ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-373-380

О специальных экстремальных множествах, связанных с таблицей умножения П. Эрдёша

Ю.Н. Штейников

Штейников Юрий Николаевич — Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»; Федеральный научный центр «Научно-исследовательский институт системных исследований РАН» (г. Москва).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Аннотация

В статье исследуется следующая задача, возникающая из теории произведений множеств. Пусть имеются два конечных подмножества из множества натуральных чисел, которые всюду в статье будут обозначаться как A и B. Полагаем, что они являются подмножеством интервала чисел $[1, Q]$. Вводим по определению множество, которое называется множеством произведения AB, элементы которого представляются в виде произведения элементов из A, B, иными словами такие ab, где $a \in A, b \in B$. В данной статье изучается задача об экстремально больших множествах A конечного интервала $[1, Q]$, которые обладают асимтотически наибольшим возможным произведением, то есть асимптотически наибольшим значением $|AA|$ равным $|A|^2/2$. В работе [2], была получена новая нетривиальная нижняя оценка на размер такого множества A по сравнению с предыдущим результатом статьи К.Форда [1]. В данной статье мы представляем метод , который улучшает предыдущий результат, а также рассматриваем другую версию этой задачи. В целом мы следуем и развиваем формулировки, аргументы, идеи и подходы предложенные в работах [1], [2].

Ключевые слова: натуральные числа, плотность, произведение.

Библиография: 12 названий.

Для цитирования:
Штейников, Ю. Н. О специальных экстремальных множествах, связанных с таблицей умножения П. Эрдёша // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 373–380.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 511.352 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-373-380

On special extremal sets associated with the multiplication table of P. Erdős

Yu.N. Shteinikov

Shteinikov Yuri Nikolayevich — National Research Center «Kurchatov Institute»; Federal Research Center “Research Institute of System Research of the RAS” (Moscow).
e-mail: yuriisht@gmail.com

Abstract

This article investigates the following problem arising from the theory of products of sets. Let there be two finite subsets of the set of natural numbers, which throughout the article will be denoted as A and B. We assume that they are a subset of the interval of numbers $[1, Q]$. By definition, we introduce a set called the product set AB, the elements of which are represented as a product of elements from A, B, in other words, such elements ab, where $a \in A, b \in B$. This article studies the problem of extremely large sets A of a finite interval $[1, Q]$ that have the asymptotically largest possible product, that is, the asymptotically largest value of $|AA|$ equal to $|A|^2/2$. In the paper [2], a new non-trivial lower bound for the size of such a set A was obtained in comparison with the previous result of the paper by K. Ford [1] and also of the paper [2]. In this article we present a method that improves the previous result, and also introduce another version of this problem. In general, we follow and develop the formulations, arguments, ideas and approaches proposed in the works [1], [2].

Keywords: integer numbers, density, product.

Bibliography: 12 titles.

For citation:
Shteinikov, Yu. N. 2024, “On special extremal sets associated with the multiplication table of P. Erdős”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 373–380.

1. Введение

В общепринятой терминологии произведением числовых множеств A и B называется множество AB, которое задается так:

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $[N]$ обозначает интервал целых чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$, и величина $M_N = |[N][N]|$.

Одной из знаменитых задач, поставленной П. Эрдешем, о таблице умножения задает вопрос о правильном порядке роста значения M_N при $N \longrightarrow \infty$. В свою очередь П.Эрдеш установил [3]

$$M_N = \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta + o(1)}},$$

где

$$2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1 + \log\log 2}{\log 4} = 0.08607...$$

Кевин Форд в 2018 году улучшил это утверждение и доказал помимо остального ([4]), что

$$M_N \asymp \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta} (\log\log N)^{3/2}}. \tag{1}$$

Возникшие из этой известной задачи П. Эрдеша естественно возникли ряд других математических вопросов, предложенные Х. Силлеруело с соавторами в статье [5]. Их исследование было посвящено изучению произведений и частных случайных подмножеств интервалов. Там же в упомянутой работе был представлен следующий вопрос.

1. Верно ли , что если $A \subset [N]$ и $|AA| \sim |A|^2/2$, то $|A| = o(N/\log^{1/2} N)$?

