ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 1 (2014)

УДК

ПРОБЛЕМА СОПРЯЖЕННОСТИ СЛОВ В ДРЕВЕСНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ СВОБОДНЫХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

В. Н. Безверхний, Е. С. Логачева (г. Тула)

Аннотация

В работе положительно решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с ассоциированными циклическими подгруппами. Представленный результат является обобщением известного результата С.Липшуца для свободного произведения двух свободных групп с циклическим объединением. При решении основной проблемы доказывается разрешимость проблемы пересечения конечно порожденной подгруппы данного класса групп с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю основной группы, а так же проблема пересечения смежного класса конечно порожденной подгруппы с циклической подгруппой, принадлежащей сомножителю.

Ключевые слова: группа, подгруппа, проблема сопряженности, свободное произведение с объединением.

THE PROBLEM OF THE CONJUGATION OF WORDS IN A WOOD PIECE OF FREE GROUPS WITH CYCLIC AMALGAMATION

V. N. Bezverkhniy, E. S. Logacheva (Tula)

Abstract

In the work positively with the problem of the conjugation words in a tree product of free groups associated with cyclic subgroups. This work is a generalization of the well-known results of Lipschutz S. for a free product of two free groups with cyclic amalgamation.When solving the main problem it is proved the solvability of the problem of intersection of finite generated subgroup of this group with a cyclic subgroup of the factor group and the problem of the intersection of the co-set of finite generated by subgroup with a cyclic subgroup of the factor group.

Keywords: group, subgroup, conjugacy problem, amalgamated free product.

1. Введение

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух слов w_1, w_2 из G установить, существует ли элемент $h \in G$ такой, что $h^{-1}w_1h = w_2$.*

Известно [5], что в свободных группах проблема сопряженности слов разрешима.

В 1973 году С. Липшуц [6] установил разрешимость проблемы сопряженности слов в классе групп $F_m *_C F_n$, где F_m и F_n — свободные группы рангов $m, n < \infty$, C — циклическая подгруппа.

Рассмотрим группу G_Γ, которой соответствует конечный связный дерево-граф Γ. i-ой вершине графа Γ соответствует свободная группа F_{n_i} ранга $n_i < \infty$, причем, если вершинам некоторого ребра e графа Γ соответствуют группы $F_{n_i} = \langle a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m} \rangle$ и $F_{n_j} = \langle a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k} \rangle$, то самому ребру соответствуют ассоциированные циклические подгруппы $\langle v_i^{p_i}(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}) \rangle \in F_{n_i}$, $\langle w_j^{q_j}(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k}) \rangle \in F_{n_j}$ и рассматривается равенство образующих этих подгрупп $\langle v_i^{p_i} \rangle = \langle w_j^{q_j} \rangle$.

Копредставление группы G_Γ имеет вид:

$$G_\Gamma = \langle \prod_{i=1}^{n} *F_{n_i} | v_i^{p_i}(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}) = w_j^{q_j}(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_k}), |i_m|, |j_k| \geqslant 1 \rangle.$$

Наша цель обобщить результат С. Липшуца и доказать следующую теорему:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА: *В группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.*

2. Вспомогательные утверждения

Доказательство основной теоремы будем вести по числу сомножителей в группе G_Γ. Базу индукции обеспечивает результат С. Липшуца. Выделим в дереве Γ конечную вершину v_n с соответствующей ей в G_Γ группой F_n, и представим группу G_Γ в виде свободного произведения с объединением:

$$G_\Gamma = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_n,$$

где $C_n : \langle v_{n-1}^{p_{n-1}} \rangle = \langle w_n^{q_n} \rangle$ и группа $G_{\Gamma_{n-1}}$ есть древесное произведение $(n-1)$ свободных групп с циклическими ассоциированными подгруппами. Сделаем предположение, что в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$ основная теорема справедлива.

Известно [5], что каждый элемент свободного произведения $g \in G_\Gamma$ может быть единственным образом представлен в каноническом виде:

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} K_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{1}$$

