

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 25. Выпуск 3.

УДК 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-381-395

**Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с  
непрерывно-неоднородным покрытием**

Н. В. Ларин, А. Э. Белкин

**Ларин Николай Владимирович** — доктор физико-математических наук, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: larinaelen@mail.ru*

**Белкин Антон Эдуардович** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: antonedurd2020@mail.ru*

**Аннотация**

Рассматривается падение плоской нестационарной звуковой волны на находящийся в идеальной жидкости однородный упругий цилиндр с покрытием в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости. Полагается, что фронт падающей волны параллелен оси вращения цилиндра. Отыскивается поле давления в рассеянной телом звуковой волне.

Построена математическая модель рассматриваемого дифракционного процесса, основанная на линеаризованной модели гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости и модели линейной теории упругости. Акустическое давление в жидкости, равное сумме давлений в падающем и рассеянном полях, является решением волнового уравнения. Распространение упругих волн в однородном цилиндре описывается двумя волновыми уравнениями относительно скалярного и векторного потенциалов упругих смещений. При этом в силу постановки задачи векторное уравнение приводится к скалярному уравнению. Волновой процесс в неоднородном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды и законом Гука. Помимо указанных выше уравнений модель включает: нулевые начальные условия, условия свободного проскальзывания на внешней поверхности покрытия, условия жесткого сцепления на внутренней поверхности покрытия, условие затухания на бесконечности для рассеянного акустического поля и условие ограниченности для волновых полей в теле.

К уравнениям построенной модели применяется интегральное преобразование Лапласа по времени и метод разделения переменных по радиальной и угловой координатам. В пространстве изображений искомые давление и потенциалы представляются в виде разложений в ряды по модифицированным цилиндрическим функциям Бесселя с учетом условий излучения и ограниченности. Изображения компонент вектора смещения, нормального и касательного напряжений в покрытии ищутся в виде рядов Фурье с неизвестными, зависящими от радиальной координаты коэффициентами. Для их определения построена краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Краевая задача сведена к задачам с начальными условиями. Переход в пространство оригиналов осуществлен численно. Представлены результаты расчетов давления в рассеянном телом акустическом поле.

**Ключевые слова:** акустический импульс, цилиндр с покрытием, неоднородный упругий цилиндрический слой, нестационарная задача дифракции.

**Библиография:** 22 названия.

**Для цитирования:**

Ларин, Н. В., Белкин, А. Э. Нестационарное рассеяние звука упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 381–395.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 25. No. 3.

UDC 51-72

DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-381-395

**Unsteady sound scattering by an elastic cylinder with a continuously non-uniform coating**

N. V. Larin, A. E. Belkin

**Larin Nikolai Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University (Tula).

*e-mail: larinaelen@mail.ru*

**Belkin Anton Eduardovich** — postgraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: antonedurd2020@mail.ru*

**Abstract**

Incidence of a plane non-stationary sound wave on a homogeneous elastic cylinder in ideal liquid with a coating in the form of an elastic cylindrical layer with a density and elastic moduli continuously changing in thickness is considered. It is assumed that the front of the incident wave is parallel to the axis of rotation of the cylinder. The pressure field in the sound wave scattered by the body is found.

Mathematical model of the diffraction process under consideration is constructed, based on the linearized model of hydrodynamics of an ideal compressible fluid and a model of the linear theory of elasticity. The acoustic pressure in the fluid, equal to the sum of the pressures in the incident and scattered fields, is a solution to the wave equation. The propagation of elastic waves in a homogeneous cylinder is described by two wave equations with respect to the scalar and vector potentials of elastic displacements. In this case, due to the formulation of the problem, the vector equation is reduced to a scalar equation. The wave process in an inhomogeneous elastic coating is described by the general equations of motion of a continuous medium and Hooke's law. In addition to the above equations, the model includes: zero initial conditions, free slip conditions on the outer surface of the coating, rigid adhesion conditions on the inner surface of the coating, attenuation at infinity condition for the scattered acoustic field, and a boundedness condition for wave fields in the body.

Integral Laplace transform with respect to time and the method of separating variables by radial and angular coordinates are applied to the equations of the constructed model. In the image space, the sought pressure and potentials are represented as expansions in series in modified cylindrical Bessel functions taking into account the radiation and boundedness conditions. Images of the components of the displacement vector, normal and tangential stresses in the coating are sought in the form of Fourier series with unknown coefficients depending on the radial coordinate. To determine them, a boundary value problem is constructed for a system of linear ordinary differential equations of the first order. The boundary value problem is reduced to problems with initial conditions. The transition to the space of originals is carried out numerically. The results of pressure calculations in the acoustic field scattered by the body are presented.

**Keywords:** acoustic pulse, coated cylinder, inhomogeneous elastic cylindrical layer, non-stationary diffraction problem.

**Bibliography:** 22 titles.

**For citation:**

Larin, N. V., Belkin A. E. 2024, "Unsteady sound scattering by an elastic cylinder with a continuously non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 381–395.

## 1. Введение

Проблеме математического моделирования покрытий для изменения звукоотражающих свойств твердых тел в задачах дифракции гармонических звуковых волн посвящен ряд работ. Для тел имеющих форму бесконечно длинного кругового цилиндра, находящегося в заполненном акустической средой безграничном пространстве, эта проблема обсуждалась, например, в работах [1–5]. В [1] рассматривалось перфорированное покрытие в виде набора резонаторов Гельмгольца, распределенных по окружности абсолютно твердой цилиндрической оболочки, в [2] – покрытие с протяженной реакцией, в [3] – покрытие в виде однородной упругой цилиндрической оболочки, нанесенное на аналогичную оболочку большей толщины. В [4] для изменения звукоотражающих свойств абсолютно твердого цилиндра предложено неоднородное покрытие в виде упругого цилиндрического слоя с непрерывно изменяющимися по толщине плотностью и модулями упругости. При этом покрытие считается тонким по сравнению с радиусом цилиндра. В [5] такое покрытие применяется для минимизации акустического поля, рассеянного упругим цилиндром.