Отметим простое наблюдение, если $|AA| \sim |A|^2/2$, то тогда $|A|$ не может расти по порядку быстрее чем $M_N^{1/2}$.

С другой стороны Кевиным Фордом в работе [1] удалось доказать существование множества $A \subset [N]$ со свойством $|AA| \sim |A|^2/2$, размер которого близок к $M_N^{1/2}$. Им впервые получен отрицательный ответ на указанный выше вопрос. Более точно его результат выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $D > 7/2$. Тогда для каждого $N \geq 10$ найдется множество $A \subset [N]$ размера*

$$|A| \geq \frac{N}{(\log N)^{\theta}(\log\log N)^{D}}, \tag{2}$$

для которого $|AA| \sim |A|^2/2$, при $N \longrightarrow \infty$.

Из приведенных выше рассуждений можно заключить, что показатель степени у логарифма в теореме является точным.

Говоря кратко, вывод этого утверждения основан на анализе структуры множества $[N][N]$, а именно на свойстве простых сомножителей чисел из $[N][N]$ и существенно использует результаты статей [4],[6]. Возникает вопрос об уточнении степени повторного логарифма в исходной оценке Теоремы 1. В статье [2] был уточнен предыдущий результат и была доказана такая теорема.

Теорема 2. *Пусть $D > 13/4$. Тогда при достаточно большом N найдется множество $A \subset [N]$ размера*

$$|A| \geq \frac{N}{(\log N)^{\theta}(\log\log N)^{D}}, \tag{3}$$

для которого $|AA| \sim |A|^2/2$, при $N \longrightarrow \infty$.

Целью же настоящей статьи является представить доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. *Существует положительная абсолютная $\delta > 0$, и пусть $D > 13/4 - \delta$. Тогда при достаточно большом N найдется множества $A, B \subset [N]$ таких, что*

$$|A||B| \geq \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}(\log\log N)^{2D}}, \tag{4}$$

для которого $|AB| \sim |A||B|$, при $N \longrightarrow \infty$.

Мы придерживаемся схеме предложенной в упомянутой работе [1].

Следуя результатам [4], заключаем, что почти все элементы $[N][N]$ имеют асимптотически $\log\log N/\log 2$ простых делителей. По аналогии с [1], мы вводим в рассмотрение числовые множества A, элементы которых имеют асимптотически $\log\log N/\log 4$ простых сомножителей.

Кратко опишем некоторые этапы доказательства этих теорем по пунктам.

1)Для рассматриваемого выше множества A согласно [1] выписываем оценку на его размер.

2) Оцениваем сверху мультипликативную энергию A. Окажется, что ее значение близко к минимально возможной величине. Читателям напомним, что мультипликативная энергия $E(A)$ множества A, задается так:

$$E(A) := |\{a_1, a_2, b_1, b_2 \in A : a_1 b_1 = a_2 b_2\}|. \tag{5}$$

Верхнюю оценку для $E(A)$ мы получаем по схеме из [1], с дополнительным оптимизациями.

3) Выбираем случайные подмножества нулевой плотности $A^{'}$ во множестве A. Данные подмножества $A^{'}$ будут иметь уже асимптотически наименьшую возможную мультипликативную энергию: $E(A^{'}) \sim 2|A^{'}|^2$. Отсюда будет следовать, что множество $A^{'}$ будет подходящим для Теоремы 3.

Последующие разделы статьи имеют свою цель вывод Теоремы 3.

2. Предварительные утверждения.

Пусть p обозначает простое число, $\omega(n)$ есть количество простых делителей числа n, $\omega(n,t)$ – число простых делителей $p \le t$ числа n. Обозначим

$$\pi(x,k) = \{1 \le n \le x : \omega(n) = k\}. \tag{6}$$

Следующее утверждение может быть найдено в работе [7].

