie, Leningrad*, 352 p., [in Russian].
11. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprzystosci", *Mir, Moscow*, 872 p., [in Russian].
12. Morse P. M., Ingard, K. U. 1961, "Linear acoustical theory", *Handbuch der Physik. Band XI/1, Berlin — Göttingen — Heidelberg*, 128 p.
13. Shenderov, E. L. 1966, "Sound radiation of a piston into a moving medium", *Akust. Zhurnal*, vol. 13, no. 1, pp. 98-104, [in Russian].
14. Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1965, "Handbook of Mathematical Functions", *Dover Publications, Inc, New York*, 1046 p.
15. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 4, pp. 733-742.

Получено: 16.03.2024

Принято в печать: 04.09.2024