где r_{ig}, l_{ig}^{-1} — представители правых классов смежности группы $G_{\Gamma_{n-1}}$ и F_n по ассоциированным подгруппам, причем r_{ig}, $r_{i+1,g}$ (l_{ig}, $l_{i+1,g}$) принадлежат разным сомножителям группы G_Γ. Слог K_g называется ядром. Если K_g не принадлежит объединяемой подгруппе C_n, то слоги l_{ng} и r_{ng} принадлежат одному сомножителю группы G_Γ. В таком случае слоговая длина слова (1) равна $L(g) = 2n + 1$. Если $r_{ng} \dots r_{1g} = (l_{1g} \dots l_{ng})^{-1}$, то слово

$$g = r_{1g}^{-1} \dots r_{ng}^{-1} K_g r_{ng} \dots r_{1g} \tag{2}$$

называется трансформой. Если $K_g \in C_n$, то в (1) l_{ng} и r_{ng} принадлежат разным сомножителям группы G_Γ и длина слова

$$g = l_{1g} \dots l_{ng} h_g r_{ng} \dots r_{1g}, \tag{3}$$

где $h_g = K_g$, равная $l(g) = 2n$. Слова вида (1), (3) — нетрансформы, причем слова вида (1) — нетрансформы нечетной длины, слова вида (3) — нетрансформы четной длины. Подслова $l_{1g} \dots l_{ng}$ называются левой половиной слов (1), (3) .

Рассмотрим конечное множество слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ группы G_Γ, каждое из которых приведено к виду (1), (2) или (3).

Определение 2. **[1]** *В множестве $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ левая (правая) половина некоторого слова $w_i = l_{1w_i}...l_{mw_i} K_{w_i} r_{mw_i}...r_{1w_i}$ называется изолированной, если ни у одного из слов w_j^ε ($\varepsilon = \pm 1$) множества $(\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_i) \cup (\{w_i^{-1}\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_i^{-1})$ нельзя выделить $l_{1w_i} \dots l_{mw_i}$ ($r_{mw_i} \dots r_{1w_i}$) в качестве начального (конечного) подслова, то есть $w_j^\varepsilon \neq l_{1w_i} \dots l_{mw_i} l_{m-1,w_j} w_{jn}^\varepsilon$ ($w_j^\varepsilon \neq w_{j1}^\varepsilon r_{m+1,w_j} r_{mw_j} \dots r_{1w_j}$), где $l_{mw_i}, l_{m-1,w_j}(r_{m+1,w_j}, r_{mw_i})$ принадлежат разным сомножителям группы G_Γ.*

Определение 3. **[1]** *Назовем конечное множество $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ слов группы G_Γ специальным, если оно удовлетворяет условиям:*

1) левая половина нетрансформы множества $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ изолирована в нем; если нетрансформа есть слово четной длины, то изолированы и левая, и правая половины;

2) длину нетрансформы w_{i_0}, имеющей четную длину, нельзя уменьшить, умножая слева и справа на слова из подгруппы, порожденной множеством $\{\{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \backslash w_{i_0}\}$; длину произвольного элемента $w_{i_0} \in \{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ нельзя уменьшить, умножая на слово w длины меньше $l(w_{i_0})$ принадлежащее подгруппе $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$;

3) пусть $w_{i_0}^{\varepsilon} = l_{1w_0} \dots l_{nw_0} K_{w_0} r_{nw_0} \dots r_{j+1,w_0} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$, $\varepsilon = \pm 1$, $j < n$ *— нетрансформа из множества* $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ *и*

$$\{w_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = l_{1w_{\alpha_i}} \dots l_{n_i w_{\alpha_i}} K_{\alpha_i} r_{n_i w_{\alpha_i}} \dots r_{j+1,w_{\alpha_i}} r_{jw_0} \dots r_{1w_0}\}_{i=\overline{1,N}},$$

$\varepsilon_i = \pm 1$ *— подмножество нетрансформ из множества*

$$\{w_i\} \backslash w_{i_0}) \cup (\{w_i^{-1}\} \backslash w_{i0}^{-1}),$$

правая половина которых оканчивается подсловом $r_{jw_0} \dots r_{1w_0}$*, тогда, если подгруппа* $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle \cap r_{1w_0}^{-1} \dots r_{jw_0}^{-1} D r_{jw_0} \dots r_{1w_0} = B$*, где* $D \in G_{\Gamma_{n-1}}$*, когда* $r_{j+1,w_0} \in F_n$ *или* $D \in F_n$*, когда* $r_{j+1,w_0} \in G_{\Gamma_{n-1}}$ *и* D *не единична, то* $l(w_{i_0} u) \geqslant l(w_{i_0})$*, где* $u \in B, l(w_{i_0} u w_{\alpha_i}^{-\varepsilon_i}) \geqslant l(w_{i_0})$*;*

4) пусть

$$w_i = l_{1w_i} \dots l_{sw_i} l_{s+1,w_i} \dots l_{nw_i} K_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i}$$

$$w_j = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l_{s+1,w_j} \dots l_{mw_j} K_{w_j} r_{mw_j} \dots r_{s+1,w_j} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$$