Лемма 1. *Пусть $x \ge 3$ и $1 \le k \le C \log\log x$ для некоторого фиксированного $C > 0$ и по определению $y = \frac{k}{\log\log x}$. Тогда имеет место*

$$|\pi(x,k)| = F(y)\frac{x}{\log x}\frac{(\log\log x)^{k-1}}{(k-1)!}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log\log x}\right)\right), \tag{7}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\Gamma(y+1)}\prod_{p\in P}\left(1+\frac{y}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{y}$$

Для сведения представим неравенство, связывающее размер произведения AA и энергию $E(A)$ множества A :

$$|AA| \ge \frac{|A|^4}{E(A)}. \tag{8}$$

Для технических выкладок нужен результат об оценке суммы мультипликативной функции.

Лемма 2. *Пусть f- действительнозначная мультипликативная функция такая, что $0 \le f(p^a) \le 1.9^a$ для всех простых чисел p и натуральных a. Тогда для любого $x > 1$ справедлива оценка*

$$\sum_{n\le x} f(n) \ll \frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\le x}\frac{f(p)}{p}\right). \tag{9}$$

Это утверждение есть следствие теоремы Х.Хальберстама и Х.Э. Рихтера. В явном виде это утверждение содержится в теореме 01 книги [7] .

Для специального случая функции $f(n) = \lambda^{\omega(n)}$ или $f(n) = \lambda^{\omega(n,t)}$ будет применяться это утверждение. Применяя предыдущую лемму к функции $f(n) = \lambda^{\omega(n,t)}$ и используя простую выкладку, мы получаем неравенство :

$$\sum_{n\le x}\lambda^{\omega(n,t)} \ll x(\log t)^{\lambda-1}. \tag{10}$$

3. Доказательство теоремы 3.

Пусть $K = [\frac{\log\log N}{\log 4}]$. По определению пусть

$$A = \left\{\frac{N}{2} \le n \le N : \mu(n) \ne 0, \omega(n) = K, \omega(n,t) \le \frac{\log_2 t}{\log 4} + 2(3 \le t \le N)\right\}. \tag{11}$$

Нижняя оценка на размер A была представлена в [1].

Далее мы переходим к вопросу об оценке мультипликативной энергии множества A.

В работе [2] мы сопоставили каждому решению (a_1, b_1, a_2, b_2) взаимно однозначно мы сопоставили четверку $(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2})$, такую что :

$$a_1 = \beta_{1,1}\beta_{1,2}, b_1 = \beta_{2,1}\beta_{2,2}, a_2 = \beta_{1,1}\beta_{2,1}, b_2 = \beta_{1,2}\beta_{2,2}, \tag{12}$$

и также дополнительное свойство

$$\gcd(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}) = \gcd(\beta_{2,1}, \beta_{2,2}) = \gcd(\beta_{1,1}, \beta_{2,1}) = \gcd(\beta_{1,2}, \beta_{2,2}) = 1. \tag{13}$$

Следующим шагом мы разбиваем все четверки $(\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2})$ на "диадические интервалы а именно не теряя общности считаем, что $\min(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}) \gg N^{1/2}$ и пусть

$$T \leq \beta_{1,2} \leq 2T. \tag{14}$$

Тогда можно сделать вывод, что

$$T/2 \leq \beta_{1,2}, \beta_{2,1} \leq 4T, \quad N/8T \leq \beta_{1,1}, \beta_{2,2} \leq 2N/T \tag{15}$$

Для данного T эти четверки обозначим через $\mathfrak{P}_T$. Чтобы посчитать все возможные такие четверки, мы проссумируем по всем T, пробегающие степени двойки вплоть до граничного значения.

Теперь приступим к оценке энергии и некоторым ее модификациям в доказательстве

Для удобства обозначим через $z_T = \frac{\log_2(4T)}{\log 4} + 2$. Исходя из предыдущих формул получаем :

$$\begin{gathered}\omega(\beta_{1,1}) + \omega(\beta_{1,2}) + \omega(\beta_{2,1}) + \omega(\beta_{2,2}) = 2K, \\ \omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}), \quad \omega(\beta_{1,1}) = \omega(\beta_{2,2}) \\ \omega(\beta_{1,1}, 4T) + \omega(\beta_{1,2}, 4T) + \omega(\beta_{2,1}, 4T) + \omega(\beta_{2,2}, 4T) \leq 2z_T.\end{gathered} \tag{16}$$