В реальных условиях длительность воздействия на тело падающей звуковой волны конечна и характеристики рассеяния звука телом под воздействием акустического импульса имеют свои существенные отличия от соответствующих характеристик рассеяния гармонической волны. Поэтому изучение нестационарного взаимодействия звуковых волн с телами является важным. В данной работе предложенное в [4, 5] непрерывно-неоднородное покрытие рассматривается применительно к упругому цилиндру при падении на него плоского акустического импульса. Краткое решение этой нестационарной дифракционной задачи при использовании интегрального преобразования Фурье по времени содержится в [6].

Отметим, что в нестационарных задачах дифракции звука в качестве непрерывно-неоднородных упругих рассеивателей цилиндрической формы рассматривались трансверсально-изотропный цилиндрический слой с жидкостью в полости [7] и сплошной упругий цилиндр [8]. В [9] рассмотрена дифракция плоских нестационарных упругих волн на непрерывно-неоднородном по толщине трансверсально-изотропном упругом цилиндрическом слое с однородным упругим наполнителем.

Актуальности исследований звукоотражающих свойств непрерывно-неоднородных тел способствуют развитие и внедрение в производство аддитивных технологий, позволяющих создавать функционально-градиентные материалы с непрерывно изменяющимися в объеме изделия свойствами. Непрерывно-неоднородное по толщине покрытие также может быть реализовано системой слоев из однородных материалов. Численная реализация этой возможности показана в стационарных задачах распространения [10] и дифракции [11, 12] волн. Такой подход применялся и в нестационарных динамических задачах для исследования волновых процессов в непрерывно-неоднородных телах [13–15].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный упругий бесконечно длинный цилиндр радиусом  $r_0$ , имеющий покрытие в виде коаксиального неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом  $r_1$  (рис. 1). Материал цилиндра имеет плотность  $\rho_0$  и упругие постоянные Ламе  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$ . Плотность материала покрытия  $\rho = \rho(r)$  и его модули упругости  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $\mu = \mu(r)$  являются непрерывными функциями координаты  $r$  цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ , ось  $z$  которой совпадает с осью вращения цилиндра. Окружающая тело жидкость – идеальная, ее равновесная плотность  $\rho_f$ , скорость звука  $c$ .

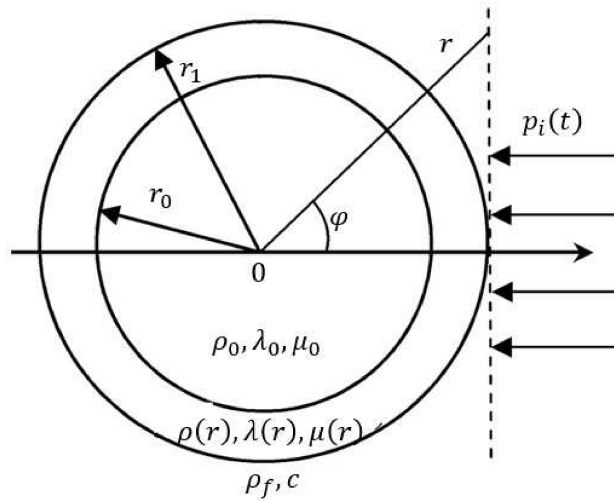


Рис. 1: Геометрия задачи

Пусть плоская нестационарная звуковая волна давления вида

$$p_i = A_i f(ct + r \cos \varphi - r_1) [H(ct + r \cos \varphi - r_1) - H(c(t - T) + r \cos \varphi - r_1)], \quad (1)$$

фронт которой параллелен оси цилиндра, в момент времени  $t = 0$  касается поверхности покрытия  $r = r_1$  в направлении  $\varphi = 0$ . Здесь  $A_i$  – постоянная, имеющая размерность давления;  $f(x)$  – заданная плотность сигнала;  $H(x)$  – единичная функция Хевисайда;  $T$  – продолжительность воздействия волны.

Определим давление в рассеянной телом звуковой волне.

### 3. Математическая модель

В силу постановки задачи рассеянное телом и возбужденные в нем волновые поля не зависят от координаты  $z$ .

Акустическое давление в окружающей тело жидкости описывается волновым уравнением [16]

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $p = p_i + p_s$ ;  $p_s$  – давление в рассеянной волне. При этом скорость частиц жидкости  $\mathbf{v}$  связана с акустическим давлением соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad} p.$$

Распространение волн в однородном упругом цилиндре описывается волновыми уравнениями [17]

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c_\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\Psi$  и  $\Phi$  – потенциалы смещения продольных и поперечных упругих волн соответственно;  $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$  и  $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$  – скорости распространения этих волн. В силу постановки

задачи единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала  $\Phi$  будет составляющая по оси  $z$ , т.е.  $\Phi = \Phi \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор оси  $z$ . Тогда векторное уравнение (3) сводится к скалярному уравнению

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c_\tau^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

При этом вектор смещения частиц в однородном упругом цилиндре определяется из выражения

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad} \Psi + \text{rot} \Phi.$$

Распространение малых возмущений в неоднородном упругом покрытии описывается общими уравнениями движения сплошной среды. В цилиндрической системе координат эти уравнения имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где радиальная  $u_r$  и угловая  $u_\varphi$  компоненты вектора смещения  $\mathbf{u}$  связаны с компонентами тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  в покрытии законом Гука [18]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda + 2\mu}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \right) + \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Волновые поля должны удовлетворять начальным и граничным условиям, условию затухания на бесконечности и условию ограниченности.

