ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 25. Выпуск 3.

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-359-364

Мера трансцендентности числа Лиувилля в p-адической области

Е. С. Крупицын

Крупицын Евгений Станиславович — кандидат физико-математических наук, Институтт математики и информатики МПГУ (г. Москва).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Аннотация

В статье установлены оценки многочлена от полиадического Лиувиллева числа в p-адической области.

Ключевые слова: полиадическое число Лиувилля, трансцендентность.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
Крупицын, Е. С. Мера трансцендентности числа Лиувилля в p-адической области // Чебышевский сборник, 2024, т. 25, вып. 3, с. 359–364.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 25. No. 3.

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2024-25-3-359-364

A measure of the transcendence of the Liouville number in the p-adic domain

E. S. Krupitsyn

Krupitsyn Evgeny Stanislavovich — candidate of physical and mathematical sciences, Institute of Mathematics and Computer Science of MSPU (Moscow).
e-mail: krupitsin@gmail.com

Abstract

The paper presents a lover estimate for the p-adic value of a polynomial evaluated at polyadic Liouville number.

Keywords: polyadic Liouville numbers, transcendence

Bibliography: 14 titles.

For citation:
Krupitsyn, E. S. 2024, “A measure of the transcendence of the Liouville number in the p-adic domain” , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 25, no. 3, pp. 359–364.

1. Введение

В ряде работ [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] существенно используется понятие полиадического Лиувиллева числа.

В работах [2], [3], [4], [5] устанавливается бесконечная линейная независимость значений гипергеометрических рядв с праметрами — полиадическими числами Лиувилля. В работе [1] установлено, что при определенных условиях на параметры рядов вида

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1))n \ldots (\alpha_r)_n}{(\beta_1))n \ldots (\beta_s)_n} z^n,$$
$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+1))n \ldots (\alpha_r+1)_n}{(\beta_1+1))n \ldots (\beta_s+1)_n} z^n$$

хотя бы одно из чисел $F_0(\xi), F_1(\xi)$, где ξ — натуральное число или полиадическое число Лиувилля, трансцендентное в бесконечном множестве полей p-адических чисел.

Перейдем к точным формулировкам. Полиадическим числом называется элемент прямого произведения колец целых p-адических чисел, взятого по всем простым числам p. Его канонический вид

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!, \quad a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad a_n \leqslant n.$$

Этот ряд сходится во всех полях p-адических чисел и его сумму в поле p-адических чисел обозначим $\mathfrak{a}^{(p)}$.

Полиадическое число $\mathfrak{a}$ назовем *полиадическим числом Лиувилля*, если для любых чисел P и n существует такое целое число A, что для всех простых чисел $p \leqslant P$ выполняется неравенство

$$|\mathfrak{a}^{(p)} - A| < |A|^{-n}.$$

Разумеется, полиадическое число Лиувилля является трансцендентным элементом любого поля p-адических чисел [6], [7].

В работах [12], [13] устанавлены оценки многочленов и линейных форм от полиадических чисел Лиувилля. В этих оценках содержатся величины, точные значения которых не указаны. Цель этой работы — получение явных оценок меры трансцендентности в p-адическом поле для полиадических чисел указанного ниже вида.

2. Основной результат

Пусть $\lambda_0 = 1$ и для любого простого числа p такого, что $p \leqslant \left[e^{\lambda_0}\right] + 1$ выполнено $ord_p \mu_0 = \left[e^{\lambda_0}\right] + 1$.

Пусть далее $\lambda_1 = \lambda_0 + \mu_0$ и для любого простого числа p такого, что $p \leqslant \left[e^{\lambda_1}\right] + 1$ выполнено $ord_p \mu_1 = \left[e^{\lambda_1}\right] + 1$.

На k-м шаге имеем

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1} \tag{1}$$

и для любого простого числа p такого, что

$$p \leqslant \left[e^{\lambda_k}\right] + 1 \tag{2}$$

выполнено

$$ord_p \mu_k = \left[e^{\lambda_k}\right] + 1. \tag{3}$$

Обозначим
$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k. \tag{4}$$
Из (1) – (4) следует, что λ является полиадическим числом Лиувилля.