Поскольку $\beta_{1,2}, \beta_{2,1} \leq 4T$, то

$$\omega(\beta_{1,2}, 4T) = \omega(\beta_{1,2}), \omega(\beta_{2,1}, 4T) = \omega(\beta_{2,1}).$$

Вводим параметры $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 1/\log 4$. По определению пусть U_T задается выражением:

$$\begin{gathered}U_T = \sum_{\beta_{1,1},\beta_{2,2} \leq 2N/T} \sum_{\beta_{1,2},\beta_{2,1} \leq 4T} \lambda_2^{\omega(\beta_{1,1})+\omega(\beta_{1,2})+\omega(\beta_{2,1})+\omega(\beta_{2,2})-2K} \times \\ \lambda_1^{\omega(\beta_{1,1},4T)+\omega(\beta_{1,2},4T)+\omega(\beta_{2,1},4T)+\omega(\beta_{2,2},4T)-2z_T} = \\ = \lambda_1^{-2z_T}\lambda_2^{-2k}\left(\sum_{\beta \leq 4T} \lambda_2^{\omega(\beta)}\lambda_1^{\omega(\beta)}\right)^2 \left(\sum_{\beta \leq 2N/T} \lambda_2^{\omega(\beta)}\lambda_1^{\omega(\beta,4T)}\right)^2.\end{gathered} \tag{17}$$

Величина U_T связана с набором четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$. Каждый такой набор $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ входит в величину U_T с весом ≥ 1.

Тем не менее U_T не отмечает равенство величин $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}), \omega(\beta_{1,1}) = \omega(\beta_{2,2})$. Мы будем это использовать.

Рассмотрим главный случай. Пусть $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1}) \geq \delta \log\log T_1$ для какого-нибудь фиксированного малого параметра $\delta > 0$. Пусть $t = \omega(\beta_{1,2})$ и в нашем случае фиксировано. Для удобства введем множества :

$$M_l = \{(\beta_{1,2}, \beta_{2,1}) : \beta_{1,2}, \beta_{2,1} \leq T_1 : \omega(\beta_{1,2}) = t - l, \omega(\beta_{2,1}) = t + l\}. \tag{18}$$

Зафиксируем пару $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2})$. Для нее $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2})$ множество $(\beta_{1,2}, \beta_{2,1})$ лежит в M_0. Теперь же для произвольного $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ рассмотрим множество четверок :

$$V_l := (\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \quad \textit{где} \quad (\beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in M_l. \tag{19}$$

Стоит отметить, что четверки из множества V_l входят в значение U_T с таким же значением, что и нужные нам четверки. Но при этом для $l \neq 0$ четверки из V_l не удовлетворяют соотношению $\omega(\beta_{1,2}) = \omega(\beta_{2,1})$. Далее посмотрим как соотносятся размер множеств M_l с размером множества M_0. Сформулируем это в виде отдельного утверждения.

Лемма 3. *Для $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ и в вышеуказанных обозначениях справедливо неравенство $|M_l| \gg |M_0|$.*

Доказательство. Если параметр $l \in [1, \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}]$ то отсюда следует, что $|M_l| = |\pi(T_1, t-l)||\pi(T_1, t+l)|$. Можем тогда записать $\frac{|M_0|}{|M_l|}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{|M_0|}{|M_l|} \ll \exp\left(O\left(\sum_{l \le \delta^{1/2}(\log\log T_1)^{1/2}} \frac{l}{t}\right)\right).$$

При $t \geq \delta \log\log T_1$ легко получить утверждение нашей леммы.

□

Из предыдущей леммы мы можем сделать следующий вывод. Правильных четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ по порядку не превосходит $U_T/(\log\log T_1)^{1/2}$. С помощью Леммы 2 легко оценить величину U_T и имеется оценка в работе [1]. Мы берем оценку из этой работы: $U_T \ll \frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}\log T_1}$. Отсюда делаем вывод, что количество этих четверок $(\beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \beta_{1,2}, \beta_{2,1}) \in \mathfrak{P}_T$ не превосходит

$$O\left(\frac{N^2}{(\log N)^{2\theta}(\log T)(\log\log T)^{1/2}}\right). \tag{20}$$

В дальнейшем остается просуммировать по параметру T из диадического разбиения.