Начальные условия (при  $t = 0$ ) имеют вид [19, 20]

$$p_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} = 0, \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

На внешней поверхности покрытия (при  $r = r_1$ ) выполняются граничные условия [19, 20]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \frac{\partial v_r}{\partial t}, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (8)$$

( $v_r$  – радиальная компонента вектора скорости частиц жидкости  $\mathbf{v}$ ), а на внутренней поверхности покрытия (при  $r = r_0$ ) – граничные условия [5]

$$u_r = u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0. \quad (9)$$

Соотношения между компонентами тензора напряжений  $\sigma_{rr}^0$ ,  $\sigma_{r\varphi}^0$  и компонентами вектора смещения  $u_r^0$ ,  $u_\varphi^0$  в однородном упругом цилиндре записываются в виде (6), где функции  $\lambda$ ,  $\mu$  следует заменить постоянными  $\lambda_0$ ,  $\mu_0$  соответственно. Из этих соотношений, используя запись компонент вектора смещения  $\mathbf{u}^0$  через функции  $\Psi$  и  $\Phi$

$$u_r^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi^0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^0 &= \frac{\lambda_0}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2\mu_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + 2\mu_0 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_{r\varphi}^0 &= \frac{2\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\Psi}{r} \right) - \mu_0 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned}$$

Условие затухания на бесконечности (при  $r \rightarrow \infty$ ) имеет вид [19, 20]

$$p_s \rightarrow 0.$$

Условие ограниченности привлекается при отыскании волновых полей в цилиндре с покрытием. Оно требует ограниченности решений дифференциальных уравнений (3)-(5) в занимаемой телом области.

#### 4. Решение задачи с применением интегрального преобразования Лапласа

Безразмерные величины со звездочками, которые далее при решении задачи опускаем, введем по формулам

$$\xi_1^* = \frac{\xi_1}{r_1}, \quad \xi_1 = \{r, u_r^0, u_\varphi^0, u_r, u_\varphi\},$$

$$t^* = \frac{c}{r_1} t, \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{r_1^2}, \quad \Phi^* = \frac{\Phi}{r_1^2}, \quad \rho_0^* = \frac{\rho_0}{\rho_f}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_f},$$

$$\xi_2^* = \frac{\xi_2}{\rho_f c^2}, \quad \xi_2 = \{A_i, p_i, p_s, \lambda_0, \mu_0, \lambda, \mu, \sigma_{rr}^0, \sigma_{r\varphi}^0, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}\}.$$

Перепишем выражение (1) для падающего акустического импульса в безразмерном виде

$$p_i = A_i f(t + r \cos \varphi - 1) [H(t + r \cos \varphi - 1) - H((t - T) + r \cos \varphi - 1)].$$

Применим для решения задачи интегральное преобразование Лапласа [20, 21]:

$$X^L(r, \varphi; s) = \int_0^\infty X(r, \varphi, t) e^{-st} dt, \quad X(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} X^L(r, \varphi; s) e^{st} ds, \quad w > 0,$$

где  $s$  – параметр преобразования;  $X^L(r, \varphi; s)$  – изображение функции  $X(r, \varphi, t)$ .

Используя теорему сложения для цилиндрических функций, запишем изображение падающего импульса в виде

$$p_i^L(r, \varphi; s) = A_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(s) I_n(sr) \exp(in\varphi),$$

где

$$\gamma_n(s) = (-1)^n f^L(s) \exp(-s), \quad f^L(s) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt,$$

$I_n(x)$  – модифицированная цилиндрическая функция Бесселя порядка  $n$ .

Для определения изображения давления в рассеянном акустическом поле из (2) получаем уравнение

$$\Delta p_s^L - s^2 p_s^L = 0,$$

решение которого с учетом условия излучения на бесконечности будем искать в виде

$$p_s^L(r, \varphi; s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s) \gamma_n(s) K_n(sr) \exp(in\varphi), \quad (10)$$

где  $K_n(x)$  – модифицированная цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ ;  $a_n(s)$  – неизвестные коэффициенты.

Для определения изображений потенциалов смещения упругих волн в однородном цилиндре из скалярных уравнений (3), (4) получаем уравнения

$$\Delta \Psi^L - \frac{s^2}{c_l^2} \Psi^L = 0, \quad \Delta \Phi^L - \frac{s^2}{c_\tau^2} \Phi^L = 0,$$

решения которых с учетом условия ограниченности будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(s) \gamma_n(s) I_n(sr/c_l) \exp(in\varphi), \\ \Phi^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(s) \gamma_n(s) I_n(sr/c_\tau) \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $b_n(s)$ ,  $c_n(s)$  – неизвестные коэффициенты.

В непрерывно-неоднородном упругом покрытии компоненты вектора смещения  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\varphi}$  – периодические функции координаты  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому изображения этих функций будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n}(r; s) \gamma_n(s) \exp(in\varphi), \\ u_\varphi^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{2n}(r; s) \gamma_n(s) \exp(in\varphi), \\ \sigma_{rr}^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{1n}(r; s) \gamma_n(s) \exp(in\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}^L(r, \varphi; s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_{2n}(r; s) \gamma_n(s) \exp(in\varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $u_{1n}(r; s)$ ,  $u_{2n}(r; s)$ ,  $\sigma_{1n}(r; s)$ ,  $\sigma_{2n}(r; s)$  – неизвестные, зависящие от  $r$  функции.