— слова из $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$*, не обязательно различные,* $m \leqslant n$*,* $s \leqslant m$*, тогда не существует слова* $g \neq 1$ *длины меньше* $2s$ *из подгруппы* $\langle \{w_i\}_{i=\overline{1,N}} \rangle$ *такого, что если* $l_{1w_i} \dots l_{sw_i} \neq l_{1w_j} \dots l_{sw_j}$*, то*

$$g w_i = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} l'_{s+1,w_i} \dots l'_{nw_i} K'_{w_i} r_{nw_i} \dots r_{s+1,w_i} r_{sw_i} \dots r_{1w_i},$$

либо, если $r_{sw_i} \dots r_{1w_i} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$*, то*

$$w_i g = l_{1w_i} \dots l_{nw_i} K'_{w_i} r'_{nw_i} \dots r'_{s+1,w^i} r_{iw_j} \dots r_{1w_j},$$

либо, если $r_{1w_i}^{-1} \dots r_{sw_i}^{-1} \neq l_{nw_j} \dots l_{sw_j}$*, то*

$$g w_i^{-1} = l_{1w_j} \dots l_{sw_j} (r'_{s+1,w_i})^{-1} \dots (r'_{nw_i})^{-1} (K'_{w_i})^{-1} l_{nw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1},$$

либо, если $l_{sw_i}^{-1} \dots l_{1w_i}^{-1} \neq r_{sw_j} \dots r_{1w_j}$*, то*

$$w_i^{-1} g = r_{1w_i}^{-1} \dots r_{nw_i}^{-1} (K'_{w_i})^{-1} (l'_{nw_i})^{-1} \dots (l'_{s+1,w_i})^{-1} r_{sw_j} \dots r_{1w_j}.$$

Разобьем все слова специального множества слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$ на множества: M_0 — нетрансформы и M_i — трансформы одного типа, содержащиеся в одной подгруппе, сопряженной некоторой подгруппе из $G_{\Gamma_{n-1}}$ или F_n. Каждое из этих подмножеств порождает подгруппу (M_i), $i = 0, 1, \dots, k$. для $i = \overline{1, N}$ подгруппа (M_i) имеет вид

$$(M_i) = r_{1i}^{-1} \dots r_{ni}^{-1} A_i r_{ni} \dots r_{1i},$$

здесь A_i — подгруппы из $G_{\Gamma_{n-1}}$ или F_n, порожденные ядрами трансформ. Подгруппы, порожденные трансформами, упорядочиваем по длинам крыльев их трансформ, получаем ряд:

$$(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant \dots \leqslant (M_k). \qquad (4)$$

Лемма 1. **[1]** *Ряд (4) можно преобразовать в ряд (5)*

$$(M_1') \leqslant (M_2') \leqslant \ldots \leqslant (M_{k'}') \tag{5}$$

со следующими свойствами:

1) $gp((M_0),(M_1),...,(M_k) = gp((M_0),(M_1'),...,(M_{k'}')$;

2) если подгруппе $(M_j') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{nx}^{-1}A_j'r_{nx}\ldots r_{1x}$, $1 \leqslant j' \leqslant k'$, *ряда (5) принадлежит трансформа* $u = r_{1x}^{-1}\ldots r_{nx}^{-1}hr_{nx}\ldots r_{1x}$, *где* h *принадлежит объединяемой подгруппе, то среди подгрупп ряда (5) имеется подгруппа*

$$(M_i') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n-1,x}^{-1}A_i'r_{n-1,x}\ldots r_{1x},$$

содержащая u;

3) если для некоторой трансформы $u = r_{1x}^{-1}\ldots r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}\ldots r_{1x}$, *принадлежащей подгруппе* $(M_j') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{nx}^{-1}A_j'r_{nx}\ldots r_{1x}$, *и нетрансформы из множества* (M_0) $y = l_{1y}\ldots l_{n_1y}K_yr_{n_1y}\ldots r_{1y}$, $n_1 \geqslant n$, *(левая половина* y *изолирована) выполняется соотношение* $l(y^{-1}uy) \leqslant l(y)$, *то существует подгруппа* (M_s') *ряда (4), содержащая трансформу* $y^{-1}(r_{1x}^{-1}\ldots r_{nx}^{-1}K_xr_{nx}\ldots r_{1x})y^{-1}$; *если* $l(yuy^{-1}) < l(y)$, *то существует подгруппа* (M_s'), *содержащая трансформу* yuy^{-1};

4) если $(M_j') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}A_j'r_{n_1x}\ldots r_{1x}$,

$$(M_s') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}\ldots r_{n_2y}^{-1}A_s'r_{n_2y}\ldots r_{1x}$$

— подгруппы ряда (4) $n_2 > n_1$, *и подгруппа* (M_j') *содержит трансформу* $u = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}\ldots r_{1x}$ *либо* $u' = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}\ldots r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует подгруппа ряда (5)*

$$(M_k') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}A_k'r_{n_1+1,y}\ldots r_{1x},$$