Теорема 1. *Для любого натурального числа d существует постоянная H_0 такая, что для любого ненулевого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами степени не выше d и высоты $H \geqslant H_0$ и любого простого числа p, удовлетворяющего неравенству*
$$p \leqslant \left[\exp\left(C_1 e^{2H}\right)\right] + 1 \tag{5}$$
выполнено неравенство
$$|P(\lambda)|_p \geqslant e^{-dC_3 e^{2H}}, \tag{6}$$
где $C_3 > C_1 > C_0 = 2\ln 2$.

Доказательство. Для любого натурального числа k имеет место равенство
$$P(\lambda) = P(\lambda_k) + P'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{P''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \ldots + \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}(\lambda - \lambda_k)^d. \tag{7}$$

Так как $P(x)$ имеет целые коэффициенты, а числа λ_k — натуральные, все числа
$$P'(\lambda_k), \quad \frac{P''(\lambda_k)}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}$$
являются целыми. Кроме того, согдасно (1) – (4)
$$\lambda - \lambda_k = \sum_{l=k}^{\infty} \mu_l$$
и
$$|\lambda - \lambda_k|_p| = \mu_k|_p, \tag{8}$$
$$\left| P'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k) + \frac{P''(\lambda_k)}{2}(\lambda - \lambda_k)^2 + \ldots + \frac{P^{(d)}(\lambda_k)}{d!}(\lambda - \lambda_k)^d \right|_p \leqslant |\mu_k|_p \tag{9}$$
для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству (2).

По лемме о модуле старшего члена [14], если
$$\lambda_k > H + 1, \tag{10}$$
то $P(\lambda_k) \neq 0$ и, следовательно,
$$|P(\lambda_k)|_p \geqslant \frac{1}{|P(\lambda_k)|} \geqslant \frac{1}{dH\lambda_k^d} = e^{-\ln H - \ln d - d\ln\lambda_k}. \tag{11}$$

Если выполнено неравенство
$$|\mu_k|_p < e^{-\ln H - \ln d - d\ln\lambda_k}, \tag{12}$$
то из (7), (9), (11) и (12) следует оценка
$$|P(\lambda)|_p = |P(\lambda_k)|_p \geqslant e^{-\ln H - \ln d - d\ln\lambda_k}. \tag{13}$$

Так как

$$\mu_{k-1} = \prod_{p \leqslant \left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} p^{\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} = \prod_{p \leqslant \left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} e^{\ln p \left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right)} =$$

$$= \exp\left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right) \sum_{p \leqslant \left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1} \ln p \leqslant \exp\left(C_0 \left(\left[e^{\lambda_{k-1}}\right]+1\right)^2\right). \qquad (14)$$

Здесь использована известная оценка $\sum\limits_{p \leqslant x} \leqslant C_0 x$, причем при $x \geqslant 2$ можно положить $C_0 = 2\ln 2$.

Если число H достаточно велико для того, чтобы выполняется неравенство

$$\lambda_{k-1} \leqslant H + 1, \qquad (15)$$

т.е. $H \geqslant H_1$, тогда из (14) и (15) получим

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \mu_{k-1} \leqslant H + 1 + \exp\left(\left(C_0\left[e^{H+1}+1\right]\right)^2\right) \leqslant \exp\left(C_1 e^{2H}\right) \qquad (16)$$

при $H \geqslant H_2$ для любого $C_1 > C_0$.

Тогда

$$|\mu_k|_p = p^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)} = e^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)\ln p} < e^{-\left(\left[e^{\lambda_k}\right]+1\right)\ln 2} <$$

$$< e^{-\left(\left[e^{\exp\left(C_1 e^{2H}\right)}\right]+1\right)\ln 2} \qquad (17)$$

и условие (12), согласно (16), следует из неравенства

$$\left(\left[e^{\exp\left(C_1 e^{2H}\right)}\right]+1\right)\ln 2 > \ln H + \ln d + dC_1 e^{2H}. \qquad (18)$$

Это неравенство выполнено для всех $H \geqslant H_3$, где H_3 зависит от числа d.

При этом, согласно (13), (16)

$$|P(\lambda)|_p \geqslant e^{-\ln H - \ln d - d\ln\lambda_k} \geqslant e^{-\ln H - \ln d - dC_1 e^{2H}} \geqslant e^{-dC_3 e^{2H}}$$

при $H \geqslant H_4$.