Используя представления (12), из соотношений (6) для нормального и касательного напряжений выразим производные  $u'_{1n}$ ,  $u'_{2n}$  через функции  $\sigma_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$  (здесь и далее штрихом обозначена производная по аргументу). Объединяя полученные выражения с уравнениями движения (5), разрешенными относительно  $\sigma'_{1n}$ ,  $\sigma'_{2n}$ , приходим к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными  $u_{1n}$ ,  $u_{2n}$ ,  $\sigma_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$  для каждого  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_n &= A_n \mathbf{U}_n + B_n \mathbf{S}_n, \\ \mathbf{S}'_n &= C_n \mathbf{U}_n + D_n \mathbf{S}_n, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n})^T, \quad \mathbf{S}_n = (\sigma_{1n}, \sigma_{2n})^T,$$

$$A_n = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & in \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \\ in & -1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+2\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix},$$

$$C_n = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \alpha + \rho s^2 r^2 & in\alpha \\ -in\alpha & n^2 \alpha + \rho s^2 r^2 \end{pmatrix}, \quad D_n = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & in \\ in \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 4\mu(\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu).$$

Из граничных условий (8) для каждого  $n$  находим выражение для коэффициентов  $a_n(s)$  в разложении (10)

$$r = 1: \quad a_n(s) = -\frac{su_{1n}(1; s) + A_n I'_n(s)}{K'_n(s)} \quad (14)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (13) на внешней поверхности покрытия

$$r = 1 : \quad E_n \mathbf{U}_n + \mathbf{S}_n = \mathbf{F}_n, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{F}_n = \frac{A_i}{sK'_n(s)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad E_n = -\frac{sK_n(s)}{K'_n(s)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из граничных условий (9) для каждого  $n$  имеем

$$r = r_0 : \quad \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{K}_n, \mathbf{S}_n = L_n \mathbf{K}_n,$$

где

$$\mathbf{K}_n = (b_n(s), c_n(s))^T, \quad G_n = \begin{pmatrix} Z_{11}^{(n)} & in \frac{Z_{02}^{(n)}}{r} \\ in \frac{Z_{01}^{(n)}}{r} & -Z_{12}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$L_n = \begin{pmatrix} 2\mu_0 Z_{21}^{(n)} + \lambda_0 s_1^2 Z_{01}^{(n)} & 2in\mu_0 \frac{1}{r} \left( Z_{12}^{(n)} - \frac{Z_{02}^{(n)}}{r} \right) \\ 2in\mu_0 \frac{1}{r} \left( Z_{11}^{(n)} - \frac{Z_{01}^{(n)}}{r} \right) & -\mu_0 \left( Z_{22}^{(n)} - \frac{Z_{12}^{(n)}}{r} + n^2 \frac{Z_{02}^{(n)}}{r^2} \right) \end{pmatrix},$$

$$Z_{0j}^{(n)} = I_n(s_j r), \quad Z_{1j}^{(n)} = s_j I'_n(s_j r), \quad Z_{2j}^{(n)} = s_j^2 I''_n(s_j r); \quad j = 1, 2,$$

$$s_1 = s/c_l, \quad s_2 = s/c_\tau.$$

Откуда находим выражения для коэффициентов  $b_n(s)$ ,  $c_n(s)$  в рядах (11)

$$r = r_0 : \quad \mathbf{K}_n = G_n^{-1} \mathbf{U}_n \quad (16)$$

и краевые условия для системы дифференциальных уравнений (13) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_0 : \quad M_n \mathbf{U}_n + \mathbf{S}_n = 0, \quad (17)$$

где  $M_n = -L_n G_n^{-1}$ .

Из выражений (14), (16) следует, что волновые поля в жидкости и однородном упругом цилиндре могут быть определены лишь после нахождения поля смещений в непрерывно-неоднородном упругом покрытии, для чего необходимо решить краевую задачу (13), (15), (17).

Заметим, что в силу постановки задачи функции  $u_r$  и  $\sigma_{rr}$  будут симметричны относительно плоскости  $\varphi = 0, \pi$ , а функции  $u_\varphi$  и  $\sigma_{r\varphi}$  – антисимметричны относительно этой плоскости. То же самое можно сказать и об изображениях этих функций. Поэтому выполняются соотношения

$$u_{1,-n}(r; s) = u_{1n}(r; s), \quad u_{2,-n}(r; s) = -u_{2n}(r; s),$$

$$\sigma_{1,-n}(r; s) = \sigma_{1n}(r; s), \quad \sigma_{2,-n}(r; s) = -\sigma_{2n}(r; s).$$

Отсюда следует, что при решении краевой задачи (13), (15), (17) достаточно ограничиться только неотрицательными значениями индекса  $n$ . Кроме того, используя известные соотношения для модифицированных цилиндрических функций



$$I_{-n}(x) = I_n(x), \quad K_{-n}(x) = K_n(x),$$

из (14) получаем

$$a_{-n}(s) = a_n(s). \quad (18)$$

Следуя работе [22], сведем краевую задачу к задачам с начальными условиями. Найдем два линейно независимых решения дифференциальных уравнений (13), удовлетворяющих граничным условиям (17). В качестве начальных условий для них могут быть выбраны условия

$$r = r_0 : \quad \mathbf{U}_{jn} = (\delta_{1j}, \delta_{2j})^T, \quad \mathbf{S}_{jn} = -M_n \mathbf{U}_{jn}; j = 1, 2, \quad (19)$$

где  $\delta_{mj}$ , ( $m = 1, 2$ ) – символ Кронекера.

Система (13) и условия (17) являются однородными. Поэтому решением системы (13), которое удовлетворяет условиям (17), будет являться любая линейная комбинация, составленная из решений указанных задач Коши, т.е.

$$\mathbf{U}_n = N_1 \mathbf{U}_{1n} + N_2 \mathbf{U}_{2n}, \quad \mathbf{S}_n = N_1 \mathbf{S}_{1n} + N_2 \mathbf{S}_{2n},$$

где  $N_1, N_2$  – произвольные постоянные. Эти постоянные определим из краевого условия (15). Для этого необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$r = 1 : N_1 (E_n \mathbf{U}_{1n} + \mathbf{S}_{1n}) + N_2 (E_n \mathbf{U}_{2n} + \mathbf{S}_{2n}) = \mathbf{F}_n.$$

Определив множители  $N_1, N_2$ , найдем функции  $u_{1n}, u_{2n}$ . Теперь по формулам (14), (16) вычислим коэффициенты  $a_n(s), b_n(s), c_n(s)$ . В результате из выражений (10), (11) определим изображения функций, описывающих волновые поля в жидкости и однородном упругом цилиндре.