содержащая в первом случае трансформу u, *во втором —* u';

5) если $(M_s') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}A_x'r_{n_1,x}\ldots r_{1x}$ *— подгруппа из ряда (5) и* y^ε *— элемент специального множества:* $y^\varepsilon = l_{1y}\ldots l_{n_2y}Kr_{n_2y}\ldots r_{n_1+1,y}r_{n_1x}\ldots r_{1x}$, $\varepsilon = \pm1$, *причем подслово* $r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}$ *не является изолированной левой половиной некоторой нетрансформы* $w^\varepsilon(\varepsilon = \pm1)$ *и если подгруппа* (M_s') *содержит трансформу* $r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}hr_{n_1x}\ldots r_{1x}$ *либо трансформу* $r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}Kr_{n_1x}\ldots r_{1x}$, *где* $K = r_{n_1+1,y}^{-1}hr_{n_1+1,y}$, *то существует в ряде (4) подгруппа*

$$(M_j') = r_{1x}^{-1}\ldots r_{n_1x}^{-1}r_{n_1+1,y}^{-1}A_jr_{n_1+1,y}\ldots r_{1x},$$

содержащая эту трансформу.

Лемма 2. **[1]** *Подгруппа* M_0, *порожденная нетрансформами специального множества, свободна и не содержит трансформ.*

Подгруппу, порожденную специальным множеством $\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}$, будем обозначать $gp(M_0,S)$. Она представляет собой HNN — группу с основой S, являющуюся древесным произведением подгрупп ряда (5), правильной системой проходных букв которой служат элементы из M_0. Подгруппы M_0 и M_j, $j=\overline{1,k}$, из ряда (4) будем называть порождающими подгруппами подгруппы $\langle w_1,\dots w_N\rangle = gp(M_0,S)$.

Лемма 3. **[1]** *Пусть* $(M_j)=l_{1j}^{-1}...l_{kj}^{-1}A_jl_{kj}...l_{1j}$ *подгруппа из* $gp(M_0,S)$, *где* S *порождена подгруппами ряда (5), и* $v_j^{-1}=l_{1j}^{-1}...l_{kj}^{-1}$. *Тогда* $v_j^{-1}G_\Gamma v_j\cap gp(M_0,S)=(M_j)$.

Определение 4. **[1]** *Произведение* $u_1\dots u_k$ *назовем словом подгруппы* $\langle w_1,\dots,w_N\rangle = gp(M_0,S)$ *группы* G_Γ, *если:*

1) $u_i\neq 1$;

2) $u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}$, *либо* u_i *принадлежат некоторой подгруппе из ряда (4);*

3) $u_i\neq u_{i+1}^{-1}$;

4) u_i,u_{i+1} *не содержатся в одной подгруппе ряда (4);*

5) в $u_1...u_k$ *нет произведения* $u_iu_{i+1}u_{i+2}(i=\overline{1,k-2})$, *где* $u_i=u_{i+2}^{-1}$, $u_i\in\{M_0\cup M_0^{-1}\}$, $u_{i+1}\in(M_j)$ *и* $u_iu_{i+1}u_{i+2}\in(M_s)$, (M_j), (M_s) *— из ряда (4).*

Лемма 4. **[1]** *Всякое произведение* $w_{i_1}^{\varepsilon_1}...w_{i_m}^{\varepsilon_m}$, $\varepsilon_j=\pm1$, *где* w_{i_j} *— образующие подгруппы* $\langle\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}\rangle$, *через конечное число шагов можно привести к слову* $u_{i_1}...u_{i_k}$, $k\leqslant m$, *подгруппы* $gp(M_0,S)=\langle\{w_i\}_{i=\overline{1,N}}\rangle$ *и слоговая длина* $u_{i_1}...u_{i_k}$ *не меньше слоговой длины максимального из* u_i*-символов данного слова.*

Теорема 1. **[2]** *Пусть группа*

$$G=\langle\prod_{s=1}^{n}*G_s;retG_1,...,retG_s,\varphi_{ji}(U_{ij})=U_{ji}\rangle$$

— древесное произведение групп G_s, $1\leqslant s\leqslant n$, *объединенных по изоморфным подгруппам* $U_{ij}<G_i$, $U_{ji}<G_j$ *с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов* $\{\varphi_{ij}\},\varphi_{ji}(U_{ij})=U_{ji}$. *Тогда, если подгруппы* U_{ij}, U_{ji}, $i\in I_1$, $j\in I_2$, *обладают условием максимальности и в сомножителях* G_s, $1\leqslant s\leqslant n$ *разрешимы:*

1) проблема вхождения;