Чтобы вывести утверждение теоремы достаточно провести данные выкладки для разных K_1, K_2 таких, что K_1 соответствует множеству A, а K_2 для множества B. При этом проделать все выкладки для всевозможных K_1, K_2. На этом мы завершаем доказательство Теоремы 3.

4. Заключение

Отметим, что некоторые результаты о произведениях и частных подмножеств натуральных чисел содержатся в работах [11], [10], [12], [9], [8], и в приведенной ниже литературе. Работа выполнена в рамках государственного задания FNEF-2022-0011.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Форд К., Экстремальные свойства произведений множеств // Труды МИАН,2018 Т. 303, С.239–245.

2. Ю. Н. Штейников, Множества с экстремальным свойством произведения и его вариации // Матем. заметки, 2023, 114:6, С. 922–930.

3. Erdős, Paul. An asymptotic inequality in the theory of numbers // Vestnik Leningrad. Univ. 15:13, P. 41–49.

4. Ford, Kevin . The distribution of integers with a divisor in a given interval // Annals of Mathematics. Second Series. 168: 2, P. 367–433.

5. Силлеруело Х, Рамана Д. С., Рамаре О. Частные и произведения подмножеств нулевой плотности множества натуральных чисел // Труды МИАН, 2017, Т.296, С. 58–71 .

6. Ford K., Integers with a divisor in (y, 2y] //Anatomy of integers, CRM Proc. Lect. Notes, 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, P. 65–80.

7. Hall R. R., Tenenbaum G. Divisors // 1988, Cambridge Tracts Math., 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

8. Shteinikov Yu., On the product sets of rational numbers // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2017, Vol. 296, Issue 1, P 243-250.

9. Cilleruelo J. A note on product sets of rationals // International Journal of Number Theory 2016, Vol. 12, N. 05, P. 1415-1420.

10. Cilleruelo J., Garaev M. Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 2016. Vol. 160, Issue 03, P. 477-494.

11. Konyagin S., Shkredov I. On Sum Sets of Sets Having Small Product Set // Proc. Steklov Inst. Math. 2015, Vol. 290, P. 288–299.

12. Konyagin S., Shkredov I. New results on sums and products in R, Proc. // Steklov Inst. Math., 2016. № 294 , P. 78-88.

REFERENCES

1. Ford, K. 2018, “Extremal properties of product sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, Vol. 303, pp. 220-226.

2. Shteinikov, Yu. N. 2023, “Sets with Extremal Product Property and Its Variations”, *Mathematical Notes*, Vol. 114, no. 6, pp. 1357–1364.

3. Erdős, Paul. “An asymptotic inequality in the theory of numbers”, *Vestnik Leningrad. Univ.*, Vol.15, no. 13, pp. 41–49.

4. Ford, K. “The distribution of integers with a divisor in a given interval”, *Annals of Mathematics. Second Series.* Vol.168, no. 2, pp. 367–433.

5. Cilleruelo, J., Ramana, D.S., Ramare, O. 2017, “Quotients and product sets of thin subsets of the positive integers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 296, no. 1, pp. 52-64.

6. Ford, K. 2008, “Integers with a divisor in $(y, 2y]$”, *Anatomy of integers, CRM Proc. Lect. Notes*, 46, *Amer. Math. Soc., Providence*, pp. 65–80.

7. Hall, R. R., Tenenbaum, G. 1988, “Divisors”, *Cambridge Tracts Math.,* 90, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

8. Shteinikov, Yu. 2017, “On the product sets of rational numbers”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics,* 2017, vol. 296, no. 1, pp. 243-250.

9. Cilleruelo, J. 2016, “A note on product sets of rationals”, *International Journal of Number Theory*, 2016, Vol. 12, no. 05, pp. 1415-1420.

10. Cilleruelo, J., Garaev, M. 2016, “Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications”, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 160, no. 03, pp. 477-494.

11. Konyagin, S., Shkredov, I. 2015, “On Sum Sets of Sets Having Small Product Set”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 290, pp. 288–299.

12. Konyagin, S., Shkredov, I. 2016, “New results on sums and products in R”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016. vol. 294 , pp. 78-88.

Получено: 12.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024