Вычислить оригиналы искомых функций можно, воспользовавшись формулой обратного преобразования Лапласа.

## 5. Результаты расчетов

Оценим влияние покрытия на звукоотражающие свойства упругого цилиндра.

Воспользовавшись формулой обратного преобразования Лапласа

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{w-i\infty}^{w+i\infty} p_s^L(r, \varphi; s) e^{st} ds, \quad w > 0,$$

и заменяя в ней параметр преобразования  $s$  на  $s(\omega) = w + i\omega$ , полагая при этом для определенности  $w = 1$ , получим

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{e^t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p_s^L(r, \varphi; s(\omega)) e^{i\omega t} d\omega.$$

Последнее выражение с учетом (10) записывается в виде

$$p_s(r, \varphi, t) = \frac{e^t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s(\omega)) \gamma_n(s(\omega)) K_n(s(\omega) r) \exp[i(n\varphi + \omega t)] d\omega. \quad (20)$$

Интеграл (20) подлежит численному расчету. При этом входящий в  $\gamma_n(s(\omega))$  образ  $f^L(1 + i\omega)$  лишь в ограниченном диапазоне изменения  $\omega$  принимает существенно отличные

от нуля значения. Поэтому в выражении (20) бесконечные пределы интегрирования заменяются конечными пределами.

На основе полученного решения задачи, с использованием формулы (20), проведены расчеты давления (действительной части величины  $p_s$ , то есть  $Rep_s$ ) в рассеянной звуковой волне для алюминиевого цилиндра ( $\rho_0 = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_0 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ) радиусом  $r_0 = 1 \text{ м}$ , имеющего покрытие толщиной  $0.2 \text{ м}$  и находящегося в воде ( $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 1485 \text{ м/с}$ ). Рассматривалось как однородное покрытие из полимерного материала с плотностью  $\rho^0 = 1070 \text{ кг/м}^3$  и упругими постоянными Ламе  $\lambda^0 = 3.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\mu^0 = 9.8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (поливинилбутираль), так и покрытие с непрерывной неоднородностью двух видов. Материальные параметры покрытия, соответствующие неоднородности первого ( $j = 1$ ) и второго ( $j = 2$ ) видов, описывались зависимостями

$$\rho_j(r) = \rho^0 f_j(r), \lambda_j(r) = \lambda^0 f_j(r), \mu_j(r) = \mu^0 f_j(r),$$

где

$$f_j(r) = a \left( 0.2 + \exp \left[ -4 \cdot \left( \frac{r - r_{j-1}}{r_1 - r_0} \right)^2 \right] \right), r_0 \leq r \leq r_1; j = 1, 2,$$

множитель  $a = 1.56$  выбран так, чтобы среднее значение функции  $f_j(r)$  по толщине слоя равнялось единице.

Расчеты выполнялись для случая, когда тело находится под воздействием плоского акустического импульса с безразмерными амплитудой  $A_i = 1$ , длительностью  $T = 2$  и плотностью сигнала  $f(t) = \sin(\pi t)$  (рис. 2,а).

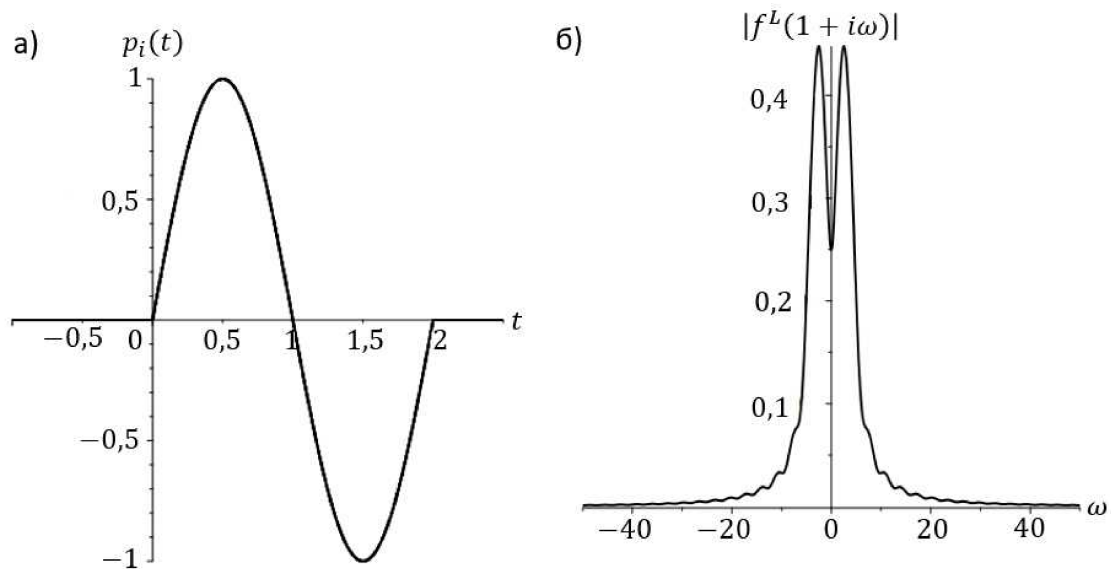


Рис. 2:  $p_i(t) = \sin(\pi t) [H(t) - H(t-2)]$  (а) и  $|f^L(1 + i\omega)|$  (б)

Интеграл (20) вычислялся по формуле трапеций на отрезке интегрирования  $[-\Omega, \Omega]$ . Было установлено, что с учетом изображения  $f^L$  наиболее оптимальным является значение  $\Omega = 50$ , поскольку дальнейшее увеличение  $\Omega$  практически не сказывается на результатах расчетов. Уже при  $|\omega| = 50$  значения  $|f^L(1 + i\omega)|$  становятся меньше 0.001 и с ростом  $|\omega|$  быстро убывают (рис. 2,б). Точность вычисления интеграла (20) контролировалась сгущением введенной на отрезке интегрирования сетки вдвое.