2) проблема пересечения класса смежности любой конечно порожденной подгруппы $H<G_s$ *с подгруппой* $U\gamma$, $\gamma=\pm1$;

3) существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H<G_s$ *с подгруппой* $U\gamma$, $\gamma=\pm1$;

то в группе G *разрешима проблема вхождения и существует алгоритм, преобразующий любое конечное множество слов группы* G *в специальное, порождающее подгруппу, совпадающую с подгруппой, порожденной исходным множеством.*

Лемма 5. *В группе G_Γ существуют следующие алгоритмы:*

I) алгоритм, позволяющий для любой конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ и $\langle w\rangle \in F_i$, $i = \overline{1,n}$, найти образующие $H \cap \langle w\rangle$;

II) алгоритм, позволяющий для любого слова $v \in G_\Gamma$ и конечно порожденной подгруппы $H < G_\Gamma$ выяснить пусто или непусто пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, где$\langle w\rangle \in F_i$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции.

Известно [4], что в свободной группе существует алгоритм, выписывающий пересечение двух конечно-порожденных подгрупп. Докажем базу индукции для существования алгоритма I) в группе $G = F_m *_C F_n$, где F_m, F_n — свободные группы конечного ранга, C — циклическая группа. Пусть $H < G$, причем H — конечно-порожденная подгруппа. Пусть слово $w \in F_m$, $w \neq 1$ и докажем, что существует алгоритм, выписывающий образующие $H \cap \langle w\rangle$.

Приводим образующие подгруппы H к виду: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (5). Выясняем, существует ли в множестве подгрупп ряда (5): $(M_1) \leqslant (M_2) \leqslant ... \leqslant (M_k)$, подгруппа, содержащаяся в F_m. Допустим $(M_1) < F_m$, подгруппа (M_1) находится в начале ряда (5) и состоит из трансформ с крыльями равными 1. Тогда, в силу леммы 4, определяем пересечение $(M_1) \cap \langle w\rangle = H \cap \langle w\rangle$.

В [2] указан алгоритм, позволяющий установить пусто ли пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, где H и $\langle w\rangle$ подгруппы некоторой свободной группы. Докажем базу индукции: существование алгоритма II) в группе $G = F_m *_C F_n$. Пусть $H < G$ и $v \in G$ — произвольное слово, причем $v \notin H$; найдем пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, где $\langle w\rangle \in F_m$. Рассмотрим слово $u \in H$, $u = u_1u_2...u_n$. В произведении vu будут проходить сокращения в следующих случаях:

а) если u_1 — трансформа, то выделим в слове v справа подслово v_Π максимальной длины: $v = v_\Lambda v_\Pi = v'_\Lambda K_0 v_\Pi$, в котором v_Π совпадает с крыльями одной из подгрупп ряда (5): $(M_i) = (v_\Pi^{-1} A_i v_\Pi)$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi$, что произведение K_0K_1 принадлежит объединяемой подгруппе C. Так как $K_1 \in (A_i)$, то $K_0\langle A_i\rangle \in C$.

Случай сводится к пересечению $K_0\langle A_i\rangle \cap C$

б) если u_1 — нетрансформа с неизолированной левой половиной: $u_1 = = v_\Pi^{-1} K_2 v'$, v_Π^{-1} является крылом одной из трансформ ряда (5): $(M_i) = (v_\Pi^{-1} A_i v_\Pi)$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_i) такая $v_\Pi^{-1} K_1 v_\Pi$, что произведение $K_0K_1K_2 \in C$.

Случай сводится к пересечению $K_0K_2(K_2^{-1}\langle A_i\rangle K_2) \cap C$.

в) если u_1 — нетрансформа с изолированной левой половиной: $u_1 = v_\Pi^{-1} K v'$, v_Π^{-1} изолирована и среди подгрупп ряда (5) содержится подгруппа $(M_j) = (v'^{-1} A_j v')$, а так же среди нетрансформ содержится $u_2 = v'^{-1} K_2 v''$. Выясняем: существует ли среди трансформ подгруппы (M_j) такая $v'^{-1} K_1 v'$, что произведения K_0KK_1 или $K_0KK_1K_2$ принадлежат объединяемой подгруппе C.

Случай сводится к пересечению $K_0K\langle A_i\rangle \cap C$ или $K_0KK_2(K_2^{-1}\langle A_i\rangle K_2) \cap C$.

Через конечное число шагов построим приведенное слово vu.