Выбирая $H_0 = \max\left(H_1, H_2, H_3, H_4\right)$ получим утверждение теоремы. □

3. Заключение

Получение оценок снизу многочленов и линейных форм от p-адических чисел Лиувилля оказывается несколько более простой задачей, чем оценка многочлена от комплексных чисел Лиувилля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирский В. Г. Трансцендентность p-адических значений обобщённых гипергеометрических рядов с трансцендентными полиадическими параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2023. — Т. 510. — С. 29-32.

2. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений в полиадической лиувиллевой точке рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым параметром // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 2. — С. 304–312.

3. Чирский В. Г. Арифметические свойства значений обобщённых гипергеометрических рядов с полиадическими трансцендентными параметрами // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 506. — С. 95–107.

4. Чирский В. Г. Бесконечная линейная независимость с ограничениями на подмножество простых чисел значений рядов эйлерова типа с полиадическим лиувиллевым парамером // Чебышевский сборник. — 2022. — Т. 23, № 1. — С. 153–166

5. Чирский В. Г. Новые задачи теории трансцендентных полиадических чисел // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2022. — Т. 505. — С. 63–65.

6. Chirskii V. G. On polyadic liouville numbers // Doklady Mathematics. — 2022. — Vol. 106, no. S2. — P. S161–S164.

7. Чирский В. Г. Полиадические числа Лиувилля // Чебышевский сборник. — 2021. — Т. 22, № 3. — С. 245–255.

8. Chirskii V. G. Arithmetic properties of an euler-type series with polyadic liouville parameter // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2021. — Vol. 28, no. 3. — P. 293–302.

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства рядов эйлерова типа с параметром – лиувиллевым полиадическим числом // Доклады Академии наук. — 2020. — Т. 494. — С. 65–67.

10. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2020. — Vol. 27, no. 2. — P. 175–184.

11. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2019. — Vol. 26, no. 3. — P. 286–305.

12. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного числа // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 4. — С. 245–254.

13. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, № 2. — С. 374-382.

14. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука. — 1968.

REFERENCES

1. Chirskii, V. G. 2023, "Transcendence of p-adic measurements of generally accepted hypergeometric series with transcendental polyadic parameters", *Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes.*, vol. 510, pp. 29–32.

2. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic properties of values at polyadic liouville points of euler-type series with polyadic liouville parameter", *Doklady Mathematics*, Vol. 106, № . 2, pp. 150–153.

3. Chirskii, V. G. 2022, "Arithmetic properties of the values of generalized hypergeometric series with polyadic transcendental parameters", *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 2, pp. 386—397.

4. Chirskii, V. G. 2022, "Infinite linear independence with constraints on a subset of prime numbers for values of euler-type series with polyadic liouville parameter", *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 2, pp. 154–160.

5. Chirskii, V. G. 2022, "New problems in the theory of transcendental polyadic numbers", *Doklady Mathematics.*, Vol. 106, № . 1, pp. 265-–267.

6. Chirskii, V. G. 2022, "On polyadic liouville numbers", *Doklady Mathematics.* — 2022. — Vol. 106, no. S2. — pp. 161—164.

7. Chirskii, V. G. 2022, "Polyadic liouville numbers", *Doklady Mathematics.* — 2022. — Vol. 106, no. S2. — pp. 137–141.

8. Chirskii, V. G. 2021, "Arithmetic properties of an euler-type series with polyadic liouville parameter", *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 28, № . 3, pp. 293—302.

9. Chirskii, V. G. 2020, "Arithmetic properties of euler-type series with a liouvillean polyadic parameter", *Doklady Mathematics.*, Vol. 102, № . 2, pp. 68-–70.

10. Chirskii, V. G. 2020, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric series", *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 27, № . 2, pp. 175—184.

11. Chirskii, V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics.*, Vol. 26, № . 3, pp. 286—305.

12. Krupitsyn, E. S. 2017, "Estimation of a polynomial in a globally transcendental number", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, № . 4, pp. 245-–254.

13. Krupitsyn, E. S. 2019, "Arithmetic properties of series of some classes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, № 2, pp. 374–382.

14. Kurosh, A.G. 1968, "Course of higher algebra", *Moscow.: Science.*

Получено: 31.03.2024
Принято в печать: 04.09.2024