Суммирование ряда (20) проводилось усечением. Расчеты показали, что целесообразно индекс  $n$  изменять от  $-N_0$  до  $N_0$ , где  $N_0 = 22$ , так как дальнейшее увеличение числа членов ряда не приводит к заметному изменению суммы ряда.

Решение задач Коши (13), (19) получено методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с автоматическим выбором шага интегрирования. Последний выбирался так, чтобы при решении краевой задачи относительная погрешность значений  $u_{jn}(r_m; s(\omega))$  и  $\sigma_{jn}(r_m; s(\omega))$  ( $j = 1, 2; m = 0, 1$ ) для каждого фиксированного  $\omega$  не превосходила 0.1%.

Дополнительно были проведены контрольные расчеты, в которых сравнивались две временные зависимости величины  $Rep_s$  для алюминиевого цилиндра без покрытия. Одна из этих зависимостей рассчитывалась на основе построенного выше решения дифракционной задачи в случае, когда в расчетах покрытие полагалось однородным и имело те же материальные константы, что и оснащенный им цилиндр. Другая зависимость строилась на основе дополнительно решенной авторами дифракционной задачи. Ее постановка аналогична описанной в п. 2, только в качестве рассеивателя рассматривался однородный упругий цилиндр радиусом  $r_1$  без покрытия. При этом определение рассеянного цилиндром поля  $p_s$  сводилось к решению системы трех алгебраических уравнений с неизвестными  $a_n(s)$ ,  $b_n(s)$ ,  $c_n(s)$ , построенной из граничных условий (8), записанных для величин  $u_r^0$ ,  $\sigma_{rr}^0$ ,  $\sigma_{r\varphi}^0$  в терминах потенциалов  $\Psi$  и  $\Phi$  в пространстве изображений. Проведенные контрольные расчеты показали хорошее совпадение построенных временных зависимостей.

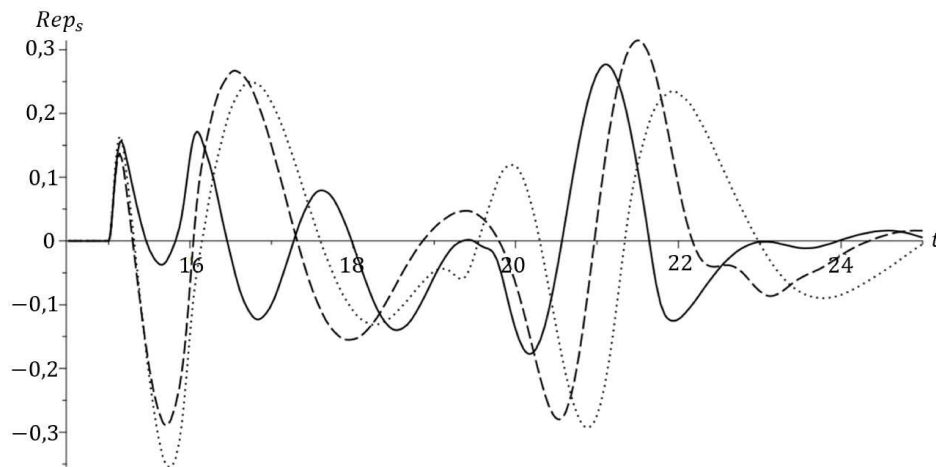


Рис. 3: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при  $r = 16r_1$ ,  $\varphi = 0$

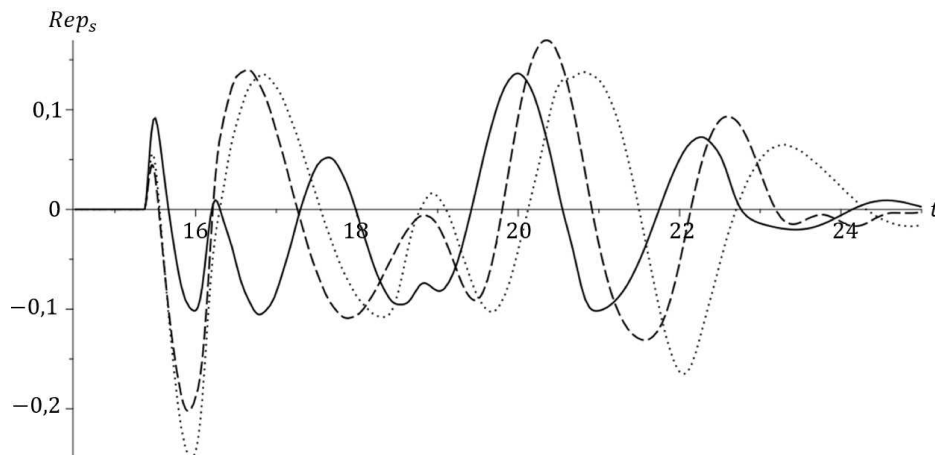


Рис. 4: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при  $r = 16r_1$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$