В том случае, если $l(vu) > 1$, то пересечение $vH \cap \langle w\rangle$ пусто. Если $l(vu) = 1$, выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1}A_ig_i$ ряда (5) подгруппа состоящая только из ядра $(M_{s_1}) = A_{s1}$ и рассматриваем пересечение $vu(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle$. Возможно, что подгруппа $\langle w\rangle$ принадлежит объединяемой подгруппе. В таком случае, при $vu(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle = E$, аналогичные рассуждения нужно провести для $\langle w\rangle \in F_n$.

Имея базу индукции, предполагаем, что утверждение леммы справедливо для группы G_Γ, имеющей меньше n сомножителей и докажем для n сомножителей.

Выделим в дереве Γ группы G_Γ произвольную вершину v_i, которая разбивает граф на два подграфа Γ_i и Γ_j, имеющих общую вершину v_i. Сделаем так, что группа $F_i \in G_{\Gamma_i}$. Ребро e_i связывает графы Γ_i и Γ_j, где v_i и v_j — вершины ребра e_i. Тогда вершине v_j соответствует свободная группа F_j, группы F_i и F_j объединены по циклической подгруппе C_{ij}.

Пусть H — конечно-порожденная подгруппа, такая что $H < G_\Gamma = G_{\Gamma_i} *_{C_{ij}} G_{\Gamma_j}$. Для подгрупп G_{Γ_i} и G_{Γ_j} выполняются все условия теоремы 1, а следовательно образующие подгруппы H можно привести к виду $H = gp(M_0, S)$, где S порождена подгруппами ряда $M_1 \leqslant M_2 \leqslant ... \leqslant M_k$. Выберем слово $w \in G_{\Gamma_i}$, $w \neq 1$, $w \in F_i$ и рассмотрим существование алгоритма, выписывающего пересечение $H \cap \langle w\rangle$. Образующие подгруппы H приводим к специальным образующим: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (5). Выясняем существует ли в S подгруппа (M_{s_1}), состоящая из трансформ длины 1, которая содержится в G_{Γ_i}. Используя индуктивное предположение, определяем пересечение $(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle$. Таким образом $(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle = H \cap \langle w\rangle$, $k > 1$.

Для доказательства второго алгоритма, как и в предыдущем случае выбираем внутреннюю вершину v_i графа Γ, которая разбивает его на два подграфа Γ_i и Γ_j, соответствующие древесным произведениям с циклическими объединениями G_{Γ_i} и G_{Γ_j} соответственно. Тогда G_Γ примет следующий вид: $G_\Gamma = G_{\Gamma_i} *_{C_{ij}} G_{\Gamma_j}$. Так как для групп G_{Γ_i} и G_{Γ_j} утверждение леммы справедливо, то их образующие можно переписать в виде специального множества.

Пусть подгруппа $H < G_\Gamma$ и слово $v \in G_\Gamma$, причем $v \notin H$. Найдем пересечение $vH \cap \langle w\rangle$, $\langle w\rangle \in F_i$, где свободная группа F_i соответствует вершине v_i графа Γ. Перепишем образующие подгруппы H в виде специального множества: $H = gp(M_0, S)$, где множество S порождено подгруппами ряда (5).

Возьмем произвольное слово $u \in H$, перепишем его в специальных образующих $u = u_1u_2...u_n$, выясним, в каких случаях в произведении vu будут проходить сокращения: а)-в), как в случае группы $G = F_m *_C F_n$.

В результате через конечное число шагов построим слово vu. Если $l(vw) = 1$, выясняем существует ли среди подгрупп $(M_i) = g_i^{-1}A_ig_i$ ряда (5) подгруппа $(M_{s_1}) = A_{s1}$ и рассматриваем $vu(M_{s_1}) \cap \langle w\rangle$.

Проблемы I) и II) решены, если $\langle w\rangle \notin C_{ij} : \langle v_i^{p_i}\rangle = \langle w_j^{q_j}\rangle$, если же $\langle w\rangle \in C_{ij}$, то подобные рассуждения нужно провести для $w \in G_{\Gamma_j}$.

Лемма доказана.

Утверждение 1. *Пусть $w_1 \in G_{\Gamma_{n-1}}, w_2 \in G_{\Gamma_{n-1}}$, причем w_1 и w_2 одновременно не сопряжены объединяемой подгруппе C_n. Слова w_1 и w_2 сопряжены в группе G_Γ тогда и только тогда, когда они сопряжены в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$.*

Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы, несколько слов уделим проблеме сопряженности слов в группе $F_m *_C F_n$, так как некоторые соображения будем использовать в доказательстве общего случая. Кроме того, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. **[5]** *Пусть $u = g_1g_2...g_n$ и $v = g'_1g'_2...g'_n$ — два циклически приведенных элемента свободного произведения с объединением $P = \langle G*H; A = B, \varphi\rangle$. Слова u и v сопряжены в группе P тогда и только тогда, когда одно из другого получается циклической перестановкой и сопряжением элементом из объединяемой подгруппы.*

Теорема 3. **[6]** *В группе $G = \langle F_m *_C F_n | a_1a_2...a_m, b_1b_2...b_n, v^p(a_\eta) = w^q(b_\mu)\rangle$, где $v \in F_m$, $w \in F_n$, разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2 \in G$ — циклически несократимые слова, представленные в нормальной форме: $u_1 = g_1g_2...g_k$, то есть каждый g_i отличен от 1, не принадлежит объединению, g_i и g_{i+1} принадлежат разным сомножителям в группе G. $u'_2 = g'_1g'_2...g'_k$ — некоторая циклическая перестановка u_2, такая что g_1 и g'_1 принадлежат одному сомножителю в группе G, допустим сомножителю F_m.

Если все g_i являются степенями v и w, то рассматриваем равенство $u_1 = u_2$. Пусть g_1 и g'_1 не являются степенями v и w. По теореме 2, существует такое $h \in G$, что $hu_1h^{-1} = u'_2$. Имеем $hg_1g_2...g_kh^{-1} = g'_1g'_2...g'_k \Rightarrow hg_1 = g'_1h'$, где $h, h' \in C$. Домножим на g_1^{-1} слева:

$$g_1^{-1}hg_1 = g_1^{-1}g'_1h'. \tag{6}$$

Задача сводится к разрешимой проблеме — пересечение смежного класса конечно-порожденной подгруппы с некоторой конечно-порожденной подгруппой: $g_1^{-1}Cg_1 \cap g_1^{-1}g'_1C$.

Покажем, что h единственно. Допустим противное, т.е. существуют $\tilde{h}$ и $\tilde{h}'$, такие что

$$g_1^{-1}\tilde{h}g_1 = g_1^{-1}g'_1\tilde{h}_1. \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем: $g_1^{-1}\tilde{h}^{-1}hg_1 = \tilde{h}_1^{-1}h'$. Обозначим $\tilde{h}^{-1}h = h_0 \in C$, $h_0 = v^{pr_1}$ и $\tilde{h}_1^{-1}h' = h'_0 \in C$, $h'_0 = v^{pr_2}$. Получили соотношение $g_1^{-1}h_0g_1 = h'_0$, где h_0 и h'_0 являются степенями v^p. Рассмотрим подгруппу свободной группы F_m: $\langle g_1, v^p | g_1^{-1}v^{pr_1}g_1 = v^{pr_2}\rangle$. Известно [5], что подгруппа свободной группы свободна, следовательно g_1, v являются степенями одного элемента. Получили противоречие предположению, что g_1 не является степенью v и w. Тем самым теорема доказана.

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема 4. *В группе G_Γ разрешима проблема сопряженности слов.*

Доказательство. Как отмечалось ранее доказательство будем проводить по индукции. Предположим, что теорема справедлива для древесного произведения свободных конечно-порожденных групп с циклическим объединением для числа сомножителей меньше n, т.е. в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$. Докажем справедливость теоремы в группе $G_\Gamma = G_{\Gamma_{n-1}} *_{C_n} F_n$, где $C_n : \langle v_{n-1}^{p_{n-1}} \rangle = \langle w_n^{q_n} \rangle$.

Пусть $u_1, u_2 \in G_\Gamma$. $u_1 = g_1 g_2 ... g_{2k}$, $u_2' = g_1' g_2' ... g_{2k}'$ — нормальная форма элементов u_1, u_2 в группе G_Γ, причем u_1, u_2' — циклически несократимые элементы. u_2' некоторая циклическая перестановка u_2, такая что $g_1, g_1' \in G_{\Gamma_{n-1}}$. Тогда $g_{2i} \in F_n$, $g_{2i-1} \in G_{\Gamma_{n-1}}$, $i = \overline{1, 2k}$.

По теореме 2 существует $h \in C_n$, такой что $h u_1 h^{-1} = u_2'$. Отсюда $u_1^{-1} h u_1 = u_1^{-1} u_2' h$, и разрешимость данного равенства сводится к проблеме пересечения $u_1^{-1} C_n u_1 \cap u_1^{-1} u_2' C_n$. По лемме 5 можно найти h_1, h_2:

$$u_1^{-1} h_1 u_1 = u_1^{-1} u_2' h_2. \tag{8}$$

Если существует i: $g_{2i} \notin \langle w_n \rangle$ и $g_{2i} \notin \langle v_{n-1} \rangle$, то можно показать что h_1, h_2 единственные. Для определенности будем полагать, что таким свойством обладает g_2. Предположим, что существуют $\tilde{h_1}, \tilde{h_2}$, такие что

$$u_1^{-1} \tilde{h_1} u_1 = u_1^{-1} u_2' \tilde{h_2}. \tag{9}$$

Из (8), (9) получаем

$$u_1^{-1} \tilde{h_1}^{-1} h_1 u_1 = \tilde{h_2}^{-1} h_2, \tag{10}$$

где $\tilde{h_1}^{-1} h_1 \neq e$ в G_Γ. Из (10) имеем

$$g_{2k}^{-1} g_{2k-1}^{-1} ... g_2^{-1} g_1^{-1} (\tilde{h_1}^{-1} h_1) g_1 g_2 ... g_{2k-1} g_{2k} = \tilde{h_2}^{-1} h_2. \tag{11}$$