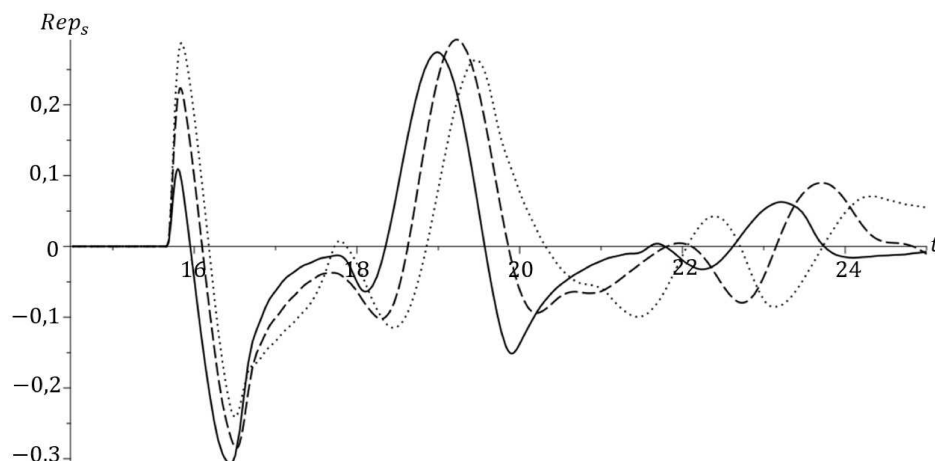


Рис. 5: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при  $r = 16r_1$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

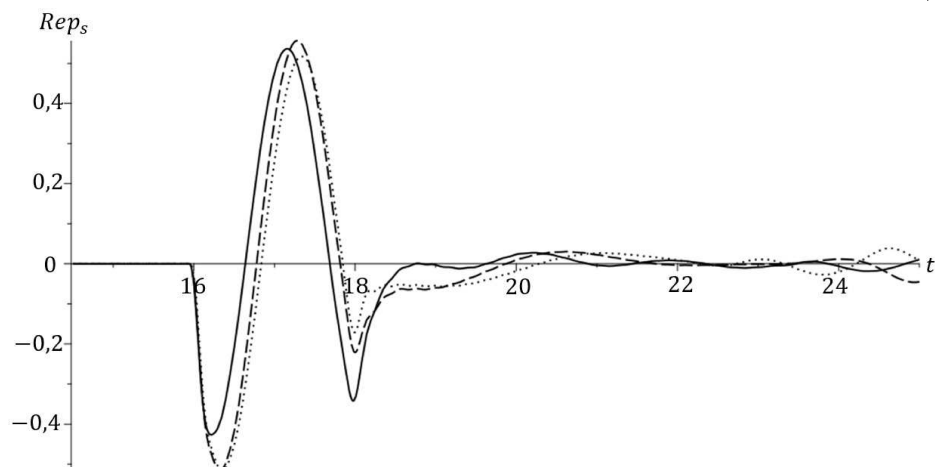


Рис. 6: Зависимость давления в рассеянной волне от времени при  $r = 16r_1$ ,  $\varphi = \pi$

На рис. 3–6 представлены графики зависимости давления в рассеянной волне от времени в четырех точках наблюдения, одинаково удаленных от тела. На рисунках сплошная линия соответствует однородному покрытию, пунктирная (штриховая) линия – непрерывно-неоднородному покрытию первого (второго) вида.

Различие на рис. 3–6 кривых обусловленное влиянием неоднородности покрытия свидетельствует о возможности изменения звукоотражающих свойств цилиндрического тела, находящегося под воздействием акустического импульса, за счет непрерывной неоднородности покрытия. Кроме того, из приведенных графиков видно, что с увеличением угла  $\varphi$  увеличивается время прихода рассеянной волны в рассматриваемые точки наблюдения. Это объясняется постепенным огибанием цилиндра рассеянной волной.

## 6. Заключение

В настоящей работе на основе решения нестационарной задачи дифракции звука на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием показана возможность изменения с помощью такого покрытия звукоотражающих свойств цилиндрического тела, находящегося под воздействием акустического импульса.

**СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Иванов, В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журн. 2006. Т.52. №6. С. 791-798.
2. Бобровницкий, Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустический журн. 2008. Т.54. №6. С.879-889.
3. Косарев, О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. Т.46. №1. С.34-37.
4. Толоконников, Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием / А.Г. Романов. Л.А. Толоконников // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. №5. С.850-857.
5. Толоконников, Л.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами / Л.А. Толоконников, Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т.58. №4. С.189-199.
6. Белкин, А.Э. Дифракция нестационарного акустического импульса на упругом теле с неоднородным покрытием // Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXII Международной конференции, посвящённой 120-летию со дня рождения академика Андрея Николаевича Колмогорова и 60-летию со дня открытия школы-интерната № 18 при Московском университете, Тула, 26-29 сентября 2023 года. – Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2023. – С.345-349.
7. Гаев, А.В. Нестационарное рассеяние плоского акустического импульса неоднородным трансверсально-изотропным цилиндрическим слоем // Известия ТулГУ. Серия: Информатика. 2002. Т.8. Вып.3. С.51-56.
8. Белкин, А.Э. Решение задачи дифракции плоского акустического импульса на упругом неоднородном цилиндре с помощью метода конечных элементов / А.Э. Белкин, Д.Р. Бирюков // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. Вып.1. С.68-83.
9. Медведский, А.Л. Дифракция плоских нестационарных упругих волн на неоднородном трансверсально изотропном цилиндре / А.Л. Медведский, Д.В. Тарлаковский // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.2. М.: ООО «ТР-принт», 2012. – С.53.
10. Глушков, Е.В. Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями / Е.В. Глушков, Н.В. Глушкова, С.И. Фоменко, Ч. Жанг // Акустический журнал. 2012. Т.58. №3. С.370-385.
11. Ларин, Н.В. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием / Н.В. Ларин, Л.А. Толоконников // Прикладная математика и механика. 2015. Т.79. №2. С.242-250.
12. Толоконников, Л.А. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // Прикладная математика и механика. 2017. Т.81. Вып.6. С.699-707.