Если $g_1^{-1}(\tilde{h_1}^{-1} h_1) g_1 \notin C_n$, тогда сокращений нет и $\tilde{h_1} = h_1$. В противном случае $g_1^{-1}(\tilde{h_1}^{-1} h_1) g_1 \in C_n$, обозначим $g_1^{-1}(\tilde{h_1}^{-1} h_1) g_1 = h_0$, $h_0 \neq e$. тогда из (11)$g_2^{-1} h_0 g_2 \in C_n$, $g_2^{-1} h_0 g_2 = h_0'$, следовательно g_2 есть степень w_n либо v_{n-1}. Полагаем, что все g_{2i} являются степенями w_n либо v_{n-1}.

Из того, что

$$g_1 g_2 ... g_{2k} \sim {g'}_1 {g'}_2 ... {g'}_{2k}$$

(знак $\sim$ обозначает сопряженность элементов в группе) с помощью элемента $h \in C_n$ в группе G_Γ следует, что

$$g_1 g_2 ... g_{2k-1} \sim {g'}_1 {g'}_2 ... {g'}_{2k-1}$$

в G_Γ. Следовательно

$$(g_{2k-1} g_1) g_2 ... g_{2k-2} \sim g_1'' g_2'' ... g_{2k-2}'',$$

$$(g_{2k-1}g_1)g_2...g_{2k-3} \sim g_1''g_2''...g_{2k-3}'',$$

где $g_1'' = g_{2k-1}'g_1'$ в группе G_Γ,

$$(g_{2k-3}g_{2k-1}g_1)g_2...g_{2k-4} \sim (g_{2k-3}''g_1'')g_2''...g_{2k-4}''$$

и т.д.

Через конечное число шагов получим:

$$g_3g_5...g_{2k-1}g_1 \sim g_{i_1}'g_{i_2}'...g_{i_{2k-1}}',$$

где

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 2k-1 \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2k-1} \end{pmatrix}$$

Но слова $g_3g_5...g_{2k-1}g_1$ и $g_{i1}'g_{i2}'...g_{i_{2k-1}}'$ принадлежат группе $G_{\Gamma_{n-1}}$. И из разрешимости проблемы сопряженности слов в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$, следует разрешимость в группе G_Γ.

Докажем обратное утверждение. Имеем $u_1 = g_1g_2...g_{2k}$, $u_2' = g_1'g_2'...g_{2k}'$, где g_{2i} являются степенями w_n либо v_{n-1}. Допустим, что $g_3g_5...g_{2k-1}g_1 \sim g_{i1}'g_{i2}'...g_{i2k-1}'$ в группе $G_{\Gamma_{n-1}}$. Но $u_1 \not\sim u_2'$ в G_Γ. Проводя аналогичные рассуждения, получаем $(g_{2k-1}g_1)g_2...g_{2k-2} \not\sim g_1''g_2''...g_{2k-2}''$ и т.д. Через конечное число шагов имеем $g_3g_5...g_{2k-1}g_1 \not\sim g_{i1}'g_{i2}'...g_{i2k-1}'$, что противоречит предположению. Таким образом проблема сопряженности слов доказана в группе G_Γ.

Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп в одном классе HNN-групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп и их приложение: межвуз. сб. Тула: ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1983. С. 50—80.

2. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения для одного класса групп // Вопросы теории групп и полугрупп: межвуз. сб. Тула: ТГПИ им. Л. Н. Толстого, 1972. С. 3—86.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы сопряженности подгрупп для одного класса групп. I–II // Современная алгебра: межвузовский сборник. Л., 1977. Вып. 6. С. 16—32.

4. Безверхний В. Н. О пересечении конечно-порожденных подгрупп свободной группы // Сборник научных трудов кафедры высшей математики. Тула: Тульский политехнический институт, 1974. Вып. 2. С. 51—56.

5. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная терия групп. М.: Мир, 1980.

6. Lipshutz S. The congugacy problem and cyclic amalgamations // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. P. 114—116.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 22.05.2013