13. Коровайцева, Е.А. Об исследовании переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах с учетом непрерывной неоднородности материала / Е.А. Коровайцева, С.Г. Пшенничнов // Проблемы прочности и пластичности. 2016. Т.78. №3. С.262-270.
14. Korovaytseva, E.A. Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1 / E.A. Korovaytseva, S.G. Pshenichnov // Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications: Nova Science Publishers, Inc. New York. 2020. P.1-28.
15. Pshenichnov, S. Transient Wave Propagation in Functionally Graded Viscoelastic Structures / S. Pshenichnov, R. Ivanov, M. Datcheva // Mathematics. 2022. 10. 4505. <https://doi.org/10.3390/math10234505>.
16. Исакович, М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. – 496с.
17. Седов, Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. М.: Наука, 1970. – 568с.
18. Новацкий, В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. – 872с.
19. Векслер, Н.Д. Дифракция плоской звуковой волны на полой упругой сфере // Акустический журн. 1975. Т.21. №5. С.694-700.
20. Метсавээр, Я.А. Дифракция акустических импульсов на упругих телах / Я.А. Метсавээр, Н.Д. Векслер, А.С. Стулов – М: Наука, 1979. – 239с.
21. Крылов, В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля – М.: Наука, 1974. – 223с.
22. Скобельцын, С.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем / С.А. Скобельцын, Л.А. Толоконников // Акустический журн. 1995. Т.41. №1. С.134-138.

## REFERENCES

1. Ivanov, V.P. 2006, “Analysis of the diffraction field on a cylinder with a perforated coating”, *Acoust. journal*, vol. 52, no. 6, pp. 791-798.
2. Bobrovniksky, Yu.I. 2008, “Non-scattering coating for a cylinder”, *Acoust. journal*, vol. 54, no. 6, pp. 879-889.
3. Kosarev, O.I. 2012, “Sound diffraction on an elastic cylindrical shell with a coating”, *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, vol. 46, no. 1, pp. 34-37.
4. Romanov, A.G. & Tolokonnikov L.A. 2011, “Scattering of sound waves by a cylinder with an inhomogeneous elastic coating”, *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 75, no. 5, pp. 850-857.
5. Tolokonnikov, L.A., Larin, N.V. & Skobeltsyn, S.A. 2017, “Modeling of an Inhomogeneous Coating of an Elastic Cylinder with Specified Sound-Reflecting Properties”, *Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 58, no. 4, pp. 189-199.
6. Belkin, A.E. “Diffraction of a Non-Stationary Acoustic Pulse by an Elastic Body with an Inhomogeneous Coating”, *Algebra, Number Theory, Discrete Geometry and Multiscale Modeling: Modern Problems, Applications and Problems of History: proceedings of the XXII International Conference named after A.N. Kolmogorov. Tula, 2023*, pp. 345-349.

7. Gaev, A.V. 2002, "Non-stationary scattering of a plane acoustic pulse by an inhomogeneous transversely isotropic cylindrical layer", *Bulletin of Tula State University. Series: Computer Science*, vol. 8, issue 3, pp. 51-56.
8. Belkin, A.E. & Biryukov, D.R. 2024, "Solution of the problem of diffraction of a plane acoustic pulse by an elastic inhomogeneous cylinder using the finite element method", *Bulletin of TvSU. Series: Applied Mathematics*, issue 1, pp. 68-83.
9. Medvedskiy, A.L. & Tarlakovskiy, D.V. "Diffraction of plane non-stationary elastic waves by an inhomogeneous transversely isotropic cylinder", *Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media: proceedings of the XVIII International Symposium named after A.G. Gorshkov*, vol. 2, Moscow, 2012, pp. 53.
10. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Fomenko, S.I. & Zhang, Z. 2012, "Surface waves in materials with functionally gradient coatings", *Acoust. journal*, vol. 58, no. 3, pp. 370-385.
11. Larin, N.V. & Tolokonnikov, L.A. 2015, "Scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discretely layered coating", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 79, no. 2, pp. 242-250.
12. Tolokonnikov, L.A. 2017, "Modeling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere with a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering", *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 81, issue 6, pp. 699-707.
13. Korovaytseva, E.A. & Pshenichnov, S.G. 2016, "On the study of transient wave processes in linearly viscoelastic bodies taking into account continuous inhomogeneity of the material", *Problems of Strength and Plasticity*, vol. 78, no. 3, pp. 262-270.
14. Korovaytseva, E.A. & Pshenichnov, S.G. 2020, "Study of transient wave processes in continuously inhomogeneous elastic and viscoelastic bodies. Chapter 1", *Modeling of the Soil-Structure Interaction: Selected Topics. Mechanical Engineering Theory and Applications*, pp. 1-28.
15. Pshenichnov, S., Ivanov, R. & Datcheva, M. 2022, "Transient Wave Propagation in Functionally Graded Viscoelastic Structures", *Mathematics*, no. 10. 4505. doi: <https://doi.org/10.3390/math10234505>.
16. Isakovich, M.A. 1973, "General Acoustics", *Moscow, Nauka*, 496 pp.
17. Sedov, L.I. 1970, "Continuum Mechanics", *Moscow, Nauka*, vol. 2, 568 pp.
18. Novatsky, V. 1975, "Theory of Elasticity", *Moscow, Mir*, 872 pp.
19. Veksler, N.D. 1975, "Diffraction of a Plane Sound Wave by a Hollow Elastic Sphere", *Acoust. journal*, vol. 21, no. 5, pp. 694-700.
20. Metsaveer, Ya.A., Veksler N.D. & Stulov A.S. 1979, "Diffraction of acoustic pulses on elastic bodies", *Moscow, Nauka*, 239 pp.
21. Krylov, V.I. & Skoblya, N.S. 1974, "Methods of approximate Fourier transform and inversion of the Laplace transform", *Moscow, Nauka*, 223 pp.
22. Skobeltsyn, S.A. & Tolokonnikov, L.A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylindrical layer", *Acoust. journal*, vol. 41, no. 1, pp. 134-138.

Получено: 17.03.2024

Принято в печать: 04.09.2024